Astérisque

JEAN-LOUP WALDSPURGER

Représentation métaplectique et conjectures de Howe

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 674, p. 85-99
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__85_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 674

Novembre 1986

REPRÉSENTATION MÉTAPLECTIQUE ET CONJECTURES DE HOWE

par Jean-Loup WALDSPURGER

1. INTRODUCTION : LES FONCTIONS THÊTA

1.1. Soient n un entier pair ≥ 2 , $Q \in M(n,\mathbb{Z})$ une matrice symétrique à coefficients diagonaux pairs, telle que la forme quadratique ${}^t yQy$ sur $\mathbb{R}^n$ (considéré comme espace de matrices colonnes) soit définie positive. Pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$, posons

(1)
$$\theta_Q(z) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i z\, {}^t yQy).$$

Il existe un entier $N_Q > 0$ tel que θ_Q soit une forme modulaire de poids $n/2$ pour le groupe de congruence $\Gamma(N_Q)$ $(=\{\sigma \in SL(2,Z);\sigma \equiv 1 \bmod N_Q\})$, cf.[5] p.789. La fonction θ_Q ne dépend que de la classe d'équivalence de Q pour l'équivalence définie par l'action de $SL(n,\mathbb{Z})$.

1.2. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. On peut déduire de θ_Q une fonction $\theta_Q^{\mathbb{A}}$ sur $SL(2,Q)\backslash SL(2,\mathbb{A})$ de la façon suivante. Pour tout nombre premier p , soit K_p le complété p-adique de $\Gamma(N_Q)$. C'est un sous-groupe ouvert compact de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$. Soit $\sigma \in SL(2,\mathbb{A})$. D'après l'égalité :

$$SL(2,\mathbb{A}) = SL(2,\mathbb{Q}).SL(2,\mathbb{R}) \prod_p K_p$$

(cf.[10]; le groupe $SL(2,\mathbb{Q})$ est plongé "diagonalement" dans $SL(2,\mathbb{A})$), il existe $\sigma' \in SL(2,\mathbb{Q})$ tel que pour tout nombre premier p , la composante en p de $\sigma'\sigma$ appartienne à K_p . Choisissons un tel σ' , notons σ'' la composante réelle de $\sigma'\sigma$. Il existe un unique triplet (a,b,α), avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$, tel que

$$\sigma'' = \begin{bmatrix} a^{1/2} & ba^{-1/2} \\ 0 & a^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

On pose

$$\theta_Q^{\mathbb{A}}(\sigma) = a^{n/4} e^{in\alpha/2} \theta_Q(b+ia).$$

Ce terme ne dépend pas du choix de σ' .

1.3. Soit $O(Q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique définie par Q . Grâce à la théorie du genre ([19] p.347, [4] p.88), on peut "ajouter une variable" dans les fonctions thêta ci-dessus, plus précisément définir une fonction σ sur $(O(Q,\mathbb{Q})\backslash O(Q,\mathbb{A}))\times(SL(2,\mathbb{Q})\backslash SL(2,\mathbb{A}))$ de la façon suivante. Soient $g\in O(Q,\mathbb{A})$ et, pour tout nombre premier p, g_p sa composante en p . Il existe un réseau de $\mathbb{Q}^n$, noté $g\mathbb{Z}^n$, tel que pour tout p , son complété p-adique soit $g_p\mathbb{Z}_p^n$. Choisissons une base de $g\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}$ et notons gQ la matrice de la forme quadratique dans cette base. Elle vérifie les mêmes propriétés que Q , et sa classe d'équivalence est bien déterminée. On pose

$$\theta(g,\sigma)=\theta_{gQ}^{\mathbb{A}}(\sigma) .$$

La fonction θ ainsi définie est une forme automorphe ([2] §4.2) en chacune des variables.

1.4. Notons Θ_1, resp. Θ_2, resp. Θ_3 , l'espace engendré par les translatées par l'algèbre de Hecke, resp. par le groupe $SL(2,\mathbb{A})$, resp. par le groupe $O(Q,\mathbb{A})\times SL(2,\mathbb{A})$, des fonctions θ_Q , resp. $\theta_Q^{\mathbb{A}}$, resp. θ . Le problème de la détermination des éléments de Θ_1 propres pour les opérateurs de Hecke, et des valeurs propres associées, se transforme en celui de la détermination des sous-représentations irréductibles de la représentation de $SL(2,\mathbb{A})$ dans Θ_2 . L'égalité entre les opérateurs de Hecke et ceux définis à l'aide des matrices de Eichler-Brandt ([4] p.109,148) se transforme en une égalité entre deux endomorphismes de Θ_3 , l'un défini à l'aide de la représentation de $SL(2,\mathbb{A})$ dans Θ_3 , l'autre à l'aide de celle de $O(Q,\mathbb{A})$.

Remarque.-En fait cela n'est pas exact. Pour traduire les opérateurs de Hecke T_p ou les matrices de Eichler-Brandt associés en termes de groupes, il faudrait introduire les groupes $GL(2)$ et $GO(Q)$ (groupe des similitudes) au lieu de $SL(2)$ et $O(Q)$. Par contre les opérateurs T_{p^2} ou les matrices associées se traduisent bien comme on l'a dit. Les matrices de Eichler-Brandt auxquelles il sera fait allusion dans la suite seront supposées être associées à des opérateurs T_{p^2} .

1.5. Remarquons qu'on peut adéliser la formule (1) du §1.1 elle-même. Posons $Y=\mathbb{Q}^n$ (vu comme variété définie sur $\mathbb{Q}$). La matrice Q définit une forme quadratique q sur $Y(\mathbb{Q})$, puis par complétion sur $Y(\mathbb{R})$. Soit $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z)>0$. Notons $zf_{\mathbb{R}}$ la fonction sur $Y(\mathbb{R})$: $zf_{\mathbb{R}}(y)=\exp(\pi izq(y))$. Pour un nombre premier p , soient L_p le complété p-adique de $\mathbb{Z}^n$, qui est un réseau dans $Y(\mathbb{Q}_p)$, et f_p la fonction caractéristique de L_p . Posons $zf=zf_{\mathbb{R}}\prod_p f_p$. C'est une fonction sur $Y(\mathbb{A})$ et (1) s'écrit

$$\theta_Q(s) = \sum_{y \in Y(\mathbb{Q})} z f(y) .$$

Sous cette forme, il est clair que la présence cachée d'une variable dans le groupe orthogonal provient de l'action naturelle de ce groupe dans l'espace des fonctions sur $Y(\mathbb{A})$. On va voir que la variable dans le groupe $SL(2,\mathbb{A})$ (i.e. z) provient elle aussi d'une action de ce groupe dans cet espace de fonctions. C'est l'un des résultats essentiels de l'article [21] de A. Weil.

2. LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE, LA REPRÉSENTATION MÉTAPLECTIQUE ([21]).

2.1. Soient k un corps infini de caractéristique différente de 2, W un espace vectoriel sur k de dimension finie, muni d'une forme symplectique $< , >$. Le groupe d'Heisenberg $H(W,k)$ est l'ensemble $W \times k$ muni du produit

$$(w,t)(w',t') = (w + w',t + t' + \langle w,w'\rangle/2) .$$

Si k est muni d'une topologie, donc aussi W , on munit $H(W,k)$ de la topologie produit. Dans la suite, on pourra considérer W et $H(W)$ comme des groupes algébriques définis sur k .

2.2. Supposons d'abord k local non archimédien. Soit ψ un caractère de k (i.e. un homomorphisme continu de k dans $\mathbb{C}^\times$) , non trivial.

Notation. Soit G un groupe. L'expression "(ρ,S) est une représentation de G" signifie que S est un espace vectoriel complexe et ρ un homomorphisme de G dans $GL(S)$.

THÉORÈME (Stone, Von Neumann).- *Il existe une représentation lisse irréductible* (ρ_ψ,S) *de* $H(W,k)$ *telle que* $\rho_\psi((0,t)) = \psi(t)\mathrm{id}_S$ *pour tout* $t \in k$. *Elle est unique à équivalence près.* ([14],[20], voir aussi [12] §1.3, [3] ch.V, [13]).
("lisse" signifie que pour tout $s \in S$, le stabilisateur de s dans $H(W,k)$ est un sous-groupe ouvert).

2.3. Le groupe symplectique $Sp(W,k)$ agit dans $H(W,k)$ de façon naturelle. Soit (ρ_ψ,S) une représentation de $H(W,k)$ comme ci-dessus. Pour $\sigma \in Sp(W,k)$ on peut définir une représentation ρ_ψ^σ de $H(W,k)$ dans S par $\rho_\psi^\sigma(h) = \rho_\psi(\sigma h)$. Elle vérifie les mêmes propriétés que ρ_ψ . Il existe donc $M_\sigma \in GL(S)$ tel que

(1) $$\rho_\psi^\sigma(h) = M_\sigma \rho_\psi(h) M_\sigma^{-1} \text{ , pour tout } h \in H(W,k) .$$

Cet opérateur M_σ est unique à un scalaire près, et $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est une représentation projective de $Sp(W,k)$. Soit $\hat{Sp}(W,k)$ l'unique revêtement à deux feuillets (non trivial) de $Sp(W,k)$. Alors il existe une unique représentation lisse ω_ψ de $\hat{Sp}(W,k)$ dans S qui relève cette représentation projective.

Remarque 1. Par commodité, nous notons $\hat{Sp}(W,k)$ comme s'il s'agissait d'un groupe algébrique. Ce n'en est pas un.

Remarque 2. L'extension $\hat{Sp}(W,k)$ se décrit concrètement au moyen d'un cocycle appartenant à $H^2(Sp(W,k), \{\pm 1\})$ ([15], th.2.2,[18]).

2.4. Variante. Notons $\tilde{Sp}(W,k)$ le sous-groupe de $Sp(W,k) \times GL(S)$ formé des couples (σ, M_σ) vérifiant la relation (1) du §2.3. Le groupe $\mathbb{C}^\times$ agit sur $GL(S)$ par homothéties, et sur $\tilde{Sp}(W,k)$ via cette action sur $GL(S)$. Il existe une unique représentation $\mathbb{C}^\times$-équivariante de $\tilde{Sp}(W,k)$ dans S qui relève la représentation projective de $Sp(W,k)$; à savoir $(\sigma, M_\sigma) \longmapsto M_\sigma$. On la note encore ω_ψ.

Identifions $\{\pm 1\}$ au noyau de la projection $\hat{Sp}(W,k) \longrightarrow Sp(W,k)$. On a un isomorphisme

$$\tilde{Sp}(W,k) \simeq \hat{Sp}(W,k) \underset{\{\pm 1\}}{\times} \mathbb{C}^\times .$$

Selon les auteurs, l'un ou l'autre des groupes $\hat{Sp}(W,k)$ ou $\tilde{Sp}(W,k)$ est appelé *groupe métaplectique*. La représentation ω_ψ est appelée *représentation métaplectique*, ou "de Weil".

2.5. Soient G un sous-groupe de $Sp(W,k)$, $\hat{G}$, resp. $\tilde{G}$, son image réciproque dans $\hat{Sp}(W,k)$, resp. $\tilde{Sp}(W,k)$. Dans la suite, on étudie exclusivement les représentations (π, V) de $\hat{G}$, resp. $\tilde{G}$, telles que $\pi(\pm 1) = \pm \mathrm{id}_V$ ($\{\pm 1\}$ désignant ici le noyau de la projection $\hat{Sp}(W,k) \longrightarrow Sp(W,k)$), resp. $\pi(z) = z\,\mathrm{id}_V$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Elles sont dites "*spécifiques*". Il y a équivalence entre ces deux catégories de représentations, ce qui permet de transporter sur l'une les notions définies pour l'autre (par exemple la lissité). Une fonction f sur G telle que $f(zg) = zf(g)$, resp. $f(zg) = z^{-1}f(g)$, pour tous $g \in G$, $z \in \mathbb{C}^\times$, est dite *spécifique*, resp. *anti-spécifique*.

2.6. Il y a différents modèles possibles pour les représentations ρ_ψ et ω_ψ, en particulier les modèles de Schrödinger. Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète (i.e. X et Y sont deux sous-espaces totalement isotropes supplémentaires). Soit $S(Y)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur Y, à valeurs complexes. On peut réaliser ρ_ψ dans $S(Y)$ par :

$$\rho_\psi((x+y,t))f(y') = \psi(t + \langle y', x\rangle + \langle y, x\rangle/2) f(y+y')$$

pour $f \in S(Y)$, $x \in X$, y, $y' \in Y$, $t \in k$. On peut écrier explicitement la représentation ω_ψ de $Sp(W,k)$ ([15] th.2.2, [21] §1.13).

