GUY MÉTIVIER

Problèmes mixtes non linéaires et stabilité des chocs multidimensionnels

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. nº 671, p. 37-53

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__37_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 671

Novembre 1986

PROBLÈMES MIXTES NON LINÉAIRES ET STABILITÉ DES CHOCS MULTIDIMENSIONNELS

par Guy MÉTIVIER

La matière de cet exposé est tirée de travaux de A. Majda [12][13] qui concernent l'existence et la stabilité des ondes de choc pour des systèmes de lois de conservation en multidimension d'espace. Ces problèmes se posent en fait en termes d'inégalité *a priori* et d'existence locale pour un problème mixte non linéaire, à frontière libre, pour lequel la seule hypothèse raisonnable dont on puisse disposer sur les conditions aux limites est une hypothèse de type Lopatinski uniforme (en abrégé : C.L.U.), bien connue dans les problèmes linéaires. En fait, nous allons exposer les grandes lignes des méthodes de Majda dans le cadre un peu plus simple du problème mixte hyperbolique non linéaire avec C.L.U. (partie I) ; nous reviendrons ensuite très brièvement sur l'application de ces méthodes aux problèmes des ondes de choc (partie II). Une autre motivation pour ce choix est qu'il y a un intérêt manifeste pour une étude systématique du problème mixte hyperbolique non linéaire, et il est sans doute bon de noter que, comme dans le cas linéaire, la C.L.U. délimite parfaitement la classe des problèmes les mieux posés (ceux pour lesquels on a les meilleures estimations, notamment sur les traces au bord des solutions). Par ailleurs, on a bien sûr l'espoir que les méthodes développées fourniront un moyen d'attaque pour d'autres problèmes, par exemple lorsque la C.L.U. n'est plus satisfaite (*cf.* par exemple [21]).

Dans l'étude du problème mixte, on peut distinguer deux étapes :

1) Obtention des inégalités *a priori* (essentiellement des inégalités L^2) pour les problèmes linéarisés. Si, dans certains cas (systèmes symétriques, conditions aux limites dissipatives), elles découlent de simples intégrations par parties (K.O. Friedrichs [4], P.D. Lax - R.S. Phillips [11]), leur obtention sous la seule C.L.U. est plus délicate. Dans le cas des systèmes linéaires à coefficients C^∞, ce problème est résolu par l'emploi des symétriseurs de H.O. Kreiss [8] et du calcul pseudodifférentiel. Dans notre problème, les systèmes linéarisés ne sont pas à coefficients C^∞ , mais la démarche peut être reprise, et c'est ce qu'a fait Majda, en introduisant un calcul pseudodifférentiel avec des symboles à régularité limitée en x . Dans cet exposé, nous utiliserons plutôt le calcul para-

différentiel de J.-M. Bony [1], tout à fait adapté à ce type de questions, et qui permet en outre de cerner facilement les indices minimaux de régularité.

2) Exploitation des inégalités *a priori* ; par exemple pour obtenir l'existence locale de solutions régulières du problème non linéaire, grâce à l'emploi d'un schéma itéractif. Les sentiers sont ici très bien balisés : T. Kato [5][6][7], A. Majda [13][14], et aussi J. Rauch - F. Massey [20]...

PARTIE I : PROBLÈMES MIXTES HYPERBOLIQUES

1. NOTATIONS - RÉSULTATS

On note $(t,x) = (t,x_1,\dots,x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour simplifier l'exposé, on se place directement sur le demi-espace $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x_n > 0\}$ et on ne considérera que des systèmes du premier ordre :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,u)\,\partial_{x_j} u = F(t,x,u) \tag{1.1}$$

où u et F sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, les matrices A_j de taille $N \times N$ et F étant des fonctions C^∞ de leurs arguments.

Nous nous intéressons aux solutions locales de (1.1) autour de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, et qui prennent des valeurs voisines de $u^0 \in \mathbb{R}^N$. On fait les hypothèses suivantes :

(1.2) $A_n(0,u^0)$ est régulière (le bord $\{x_n = 0\}$ n'est pas caractéristique) ;

(1.3) pour tout $\xi \in (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ la matrice $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j(0,u_0)$ a N valeurs propres réelles distinctes (Stricte hyperbolicité).

Cette hypothèse peut d'ailleurs être affaiblie en une hypothèse de "bonne décomposition" (*cf.* Majda [12]).