2.7. Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a des constructions analogues. On doit utiliser des représentations unitaires au lieu de représentations lisses ([12], [21]). Quand $k = \mathbb{C}$, il n'y a pas de revêtement non trivial de $Sp(W,\mathbb{C})$ et ω_ψ est une représentation de ce groupe lui-même. On pose dans la suite $\hat{Sp}(W,\mathbb{C}) = Sp(W,\mathbb{C})$.

2.8. Conservons la situation du §2.1, en supposant maintenant k global. On note k_v le complété de k en une place v, $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers quand v

est finie, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. Soit ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}/k$. Pour toute place v de k, fixons un modèle (ρ_{ψ_v}, S_v) de la représentation de $H(W,k_v)$ associée à ψ_v.

Notons a l'ensemble des places archimédiennes de k. Pour $v \in a$, S_v est un espace de Hilbert. Posons $S_a = \bigotimes_{v\in a} S_v$ (complété du produit tensoriel). Le groupe $\prod_{v\in a} H(W,k_v)$ agit dans S_a. On note S_a^∞ le sous-espace des vecteurs C^∞ de cette représentation.

Fixons un réseau L de $W(k)$. Soit v une place finie de k, notons L_v le complété de L dans $W(k_v)$. Supposons v impaire, ψ_v non ramifié, et L_v autodual, i.e $L_v = \{w \in W(k_v);\ \forall \ell \in L_v,\ \langle \ell,w\rangle \in \mathcal{O}_v\}$ (remarquons que ces hypothèses sont satisfaites pour presque toute place v). Le sous-espace des vecteurs de S_v fixés par $L_v \times \mathcal{O}_v$ $(\subset H(W,k_v))$ est de dimension 1. Fixons un tel vecteur non nul s_v°, notons K_v le fixateur de s_v° dans $\hat{S}p(W,k_v)$. C'est un sous-groupe ouvert compact qui relève le stabilisateur de L_v dans $Sp(W,k_v)$.

On peut définir le produit restreint $\prod_v \hat{S}p(W,k_v)$ sur toutes les places de k, relativement aux sous-groupes K_v. C'est une extension de $Sp(W,\mathbb{A})$ par $\bigoplus_v \{\pm 1\}$, sommé sur les places non complexes. Ce dernier groupe s'envoie par produit sur $\{\pm 1\}$, notons N le noyau de cette application. On pose

$$\hat{S}p(W,A) = (\prod_v \hat{S}p(W,k_v))/N .$$

Notons S^a le produit restreint $\bigotimes_v S_v$, sur les places non-archimédiennes de k, relativement aux vecteurs s_v°, et $S^\infty = S^a \otimes S_a^\infty$. Le produit tensoriel des $\omega_{\psi v}$ définit une représentation ω_ψ de $\hat{S}p(W,\mathbb{A})$ dans S^∞.

2.9. Variante. Essentiellement comme §2.4, on peut définir un sous-groupe $\widetilde{S}p(W,\mathbb{A})$ de $Sp(W,A) \times GL(S^\infty)$, et une représentation ω_ψ de $\widetilde{S}p(W,\mathbb{A})$ dans S^∞. On a un isomorphisme

$$\widetilde{S}p(W,\mathbb{A}) \simeq \hat{S}p(W,\mathbb{A}) \underset{\{\pm 1\}}{\times} \mathbb{C}^\times .$$

2.10. Les groupes $H(W,A)$ et $H(W,k)$ agissent dans S^∞ et dans son dual (algébrique).

THÉORÈME. *L'espace des formes linéaires sur* S^∞ *fixées par* $H(W,k)$ *est de dimension* 1 ([6] th. 4.1).

Le théorème est un analogue adélique du lemme ci-dessous. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$), définissons f_1, $f^1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$f_1(t) = f(t+1),\ f^1(t) = e^{2\pi i t} f(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on reconnaît l'action de certains éléments de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$).

Lemme. - Soit ℓ *une forme linéaire sur* $S(\mathbb{R})$ *telle que* $\ell(f) = \ell(f_1) = \ell(f^1)$ *pour toute* $f \in S(\mathbb{R})$ *. Alors il existe* $c \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\ell(f) = c \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

pour toute $f \in S(\mathbb{R})$.

Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète (définie sur k). Pour toute place v finie, resp. archimédienne, réalisons ρ_{ψ_v} dans $S(Y(k_v))$, resp. $L^2(Y(k_v))$, grâce au modèle de Schrödinger. Alors $S^\infty = S(Y(\mathbb{A}))$, et la forme linéaire θ définie sur S^∞ par

$$\theta(f) = \sum_{y\in Y(k)} f(y)$$

engendre la droite des formes linéaires fixées par $H(W,k)$ ([21] §16 à 20).

On peut déduire du théorème que l'extension $\hat{Sp}(W,\mathbb{A})$ (et a fortiori $\tilde{Sp}(W,\mathbb{A})$) est scindée au-dessus de $Sp(W,k)$, i.e. il existe un sous-groupe de $\hat{Sp}(W,\mathbb{A})$, d'ailleurs unique, qui se projette bijectivement sur $Sp(W,k)$. On identifie $Sp(W,k)$ et ce sous-groupe.

Soit θ une forme linéaire sur S^∞ fixée par $H(W,k)$, non nulle. Pour $s \in S^\infty$ et $\sigma \in \tilde{Sp}(W,A)$, on pose $\theta_s(\sigma) = \theta \circ \omega_\psi(\sigma)s$. Cela définit une fonction spécifique (cf. §2.5) sur $Sp(W,k)\backslash\tilde{Sp}(W,\mathbb{A})$. Pour toute place v archimédienne, fixons un sous-groupe compact maximal K_v de $\tilde{Sp}(W,k_v)$. Soit $S°$ le sous-espace des éléments de S^∞ qui sont K_v-finis pour toute place v archimédienne. Si $s \in S°$, alors θ_s est une forme automorphe sur $Sp(W,k)\backslash\tilde{Sp}(W,\mathbb{A})$.

3. PAIRES RÉDUCTIVES DUALES ([6] §5).

3.1. Conservons la situation du §2.1. Soient U_1, U_2 deux sous-groupes de $Sp(W,k)$. On dit qu'ils forment une paire réductive duale si

(i) U_1 et U_2 agissent dans W de façon absolument semi-simple ;

(ii) U_1 est le commutant de U_2 dans $Sp(W,k)$ et vice-versa.

3.2. Soient I un ensemble fini et pour $i \in I$, $W^{(i)}$ un espace symplectique sur k et $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ une paire réductive duale dans $Sp(W^{(i)},k)$. Supposons que W est la somme directe orthogonale des $W^{(i)}$. Alors $(\prod_{i\in I} U_1^{(i)}, \prod_{i\in I} U_2^{(i)})$ est une paire réductive duale dans $Sp(W,k)$. Réciproquement toute paire réductive duale dans $Sp(W,k)$ est un tel produit de paires $(U_1^{(i)}, U_2^{(i)})$ irréductibles, i.e. pour lesquelles il n'existe pas de telle décomposition (non triviale).

3.3. Nous allons décrire la classification des paires réductives duales irréductibles ([6] §5, [22] §18,27; on utilise [1] ch.10). Soit (U_1,U_2) une paire réductive duale dans $Sp(W,k)$, irréductible. Deux cas se présentent.

Type I. Il existe une algèbre à division D de centre une extension finie séparable de k, munie d'une "involution" (i.e. d'un antiautomorphisme involutif) τ ; pour $i=1,2$, un D-module W_i muni d'une forme $< , >_i$ D-sesquilinéaire ε_i-hermitienne, où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, de telle sorte que

$$W \simeq W_1 \underset{D}{\otimes} W_2 \ , \ < , > \simeq \mathrm{tr}_{D/k}(< , >_1 \otimes < , >_2)$$

$$U_1 \simeq U(W_1,k) \ , \ U_2 \simeq U(W_2,k) \ ,$$

où pour $i=1,2$, $U(W_i)$ est le groupe d'isométries de $< , >_i$, et $\mathrm{tr}_{D/k}$ est la trace réduite habituelle.

Type II. Il existe une algèbre à division D de centre une extension finie séparable de k, deux D-modules X_1 et X_2, tels que en notant $X = X_1 \underset{D}{\otimes} X_2$, et X^* son dual, on ait $W \simeq X \oplus X^*$ muni de la forme symplectique naturelle, et $U_1 \simeq GL(X_1,D)$, $U_2 \simeq GL(X_2,D)$.

3.4. Réciproquement de telles données définissent une paire réductive duale dans $Sp(W,k)$, aux deux exceptions suivantes près, toutes deux du type I :

(a) D est commutative, $D \neq k$, $\tau = id_D$, $W_1 = D$ muni d'une forme quadratique, W_2 est symplectique : dans ce cas le commutant de $O(W_1,D)$ est $Sp(W,k)$ tout entier et non pas $Sp(W_2,D)$.

(b) D est une algèbre de quaternions munie de l'involution usuelle, $W_1 = D$ muni d'une forme antihermitienne; le commutant de $U(W_1,k)$ est plus gros que $U(W_2,k)$.

3.5. Variante. Soient U_1, U_2 deux sous-groupes algébriques de $Sp(W)$ définis sur k. On dit qu'ils forment une paire réductive duale algébrique (sur k) si pour toute extension k' de k, $(U_1(k'),U_2(k'))$ est une paire réductive duale dans $Sp(W,k')$. Il résulte de la classification ci-dessus que l'application $(U_1,U_2) \longmapsto (U_1(k),U_2(k))$ est une bijection entre l'ensemble des paires réductives duales algébriques sur k et celui des paires réductives duales dans $Sp(W,k)$.

3.6. Plaçons-nous dans la situation du §2.2 ou 2.6 (i.e. k est local). Soit (U_1,U_2) une paire réductive duale irréductible dans $Sp(W,k)$ et considérons le groupe U_1. Sauf dans le cas ci-dessous, l'extension $\widetilde{Sp}(W,k)$ est scindée au-dessus de U_1. Notons que ce ne serait pas vrai pour l'extension $\widehat{Sp}(W,k)$.

L'exception est le cas de type I où D est commutative, $\tau = id_D$, W_1 est symplectique et W_2 quadratique. Alors $\widetilde{Sp}(W,k)$ est scindée au-dessus de U_1 $(=Sp(W_1,D))$ si et seulement si la dimension sur D de W_2 est paire.

3.7. Conservons la situation du §2.2 ou 2.6. Soit (U_1,U_2) une paire réductive duale dans $Sp(W,k)$, notons $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ les images réciproques de U_1 et U_2 dans

$\widetilde{Sp}(W,k)$. Ces deux groupes commutent grâce au :

Lemme.- Soient $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ *deux éléments de* $\widetilde{Sp}(W,k)$, σ_1, σ_2 *leurs images dans* $Sp(W,k)$. *Si* σ_1 *et* σ_2 *commutent, alors* $\tilde{\sigma}_1$ *et* $\tilde{\sigma}_2$ *commutent.*

On peut alors se demander s'il existe un lien entre les décompositions des restrictions à $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ de la représentation métaplectique ω_ψ . Un problème analogue se pose globalement.

3.8. *Exemple.-* Placons-nous dans la situation du §1.1. Posons $k=\mathbb{Q}$, $W_1=\mathbb{Q}^n$ muni de la forme quadratique définie par Q , $W_2=\mathbb{Q}^2$ muni d'une forme symplectique, $W=W_1\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}W_2$. Alors $U(W_1)=O(Q)$, $U(W_2)=SL(2)$. Ces deux groupes forment une paire réductive duale algébrique dans $Sp(W)$. Soit $\{e_1,e_2\}$ une base symplectique de W_2 , posons $X=W_1\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}\mathbb{Q}e_1$, $Y=W_1\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}\mathbb{Q}e_2\simeq W_1$. Alors $W=X\oplus Y$ est une polarisation complète. Le modèle de Schrödinger réalise la représentation métaplectique de $\widetilde{Sp}(W,\mathbb{A})$ dans $S(Y(\mathbb{A}))\simeq S(W_1(\mathbb{A}))$. Ici l'extension $\widetilde{Sp}(W,\mathbb{A})$ est scindée au-dessus de $O(Q,\mathbb{A})$ et $SL(2,\mathbb{A})$, qu'on peut donc identifier à des sous-groupes de $\widetilde{Sp}(W,\mathbb{A})$. Pour $s\in S(W_1(\mathbb{A}))$, la fonction θ_s (cf. §2.9) définit par restriction une fonction sur $O(Q,\mathbb{A})\times SL(2,\mathbb{A})$. Soit Θ l'espace des fonctions ainsi obtenues. Il contient l'espace Θ_3 (cf. §1.4). Les matrices de Eichler-Brandt établissent un lien entre la décomposition de Θ en composantes irréductibles pour l'action du groupe $SL(2,\mathbb{A})$ et son analogue pour le groupe $O(Q,\mathbb{A})$.