En particulier $A_n(0,u^0)$ n'a que des valeurs propres réelles, non nulles d'après (1.2). On note N_0 le nombre de ces valeurs propres qui sont > 0.

Le système (1.1) est couplé avec des conditions aux limites :

$$\Phi(t,x,u(t,x)) = 0 \qquad \text{pour } x_n = 0 \tag{1.4}$$

où Φ est une fonction C^∞ de ses arguments à valeurs dans $\mathbb{R}^{N_0}$, telle que $\Phi(0,u^0) = 0$. On note B_0 la matrice $\Phi'_u(0,u^0)$.

Pour $(\tau,\xi') = (\tau,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$, on introduit :

$$M(\tau,\xi') = A_n^{-1}(\tau\,\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j) \tag{1.5}$$

les matrices A_j étant évaluées en $(0,u^0)$. Il résulte de (1.3) que pour $\operatorname{Im}\tau < 0$, M n'a pas de valeur propre réelle ; on note alors $E(\tau,\xi') \subset \mathbb{C}^N$ la somme des espaces propres généralisés associés aux valeurs propres de partie imaginaire < 0. La dimension de cet espace est constante et égale à N_0 (faire $\xi' = 0$). En outre $E(\tau,\xi')$ se laisse définir par continuité lorsque $\operatorname{Im}\tau \le 0$, $|\tau| + |\xi'| \neq 0$.

La condition de Lopatinski uniforme peut alors s'énoncer :

(1.6) pour tout $(\tau,\xi') \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n+1}) \setminus 0$ avec $\operatorname{Im} \tau \leq 0$, la matrice B_0 est un isomorphisme de $E(\tau,\xi')$ sur $\mathbb{R}^{N_0}$.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes : $\tilde{\Omega}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'il faudra prendre assez petit. Pour ε réel, on note $\Omega_\varepsilon = \tilde{\Omega} \cap \{x_n > 0 \text{ et } t < \varepsilon\}$ et $b\Omega_\varepsilon = \tilde{\Omega} \cap \{x_n = 0 \text{ et } t < \varepsilon\}$. Nous nous donnons un entier $\mu > \frac{n+3}{2}$; $H^\mu(\Omega_\varepsilon)$ désigne alors l'espace de Sobolev usuel sur Ω_ε et $\mathcal{H}^\mu(\Omega_\varepsilon)$ l'espace des $u \in H^\mu(\Omega_\varepsilon)$ tels que $u_{|x_n=0} \in H^\mu(b\Omega_\varepsilon)$.

THÉORÈME 1.- *Soit* $u \in \mathcal{H}^\mu(\Omega_0)$ *solution de* (1.1) (1.4) *sur* Ω_0, *telle que* $u(0) = u^0$. *Alors* u *se prolonge de manière unique en solution de* (1.1) (1.4), *de régularité* $\mathcal{H}^\mu$, *au voisinage de* 0 *dans* $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

L'énoncé de ce théorème est assez inhabituel : plutôt que de se donner u dans $t < 0$, on se donne d'habitude une condition initiale :

(1.7)
$$u_{|t=0} = g .$$

Il faut alors imposer certaines conditions de compatibilité entre les données : en effet, si u est solution régulière de (1.1) (1.4) (1.7), on a

$$\partial_t^k[\Phi(t,x,u(t,x))]_{|t=0} = G_k\left(x,\left(\partial_t^j u_{|t=0}\right)_{j\leq k}\right),$$

$$\partial_t^k u_{|t=0} = H_k\left(x,\left(\partial_x^\alpha g(x)\right)_{|\alpha|\leq k}\right)$$

où G_k et H_k sont des fonctions C^∞ de leurs arguments. On a donc aussi :

(1.8)
$$G_k(x,H_j(x,\partial_g^\alpha(x)_{|\alpha|\leq j})_{j\leq k}) = 0 \quad \text{pour } x_n = 0 .$$

THÉORÈME 2.- *Soit* g *de classe* $H^{\mu+1}$ *au voisinage de* 0 *dans* $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. *On suppose que* $g(0) = u^0$ *et que* (1.8) *est vérifiée pour* $k < \mu$. *Alors il existe une unique solution* u *de régularité* $\mathcal{H}^\mu$, *du problème mixte* (1.1) (1.4) (1.9), *au voisinage de* 0 *dans* $\{t \geq 0 , x_n \geq 0\}$.