4. LES CONJECTURES DE HOWE.

4.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2 (k est local non archimédien). Soient (ω_ψ,S) un modèle de la représentation métaplectique de $\widetilde{Sp}(W,k)$, (U_1,U_2) une paire réductive duale dans $Sp(W,k)$, (π_1,V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1$ (cf. §2.5). Supposons $\mathrm{Hom}_{\tilde{U}_1}(S,V_1)\neq\{0\}$. On dit alors que π_1 *intervient dans* ω_ψ . Posons $S(\pi_1)=\cap\,\mathrm{Ker}(f)$, où f parcourt $\mathrm{Hom}_{\tilde{U}_1}(S,V_1)$, et $S[\pi_1]=S/S(\pi_1)$. Grâce au §3.7, cet espace est muni d'une action de $\tilde{U}_1\times\tilde{U}_2$. On montre qu'il existe une représentation lisse de $\tilde{U}_2$, notée $(\theta(\pi_1)\ ,\ \theta(V_1))$, unique à isomorphisme près, telle que $S[\pi_1]\simeq V_1\otimes\theta(V_1)$, muni de l'action produit de $\tilde{U}_1\times\tilde{U}_2$.

Conjecture.- Il existe un unique sous-espace $\theta(V_1)'$ *de* $\theta(V_1)$ *, invariant par* $\tilde{U}_2$ *, tel que la représentation de* $\tilde{U}_2$ *dans* $\theta(V_1)/\theta(V_1)'$ *soit irréductible* ([6] §6).

Admettons que cette conjecture est vraie, notons π_2 la représentation de $\tilde{U}_2$ dans $\theta(V_1)/\theta(V_1)'$. On dit alors que π_2 *correspond* à π_1 .

4.2. Quand k est archimédien, la conjecture analogue a été énoncée et démontrée par Howe ([7] ; voir aussi [9]). Quand k est fini, une telle conjecture serait fausse ([8]).

4.3. Plaçons-nous dans la situation du §2.7 (k est global), dont on utilise les constructions. Soit (U_1, U_2) une paire réductive duale algébrique (sur k) dans $Sp(W)$. Soient $i \in \{1,2\}$ et π_i une représentation admissible irréductible spécifique (cf. §2.5) de $\widetilde{U}_i(\mathbb{A})$. D'après Howe, on dit que π_i est automorphe si elle intervient comme sous-représentation de la représentation de $\widetilde{U}_i(\mathbb{A})$ dans l'espace des formes automorphes spécifiques sur $U_i(k)\backslash\widetilde{U}_i(\mathbb{A})$ (cette définition diffère un peu de la définition habituelle).

Soit π_1 une représentation admissible irréductible spécifique de $\widetilde{U}_1(\mathbb{A})$. Pour toute place v de k , il existe une représentation lisse irréductible $\pi_{1,v}$ de $\widetilde{U}_1(k_v)$, unique à isomorphisme près, telle que π_1 soit isomorphe à un produit tensoriel restreint $\otimes_v \pi_{1,v}$. Supposons que pour toute place v , $\pi_{1,v}$ intervienne dans la représentation métaplectique ω_{ψ_v} , et admettons que la conjecture 4.1 est vraie. Soit $\pi_{2,v}$ la représentation de $\widetilde{U}_2(k_v)$ correspondant à $\pi_{1,v}$. D'après le §6.3 ci-dessous, $\pi_{2,v}$ est non ramifiée pour presque toute place v , et on peut former un produit restreint $\pi_2 = \otimes_v \pi_{2,v}$ qui est une représentation admissible irréductible de $\widetilde{U}_2(\mathbb{A})$.

Conjecture.- Sous ces hypothèses, si π_1 *est automorphe,* π_2 *l'est aussi* ([6]§8).

4.4. Soient (ω_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de $\widetilde{Sp}(W,\mathbb{A})$, V_1 un sous-espace irréductible de l'espace des formes automorphes cuspidales ([2] §4.4) spécifiques sur $U_1(k)\backslash\widetilde{U}_1(\mathbb{A})$, π_1 la représentation de $\widetilde{U}_1(\mathbb{A})$ dans V_1 . Soit $v_1 \in V_1$, non nul. Alors v_1 est à décroissance rapide. Pour $s \in S°$ (cf.§2.10), on peut définir une fonction $v_2(s,.)$ sur $\widetilde{U}_2(A)$ par

$$v_2(s,\sigma_2) = \int_{U_1(k)\backslash\hat{U}_1(A)} \theta_s(\sigma_1\sigma_2)\overline{v_1(\sigma_1)}\, d\sigma_1 \quad .$$

Cette fonction est automorphe. Notons $\theta(V_1)$ le sous-espace engendré par ces fonctions quand s parcourt S° (il est indépendant du choix de v_1) . Il est stable par $\widetilde{U}_2(A)$. Supposons :

(i) la conjecture 4.1 est vraie ;

(ii) $\theta(V_1)$ est contenu dans l'espace des formes cuspidales sur $U_2(k)\backslash\widetilde{U}_2(A)$;

(iii) $\theta(V_1) \neq \{0\}$.

On montre alors ([16] th.I.2.2) que $\theta(V_1)$ est irréductible et réalise la représentation π_2 . La conjecture 4.3 est donc vraie dans ce cas.

La condition la plus difficile à lever semble être (iii), qui paraît liée à la non-nullité de la valeur en un certain point d'une fonction L associée à π_1 ([17]).

5. LES RÉSULTATS DE KUDLA ([11]).

5.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2, soient D , $W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$, ε_1, ε_2 comme au §3.3 type I (à ceci près qu'on note $W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$ les espaces notés W_1 , W_2 au §3.3). Par convention on accepte que $W_1^{(0)}$ ou $W_2^{(0)}$ soit nul. Supposons $W_1^{(0)}$ et $W_2^{(0)}$ anisotropes. Pour $i=1,2$, soit $H_i = D^2$ muni de la forme ε_i-hermitienne :

$$<(x,y)\ ,\ (x',y')> = \tau(x)y' + \varepsilon_i\tau(y)x' \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $W_i^{(n)}$ la somme orthogonale de $W_i^{(0)}$ et de n copies de H_i . C'est un espace du même type que $W_i^{(0)}$. Notons $U_i^{(n)}$ son groupe d'isométries.

Soit $E^{(n)}$ l'ensemble des termes $(n_1,\dots,n_r,n')$ tels que $r \geq 0$, $n_j \in \mathbb{N}$, $n_j \geq 1$ pour $j=1,\dots,r$, $n' \in \mathbb{N}$, $n_1+\dots+n_r+n' = n$. Les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de $U_i^{(n)}$ sont en bijection avec $E^{(n)}$. Pour $e=(n_1,\dots,n_r,n') \in E^{(n)}$, un sous-groupe de Lévi L_e d'un parabolique P_e correspondant à e est isomorphe à $GL(n_1,D)\times\dots\times GL(n_r,D)\times U_i^{(n')}$.

Remarque.- Ceci n'est vraiment correct que si $U_i^{(n)}$ est connexe (algébriquement). Mais même dans le cas contraire, on peut définir de façon ad hoc la notion de sous-groupe parabolique pour que la description ci-dessus soit valable.

Soient maintenant n,m deux entiers, posons $W^{(n,m)} = W_1^{(n)} \otimes_D W_2^{(m)}$, muni de sa forme symplectique (cf. §3.3). Alors $(U_1^{(n)}, U_2^{(m)})$ est une paire réductive duale dans $\widetilde{Sp}(W^{(n,m)},k)$. L'image réciproque $\widetilde{U}_1^{(n)}$ de $U_1^{(n)}$, resp. $\widetilde{U}_2^{(m)}$ de $U_2^{(m)}$, dans $\widetilde{Sp}(W^{(n,m)},k)$ ne dépend pas de m , resp. n , à isomorphisme près (cela ne serait pas vrai dans $\widehat{Sp}(W^{(n,m)},k)$) . C'est cette extension qu'on considère ci-dessous.

Soient de nouveau $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,2\}$. Notons $C_i^{(n)}$ l'ensemble des termes

$$c = (e=(n_1,\dots,n_r,n'),\ \delta_1,\dots,\delta_r,\ \pi^c)$$

tels que $e \in E^{(n)}$, pour tout $j=1,\dots,r$, δ_j est une représentation lisse irréductible cuspidale de $GL(n_j,D)$, π^c est une telle représentation spécifique de $\widetilde{U}_1^{(n')}$. Si δ est une représentation de $GL(t,D)$, notons δ^* la représentation de $GL(t,D)$ définie par $\delta^*(g) = \delta(\tau({}^tg^{-1}))$. Soient c comme ci-dessus, $\bar{c} = ((\bar{n}_1,\dots,\bar{n}_{\bar{r}},n'),\bar{\delta}_1,\dots,\bar{\delta}_{\bar{r}},\bar{\pi}^c) \in C_i^{(n)}$. On dit que c et $\bar{c}$ sont équivalents si $r=\bar{r}$, $\pi^c = \bar{\pi}^c$ et s'il existe un sous-ensemble $R \subset \{1,\dots,r\}$ et une permutation s de l'ensemble $\{1,\dots,r\}$ tels que pour $j \in \{1,\dots,r\}$, $\bar{n}_j = n_{s(j)}$, $\bar{\delta}_j = \delta_{s(j)}$ si $j \in R$, $\bar{\delta}_j = \delta^*_{s(j)}$ si $j \notin R$. Notons $cl(c)$ la classe d'équivalence de c .

Pour c comme ci-dessus, on construit la représentation $\delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_r \otimes \pi^c$ de $\tilde{L}_e$, qu'on prolonge en une représentation de $\tilde{P}_e$ en faisant agir trivialement le radical unipotent de P_e (sur lequel l'extension métaplectique est scindée). Par induction (normalisée de telle sorte que l'induite d'une représentation unitaire soit unitaire) on obtient une représentation lisse de $\tilde{U}_i^{(n)}$, notée $I(c)$. L'ensemble des sous-quotients irréductibles de $I(c)$ ne dépend que de la classe de c. Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_i^{(n)}$. Alors il existe $c \in C_i^{(n)}$ tel que π soit un sous-quotient de $I(c)$. La classe de c est bien déterminée, on la note $\mathrm{Supp}(\pi)$.

5.2. Soient $n \in \mathbb{N}$, (π_1, V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1^{(n)}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, $(U_1^{(n)}, U_2^{(m)})$ formant une paire réductive duale dans $\mathrm{Sp}(W^{(n,m)}, k)$ (on suppose $W^{(n,m)} \neq \{0\}$), on peut associer à π_1 une représentation lisse $(\theta_m(\pi_1), \theta_m(V_1))$ de $\tilde{U}_2^{(m)}$ (cf. §4.1; éventuellement $\theta_m(V_1) = \{0\}$).

PROPOSITION.- *Il existe un entier* m *tel que* $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$.

Notons $m(\pi_1)$ le plus petit entier m tel que $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$.

THÉORÈME.- *Supposons* π_1 *cuspidale. Alors :*

(i) $\theta_{m(\pi_1)}(\pi_1)$ *est irréductible et cuspidale ;*

(ii) *si* $m > m(\pi_1)$, $\theta_m(V_1)$ *est non nul,* $\theta_m(\pi_1)$ *est irréductible et n'est pas cuspidale* ([11] th.2.1; la démonstration utilise [16]).

5.3. Pour π_1 lisse et irréductible non nécessairement cuspidale, on a le résultat suivant. On note $|\ |$ le caractère valeur absolue de $GL(1,D)$.