Preuve.- On prolonge g pour $x_n < 0$. Soit $u_1 \in H^{\mu+1}$ la solution du problème de Cauchy (1.1) (1.7) au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (*cf.* [14] ou [16]). La fonction $h = \Phi(t,x,u_1(t,x))_{|x_n=0}$ est de classe $H^{\mu+1/2}$ et les conditions (1.8) assurent que $\partial_t^k h_{|t=0} = 0$ pour $k < \mu$. La fonction $\tilde{h}$ qui vaut h pour $t > 0$ et 0 pour $t < 0$ est donc de classe H^μ au voisinage de 0.

Par ailleurs, on peut écrire $\Phi(t,x)u_1 + v) = \Phi(t,x,u_1) + \psi(t,x,u_1,v)$. On cherche alors la solution u du problème mixte sous la forme $u_1 + v$, v étant solution d'un système de la forme

$$
(1.9) \quad \begin{cases} \partial_t v + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,u_1+v)\,\partial_{x_j} v = \tilde{F}(t,x,u_1,\operatorname{grad} u_1,v) \\ \psi(t,x,u_1,v) + \tilde{h} = 0 \qquad \text{pour} \quad x_n = 0 \\ v_{|t<0} = 0 \; . \end{cases}
$$

Par construction $v = 0$ est solution de (1.9) dans $t < 0$; on obtient v pour $t > 0$ grâce à une variante du théorème 1, obtenue en autorisant les coefficients A_j , F et Φ à dépendre (de façon C^∞) de fonctions données dans H^μ .■

Remarque.- Ce théorème n'est pas tout à fait satisfaisant, car l'on s'attendrait à ce que la solution soit aussi régulière que la donnée initiale (à condition d'avoir le bon nombre de conditions de compatibilité). Il faut noter que même dans le cas linéaire, la démonstration de ce fait n'est pas si simple (J. Rauch [19], J. Rauch-F. Massey [20]). En fait, la démonstration donnée dans [19] dans le cas des systèmes généraux non nécessairement symétriques, consomme beaucoup de régularité sur les coefficients, et semble donc difficile à adapter aux problèmes non linéaires.

On peut compléter les théorèmes d'existence 1 et 2 par un "principe de prolongement" semblable à celui dégagé dans le cas des problèmes sans bord, par A. Majda [14] pour les systèmes symétriques, et étendu dans [16] aux cas des systèmes strictement hyperboliques ou symétrisables.

THÉORÈME 3.- *Soit* u *une solution lipschitzienne de* (1.1) (1.4) *sur* $\bar{\Omega}_0$ *; on suppose que* $u(0) = u^0$ *et que, pour tout* $\varepsilon > 0$, $u \in H^\mu(\Omega_{-\varepsilon})$. *Alors il existe un voisinage* $\tilde{\Omega}' \subset \tilde{\Omega}$ *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $u \in H^\mu(\Omega_0')$ *et* u *se prolonge en solution* H^μ *au voisinage de* 0 *dans* $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$

Bien sûr, ce théorème est local, mais il est destiné à être globalisé par les méthodes habituelles de déformation de surface. De manière très grossière, on peut dire la chose suivante : si u est une solution H^μ dans un domaine U , u se prolonge sur un domaine "maximal" U_1 et en un point (t^0,x^0) du bord de U_1 , on a l'une des situations suivantes :

a) u n'est pas bornée au voisinage de (t^0,x^0) , ou plus généralement u sort du domaine d'étude de l'équation.

b) u est bornée, mais $\operatorname{grad} u$ ne l'est pas. On est en présence du phénomène typiquement non linéaire de création de singularités (par exemple, discontinuités, chocs). La question est alors de savoir si u peut se prolonger en solution faible (dans le cas où cela a un sens).

c) u et $\operatorname{grad} u$ sont bornés, mais le bord de U_1 en (t^0,x^0) n'est pas une surface spatiale (c'est-à-dire d'équation $\Phi = 0$ où Φ peut être prise comme variable de temps). Typiquement cela veut dire que (t^o,x^o) est sur le bord du domaine de détermination de U, et que pour connaître u au voisinage de (t^o,x^o), il faudrait connaître u sur un domaine initial plus vaste que U.

Dans la suite de cette partie I, nous allons esquisser la preuve des théorèmes 1 et 3, en suivant, comme on l'a déjà dit, la démarche de A. Majda ([12][13][14]), à ceci près que nous allons substituer à son calcul pseudodifférentiel à symboles H^s en x, le calcul paradifférentiel de J.-M. Bony.

2. CALCUL PARADIFFÉRENTIEL À PARAMÈTRE

Notons ici y la variable de $\mathbb{R}^n$ et η la variable duale. Pour m réel, on note alors Γ_0^m (resp. Γ_1^m l'ensemble des symboles $a(y,\eta,\sigma)$, C^∞ en $(\eta,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, tels que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe C_α pour lequel

$$\forall(\eta,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* : \|\partial_\eta^\alpha a(\cdot,\eta,\sigma)\|_{L^\infty} \leq C_\alpha(\sigma^2+|\eta|^2)^{1/2(m-|\alpha|)} \tag{2.1}$$

$$[\text{resp.} \quad \|\partial_\eta^\alpha a(\cdot,\eta,\sigma)\|_{\text{Lip}} \leq C_\alpha(\sigma^2+|\eta|^2)^{1/2(m-|\alpha|)}] . \tag{2.2}$$

Lip désigne ici l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^n$, uniformément lipschitziennes. On quantifie ces symboles de la manière suivante :

on se donne $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ et $\chi(\eta',\eta,\sigma)$ C^∞ et homogène de degré 0, supportée dans le cône $|\eta'|^2 \leq \varepsilon^2(\sigma^2+|\eta|^2)$ et valant 1 pour $|\eta'|^2 < \varepsilon'^2(\sigma^2+|\eta|^2)$. On introduit :

$$G(y,\eta,\sigma) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy.\eta'} \chi(\eta',\eta,\sigma)\,dy' .$$

Pour a Γ^m, on définit l'opérateur T_a^σ par la formule :

$$T_a^\sigma u(y) = p_a(y,D_y,\sigma)u(y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy.\eta}\, p_a(y,\eta,\sigma)\hat{u}(\eta)\,dy \tag{2.3}$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u et p_a le symbole

$$p_a(y,\eta,\sigma) = \int G(y-y',\eta,\sigma)a(y',\eta,\sigma)\,dy' .$$

Bien sûr, la quantification T^σ dépend du choix de la fonction χ ; on supposera ici que cette fonction est fixée une fois pour toute, mais il va de soi que les résultats énoncés ci-dessous ne dépendent pas de ce choix.

Pour simplifier l'exposition, introduisons maintenant la terminologie suivante : $H^s(\mathbb{R}^n)$ étant muni des normes :

$$\|u\|_{s,\sigma} = \left(\int (\sigma^2+|\eta|^2)^s\, |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2} , \tag{2.4}$$

on dira que la famille d'opérateurs A^σ est d'ordre $\leq m$ si, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe C tel que, pour tout $\sigma \geq 1$, A^σ opère de H^s dans H^{s-m} et

$$\forall u \in H^s , \forall\sigma \geq 1 \quad \|A^\sigma u\|_{s-m,\sigma} \leq C\,\|u\|_{s,\sigma} . \tag{2.5}$$

Les résultats que nous énonçons maintenant sont désormais classiques lorsque $\sigma = 1$ (J.-M. Bony [1], Y. Meyer [17][18]) et leur extension au cas "à paramètre" est sans douleur :

(2.6) pour tout $a \in \Gamma_0^m$, T_a^σ est d'ordre $\leq m$;

(2.7) si $a \in \Gamma_1^m$, un changement de fonction χ modifie T_a^σ par une famille d'ordre $\leq m-1$;

(2.8) si $a \in \Gamma_1^m$, $(T_a^\sigma)^* - T_{\bar{a}}^\sigma$ est d'ordre $\leq m-1$;

(2.9) pour $a \in \Gamma_1^m$ et $b \in \Gamma_1^{m'}$, $T_a^\sigma \circ T_b^\sigma - T_{ab}^\sigma$ est d'ordre $\leq m+m'-1$;

(2.10) si $a \in \Gamma_1^m$ vérifie $\operatorname{Re} a(y,\eta,\sigma) \geq \delta(\sigma^2+|\eta|^2)^{m/2}$ pour un $\delta > 0$, alors pour tout $\delta' < \delta$, il existe σ_0 tel que :

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ \forall \sigma \geq \sigma_0\ :\ \operatorname{Re}(T_a^\sigma u,u)_{L^2} \geq \delta' \|u\|^2_{m/2,\sigma}\ .$$

En outre, dans ces énoncés, les familles d'opérateurs considérées dépendent continûment de a (et b) dans Γ_0^m ou Γ_1^m, c'est-à-dire que dans les inégalités de type (2.5) sous-entendues, les constantes C ne dépendent que d'un nombre fini des C_α qui interviennent en (2.1) ou (2.2). Il en est de même de la constante σ_0 de (2.10).