THÉORÈME.- (1) *Pour tout* m, $\theta_m(\pi_1)$ *est de longueur finie.*

(2) *Soient* $c = ((n_1,\ldots,n_r,n'), \delta_1,\ldots,\delta_r, \pi^c) \in C_1^{(n)}$ *tel que* $\mathrm{Supp}(\pi_1) = \mathrm{cl}(c)$, m *tel que* $\theta_m(V_1) \neq \{0\}$ *et* π_2 *un sous-quotient irréductible de* $\theta_m(\pi_1)$. *Posons*

$$a = n' - m(\pi^c) + \frac{1}{2}(\dim_D W_1 - \dim_D W_2) ,$$

$$b = n_1 + \ldots + n_r + m(\pi^c) - m .$$

Alors

(i) *si* $b \leq 0$, $\mathrm{Supp}(\pi_2) = \mathrm{cl}(d)$, *où* $d \in C_2^{(m)}$ *est donné par*

$d = ((n_1,\ldots,n_r,1,\ldots,1,m(\pi^c)),\delta_1,\ldots,\delta_r, |\ |^{a+b},\ldots, |\ |^{a-2}, |\ |^{a-1}, \theta_{m(\pi^c)}(\pi^c))$;

(ii) *si* $b > 0$, *alors on peut remplacer* c *par élément équivalent, de telle sorte que* $n_1 = \ldots = n_b = 1$, $\delta_1 = |\ |^{a+b-1},\ldots,\delta_b = |\ |^a$, *et* $\mathrm{Supp}(\pi_2) = \mathrm{cl}(d)$, *où*

$$d = ((n_{b+1},\dots,n_r,m(\pi^c)),\delta_{b+1},\dots,\delta_r,{}_{m(\pi^c)}(\pi^c)). \qquad ([11]\ \text{th. } 2.5).$$

6. LES RÉSULTATS DE HOWE

6.1. Plaçons-nous dans la situation du §2.2, soient D, W_1, U_2, U_2 comme au §3.3, type I. Notons $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D. Supposons :

(i) la caractéristique résiduelle de k est $\neq 2$;

(ii) ψ est non ramifiée;

(iii) $D = k$ ou D est l'extension quadratique non ramifiée de k (et τ est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(D/k)$);

(iv) pour $i = 1,2$, il existe un réseau autodual L_i dans W_i (i.e L_i est un $\mathcal{O}_D$-module de type fini, engendrant W_i sur D, et $L_i = \{w \in W_i \ ;\ \forall \ell \ \ L_i,\ \langle w,\ell\rangle_i \in \mathcal{O}_D\}$.

On fixe deux tels réseaux L_1, L_2.

THÉORÈME (Howe).- *Sous ces hypothèses, la conjecture* 4.1 *est vraie pour la paire réductive duale* (U_1,U_2).

6.2. Pour $i = 1,2$, notons K_i le stabilisateur de L_i dans U_i. C'est un sous-groupe compact maximal de U_i et l'extension $\tilde{U}_i$ est scindée sur K_i. On peut identifier canoniquement K_i à un sous-groupe de $\tilde{U}_i$.

Soient (ω_ψ,S) un modèle de la représentation métaplectique de $\widetilde{Sp}(W)$, (π_1,V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\tilde{U}_1$ intervenant dans ω_ψ (cf. §4.1), (π_2,V_2) la représentation lisse irréductible de $\tilde{U}_2$ qui lui correspond grâce au théorème 6.1.

THÉORÈME.- *Si* $V_1^{K_1} \neq \{0\}$, *alors* $V_2^{K_2} \neq \{0\}$ ([6] th.7.1.b).

($V_1^{K_1}$, etc..., désigne le sous-espace des éléments de V_1 fixés par K_1).

Pour $i = 1,2$, notons $\mathcal{H}(\tilde{U}_i /\!/ K_i)$ l'algèbre des fonctions f sur $\tilde{U}_i$ à valeurs complexes, antispécifiques (cf. §2.5), à support compact modulo $\mathbb{C}^\times$, et biinvariantes par K_i. Cette algèbre agit dans $S^{K_1K_2}$ grâce à ω_ψ. Notons H_i son image dans $\mathrm{End}(S^{K_1K_2})$.

PROPOSITION.- *On a l'égalité* $H_1 = H_2$ ([6] th.7.1.c).

6.3. *Exemple*. Pour $k = \mathbb{Q}_p$, et pour la paire $(O(Q,\mathbb{Q}_p), SL(2,\mathbb{Q}_p))$ de l'exemple 3.8, H_2 est l'algèbre engendrée par l'opérateur de Hecke T_{p^2}. La proposition implique qu'il existe $h \in H_1$ tel que h agisse comme T_{p^2} dans $S^{K_1K_2}$. Essentiellement, c'est le rôle des matrices de Eichler-Brandt d'exprimer la valeur exacte de h.

6.4. Donnons une idée générale des démonstrations des théorèmes 6.1 et 6.2. Posons $L = L_1 \underset{\mathcal{O}_D}{\otimes} L_2 \subset W$. C'est un réseau autodual de W . Notons $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k , posons $A = L \oplus \mathcal{O}_k \subset H(W,k)$. C'est un sous-groupe de $H(W,k)$. Rappelons que $H(W,k)$ agit dans S . Le sous-espace S^A des invariants par A est de dimension 1. Fixons $s_0 \in S^A$, $s_0 \neq 0$. On a $s_0 \in S^{K_1K_2}$. Pour $i = 1,2$, notons $\mathcal{H}(\widetilde{U}_i)$ l'algèbre des fonctions sur $\widetilde{U}_i$ antispécifiques, à support compact modulo $\mathbb{C}^\times$, biinvariantes par un sous-groupe ouvert de $\hat{U}_i$. Cette algèbre agit dans S grâce à ω_ψ . Un point central de la démonstration est le

THÉORÈME.- *On a l'égalité* $S^{K_1} = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2)s_0$.

La démonstration est technique (!), utilisant le "modèle-réseaux" de la représentation métaplectique, qui est bien adapté à l'étude de l'action des sous-groupes compacts.

Soient (π_1,V_1) une représentation lisse irréductible spécifique de $\widetilde{U}_1$ intervenant dans ω_ψ , $(\theta(\pi_1),\theta(V_1))$ la représentation lisse de $\widetilde{U}_2$ qui lui est associée (cf. §4.1). On suppose $V_1^{K_1} \neq \{0\}$.