Les fonctions $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $a \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n)$ sont des cas (très) particuliers de symboles de degré 0. Les opérateurs T_a^σ sont alors appelés opérateurs de paraproduit par a, et on peut les comparer aux véritables opérateurs de produit :

(2.11) Si $a \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n)$, les opérateurs $\sigma(a.-T_a^\sigma)$ et $(a-T_a^\sigma)\partial_{x_j}$ sont uniformément bornés sur L^2 avec une norme majorée par Constante $.\ \|a\|_{\mathrm{Lip}}$.

Lorsque $\sigma = 1$, cela résulte après un certain nombre de manipulations faciles, du fait que, pour $f \in L^2$ et $g \in L^\infty$, le paraproduit $T_f g \in L^2$ (voir R. Coiffman - Y. Meyer [3]). La preuve s'étend au cas "à paramètre".

3. INÉGALITÉS L^2

Revenons au système (1.1) (1.4) autour de $(0,u^0)$. Nous pouvons supposer que $u^0 = 0$, et que les coefficients A_j, F et ϕ sont définis sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^N$. On écrit

(3.1) $$\phi(t,x,u) = \phi(t,x,0) + B(t,x,u)u\ .$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $\phi(t,x,0) \in C_0^\infty$, que A_j, F et B sont constants en dehors d'un (petit) voisinage de 0, et que les hypothèses (1.2) (1.3) et (1.6) sont satisfaites en tout point $(t^0,x^0,u^0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^N$. Sous ces hypothèses, on peut construire des symétriseurs de Kreiss [8] (cf. J. Chazarain - A. Piriou [2]) : ce sont des matrices de taille $N \times N$, $R(t,x,u,\tau,\xi',\sigma)$ telles que :

(3.2) R est une fonction C^∞ de ses arguments, homogène de degré 0 en (τ,ξ',σ) pour $|\tau| + |\xi'| + \sigma > 0$, $\sigma \geq 0$.

(3.3) R est hermitienne.

(3.4) Il existe λ tel que $R + \lambda B^*B$ soit définie positive.

(3.5) On peut écrire $\frac{1}{i}(RM - M^*R) = \sum_{j=1}^{J} P_j^* H_j P_j$. Les P_j étant C^∞ homogènes de degré 0 , les H_j de la forme

$$H_j = \left(\begin{array}{c|c} H_j^1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma H_j^0 \end{array}\right)$$

avec des matrices H_j^ℓ , C^∞ de leurs arguments, homogènes de degré ℓ , hermitiennes et définies positives. En outre $\Sigma P_j^* P_j$ est elle aussi définie positive.

Dans (3.4), B désigne la matrice $B(t,x,u)$; dans (3.5), $M = A_n^{-1}((\tau - i\sigma)\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j)$, les A_j étant évaluées en (t,x,u) . On peut aussi supposer les matrices R , P_j et H_j indépendantes de (t,x,u) pour (t,x,u) hors d'un compact.

Etant donnée une fonction $a(t,x)$, on note $L(a)$ l'opérateur $\partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,a(t,x))\partial_{x_j}$ et $B(a)$ la matrice $B(t,x,a(t,x))$. On s'intéresse alors au problème :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} L(a)u = f & \text{dans } x_n > 0 \\ B(a)u = g & \text{sur } x_n = 0 \, . \end{cases}$$

Pour ce problème, l'estimation de base est la suivante :

Lemme 3.1.- *Etant donné* $K > 0$, *il existe* C_0 *et* σ_0 *tels que, pour tout* $a \in \mathrm{Lip}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ *de norme* $\leq K$, *pour tout* $\sigma \geq \sigma_0$ *et tout* $u \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$, *on a*

$$(3.7) \qquad \sigma\|u\|^2_{L^2_\sigma} + |u|^2_{L^2_\sigma} \leq C_0\left\{\frac{1}{\sigma}\|L(a)u\|^2_{L^2_\sigma} + |B(a)u|^2_{L^2_\sigma}\right\} .$$

Dans (3.7) $\|u\|_{L^2_\sigma}$ [resp. $|u|_{L^2_\sigma}$] désigne la norme de $e^{-\sigma t}u$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ [resp. de $e^{-\sigma t}u_{|x_n=0}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$].