6.5. Soit V_2 un quotient irréductible de $\theta(V_1)$. On a une surjection $\widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2$-équivariante $S \longrightarrow V_1 \otimes V_2$. Comme K_1 est compact, on en déduit une surjection $\widetilde{U}_2$-équivariante $S^{K_1} \longrightarrow V_1^{K_1} \otimes V_2$. D'après le théorème 6.4, $S^{K_1} = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2)s_0$. D'où $V_1^{K_1} \otimes V_2 = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2)p(s_0)$. En particulier $p(s_0) \neq 0$. Mais $s_0 \in S^{K_1K_2}$, donc $p(s_0) \in V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$, et $V_2^{K_2} \neq \{0\}$.

6.6. Supposons la conjecture 4.1 fausse pour π_1 . Alors $\theta(V_1)$ a un quotient de la forme $V_2 \oplus V_2'$, avec V_2 et V_2' irréductibles. On a une surjection $\widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2$-équivariante $S \longrightarrow V_1 \otimes (V_2 \oplus V_2')$. Posons $X = V_1^{K_1} \otimes (V_2^{K_2} \oplus V_2'^{K_2})$. On a de même une surjection $p : S^{K_1K_2} \longrightarrow X$, qui est $\mathcal{H}(\widetilde{U}_1//K_1) \times \mathcal{H}(\widetilde{U}_2//K_2)$-équivariante. D'après le théorème 6.4, $S^{K_1} = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2)s_0$, d'où $S^{K_1K_2} = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2//K_2)s_0$. De même $S^{K_1K_2} = \mathcal{H}(\widetilde{U}_1//K_1)s_0$. On en déduit :

$$X = \mathcal{H}(\widetilde{U}_1//K_1)p(s_0) = \mathcal{H}(\widetilde{U}_2//K_2p(s_0) .$$

Lemme.- Soient Y *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$, A,B *deux sous-algèbres de* $\mathrm{End}(Y)$, $y \in Y$. *Supposons*

(i) $Y = Ay = By$;

(ii) A *et* B *commutent.*

Alors A *est le commutant de* B *dans* $\mathrm{End}(Y)$ *et vice-versa.*

Donc $\mathcal{H}(\widetilde{U}_1//K_1)$ est le commutant de $\mathcal{H}(\widetilde{U}_2//K_2)$ dans $\mathrm{End}(X)$. Mais la projection de X sur le facteur $V_1^{K_1} \otimes V_2^{K_2}$ appartient à ce commutant et n'appartient pas à $H(\widetilde{U}_1//K_1)$. Contradiction qui démontre la conjecture pour (π_1, V_1) .

Maintenant le §6.5 démontre le théorème 6.2.

6.7. Pour démontrer 6.1 quand $V_1^{K_1}$ est nul, on doit généraliser le théorème 6.4 et les raisonnements ci-dessus en remplaçant K_1 et K_2 par des groupes de congruence convenables.

Notons que la démonstration de la conjecture pour $k = \mathbb{R}$ suit essentiellement les mêmes chemins. Par contre la démonstration de l'analogue réel du théorème 6.4. est très différente.

BIBLIOGRAPHIE

Les deux références fondamentales sont les articles [21] de A. Weil et [6] de R. Howe. Le présent exposé doit beaucoup à un séminaire qui a eu lieu l'an dernier à Paris 7, dont des comptes-rendus seront publiés. Le lecteur y trouvera (en particulier sous la signature de M.-F. Vignéras) les démonstrations de certaines assertions de l'exposé (par exemple 3.4, 3.6 et 3.7). Les résultats de Howe (§6) ne sont pas encore publiés.

[1] A. ALBERT - *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXIV, Providence 1961.

[2] A. BOREL, H. JACQUET, *Automorphic forms and automorphic representations, in Automorphic forms, representations and L-functions*, p. 189-202, Proc. of Symp. in Pure Math. XXXIII, Part 1, AMS, Providence 1979.

[3] F. BRUHAT, *Représentations des groupes localement compacts* 2, cours à Paris 7, multigraphié ENS 1971.

[4] M. EICHLER, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer, Berlin Heidelberg New-York 1974.

[5] E. HECKE, *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, in Mathematische Werke, Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen 1970.

[6] R. HOWE, *θ-series and invariant theory, in Automorphic forms, representations and L-functions*, p.275-286, Proc. of Symp. in Pure Math. XXXIII, Part 1, AMS, Providence 1979.

[7] R. HOWE, *Transcending classical invariant theory*, preprint.

[8] R. HOWE, *Invariant theory and duality for classical groups over finite fields, with applications to their singular representation theory*, preprint.

[9] M. KASHIWARA, M. VERGNE, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*, Inv. Math. 44 (1978), 1-47.

[10] M. KNESER, *Approximation in algebraischen Gruppen*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles 1962.

[11] S. KUDLA, *On the local theta correspondence*, Inv. Math. 83 (1986), 229-255.

[12] G. LION, M. VERGNE, *The Weil representation*, Maslov index and theta series, Progress in Math. 6, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart 1980.

[13] G. MACKEY, *A theorem of Stone and Von Neumann*, Duke Math. J. 16 (1949) 313-326.

[14] J. Von NEUMANN, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann. 104 (1931), 570-578.

[15] P. PERRIN, *Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique, in Non commutative harmonic analysis and Lie groups*, Proc. Marseille-Luminy 1980, Springer LN 880, Berlin Heidelberg New-York.

[16] S. RALLIS, *On the Howe duality conjecture*, Comp. Math. 51 (1984), 333-399.

[17] S. RALLIS, *Injectivity properties of liftings associated to Weil representations*, Comp. Math. 52 (1984), 139-169.

[18] R. RAO, *On some explicit formulas in the theory of Weil representations*, preprint.

[19] C. SIEGEL, *Gesammelte Abhandlungen I*, Springer 1966.

[20] M. STONE, *Linear transformations in Hilbert space* III, *operational methods and group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 16 (1930), 172-175.

[21] A. WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111, (1964), 143-211.

[22] A. WEIL, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. 113 (1965), 1-87.

Jean-Loup WALDSPURGER

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et
d'Informatique
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05