<u>Schéma de la preuve</u> : notons m , b , r , p_j , h_j les fonctions de (t,x,τ,ξ',σ) déduites de M , B , R , P_j , H_j en substituant $a(t,x)$ à la variable u . Posons $v = e^{-\sigma t}u$ et $L^\sigma = D_{x_n} + m(t,x,D_t,D_{x'},\sigma)$. Il est immédiat que (3.7) équivaut à

$$(3.8) \qquad \sigma\|v\|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2} \leq C_0\left\{\frac{1}{\sigma}\|L^\sigma v\|^2_{L^2} + |bv|^2_{L^2}\right\} .$$

On utilise alors le calcul paradifférentiel du § 2 dans les variables $y = (t,x') = (t,x_1,\ldots,x_{n-1})$, x_n étant considéré comme paramètre. Dosons

$\tilde{L}^\sigma = D_{x_n} + T_m^\sigma$; alors la propriété (2.11) montre que (3.8) résulte d'estimations :

$$\sigma\|v\|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2} \le C_1\left\{\frac{1}{\sigma}\|\tilde{L}^\sigma v\|^2_{L^2} + |T_b^\sigma v|^2_{L^2}\right\} . \tag{3.9}$$

Maintenant, (3.9) s'obtient comme dans le cas pseudodifférentiel : posant $S = T_r^\sigma + (T_r^\sigma)^*$ on estime $\operatorname{Im}(S\tilde{L}^\sigma v\,,\, v)_{L^2}$. D'une part, on écrit que

$$\operatorname{Im}\Big(SD_{x_n}v,v\Big)_{L^2} = \operatorname{Im}\Big(T^\sigma_{D_{x_n}r}v,v\Big)_{L^2} + \operatorname{Re}\Big(T_r^\sigma v\big|_{x_n=0}, v\big|_{x_n=0}\Big)_{L^2} .$$

Avec (3.4) (2.10) et (2.6), on en déduit que pour σ assez grand :

$$\operatorname{Im}\Big(SD_{x_n}v,v\Big)_{L^2} \ge C\,|v|^2_{L^2} - \lambda'|T_b^\sigma v|^2_{L^2} - 0\Big(\|a\|_{\mathrm{Lip}}\,\|v\|^2_{L^2}\Big) . \tag{3.10}$$

D'autre part, le calcul symbolique et la propriété (3.5) montrent que :

$$\operatorname{Im}\Big(ST_m^\sigma v,v\Big)_{L^2} = \operatorname{Re}\sum_j \Big(T^\sigma_{h_j}\, T^\sigma_{p_j}v\,,\, T^\sigma_{p_j}v\Big)_{L^2} + 0\Big(\|a\|_{\mathrm{Lip}}\,\|v\|^2_{L^2}\Big)$$

La forme des H_j , et une utilisation répétée de l'inégalité de Gärding (3.5) permettent de conclure que

$$\operatorname{Im}\Big(ST_m^\sigma v,v\Big)_{L^2} \ge c_1\,\sigma\|v\|^2_{L^2} \tag{3.11}$$

avec $c > 0$, pourvu que σ soit assez grand. Maintenant l'estimation (3.9) résulte facilement de (3.10) (3.11) et le lemme est démontré. ■

Introduisons maintenant une notation : $\tilde{\Omega}$ désignera l'ouvert :

$$\tilde{\Omega} = \{(t,x)\ /\ -T_0 < t < T_0 - \rho|x|\} \tag{3.12}$$

et pour $|T| < T_0$, on note $\Omega_T = \tilde{\Omega} \cap \{x_n > 0\ ,\ t < T\}$, $b\Omega_T = \tilde{\Omega} \cap \{x_n = 0\ ,\ t < T\}$.

On peut alors choisir $\rho > 0$ assez petit, de sorte que pour T_0 , T_1 , T_2 fixés vérifiant $-T_0 < T_1 < T_2 < T_0$, on ait :

Lemme 3.2.- *Etant donné* K , *il existe* C_1 , σ_1 *tels que, pour tout* $T \in\ ]T_1,T_2]$, *toute fonction* $a \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}_T)$ *de norme* $\le K$, *tout* $f \in L^2(\Omega_T)$, $g \in L^2(b\Omega_T)$, *toute solution* $v \in H^0(\Omega_{T_1})$ *de* (3.6) *se prolonge de manière unique en une solution* $u \in H^0(\Omega_T)$ *et pour* $\sigma \ge \sigma_1$, *on a*

$$\begin{aligned}\sigma\|u\|^2_{L^2_\sigma(\Omega_T)} + |u|^2_{L^2_\sigma(b\Omega_T)} \le C_1\Big\{\frac{1}{\sigma}\|f\|^2_{L^2_\sigma(\Omega_T)} &+ |g|^2_{L^2_\sigma(b\Omega_T)} \\ &+ \sigma\|v\|^2_{L^2_\sigma(\Omega_{T_1})} + |v|^2_{L^2_\sigma(b\Omega_{T_1})}\Big\} .\end{aligned} \tag{3.13}$$

En effet, le problème adjoint de (3.6) vérifie la condition de Lopatinski uniforme rétrograde et donc des inégalités (3.7) dans les espaces $L^2_{-\sigma}$. On en déduit un théorème d'existence de solutions faibles pour le problème (3.6). Il est classique que les solutions obtenues sont en fait fortes et vérifient (3.7). Suivant le schéma habituel (*cf.* [2]), on montre ensuite l'unicité locale et la vitesse finie de propagation, d'où résulte le lemme 3.2 lorsque $v = 0$. Lorsque $v \neq 0$, on cherche u sous la forme $\chi v + w$, où $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ vaut 0 pour $t \geq T_1$ et 1 pour $t < T_1' = \frac{T_1 - T_0}{2}$, et où w est solution de

$$L(a)w = (1-\chi)f - (\partial_t \chi)v \quad ; \quad B(a)w_{|x_n=0} = (1-\chi)g \quad ; \quad w_{|t<T_1'} = 0 .$$

L'unicité locale montre que $w = (1-\chi)v$ pour $t < T_1$, et $\chi v + w$ est bien une solution de (3.6) qui prolonge v.

4. EXISTENCE LOCALE

Rappelons que μ est un entier $> \frac{n+3}{2}$. H^μ est muni des normes (cf. (2.4)) :

$$\|u\|_{\mu,\sigma} = \Big\{ \sum_{|\alpha|\leq\mu} \sigma^{2(\mu-|\alpha|)} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2} \Big\}^{1/2} \tag{4.1}$$

et l'espace $H^\mu_\sigma = e^{-\sigma t} H^\mu$ de la norme $\|u\|_{H^\mu_\sigma} = \|e^{-\sigma t}u\|_{\mu,\sigma}$. On définit de même les normes $|\ |_{\mu,\sigma}$ et $|\ |_{H^\mu_\sigma}$ pour les fonctions définies sur le bord $\{x_n = 0\}$.

On vérifie facilement que, pour $\sigma \geq 1$, on a :

$$\sigma^k \|e^{-\sigma t}\partial^\alpha u\|_{H^\ell} \leq \sigma^k \|e^{-\sigma t}\partial^\alpha u\|_{\ell,\sigma} \leq \|u\|_{H^{\ell+k+|\alpha|}_\sigma}$$

et en utilisant le fait que la multiplication est continue de $H^\lambda \times H^\nu$ dans L^2 pour $\lambda \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\lambda + \nu > (n+1)/2$, on voit que pour $|\alpha| \leq \mu$:

$$\sigma^{\mu-|\alpha|} \|\partial^\alpha (a\,\partial_{x_j} u) - a\,\partial_{x_j}\partial^\alpha u\|_{L^2_\sigma} \leq C\,\|a\|_{H^\mu} \cdot \|u\|_{H^\mu_\sigma} . \tag{4.2}$$

De même, sur le bord $\{x_n = 0\}$ on a :

$$\sigma^{\mu-|\alpha|} |\partial^\alpha(au) - a\partial^\alpha u|_{L_\sigma} \leq C|a|_{H^\mu}|u|_{H^{\mu-1}_\sigma} \leq \frac{C}{\sigma}\,|a|_{H^\mu}|\ |_{H^\mu_\sigma} . \tag{4.3}$$

Ces estimations permettent de contrôler les commutateurs $[\partial^\alpha, L(a)]$ et $[\partial^\alpha, B(a)]$; suivant le schéma habituel, en dérivant le système (3.6) tangentiellement puis en estimant les dérivées normales grâce à l'équation, on obtient, avec les mêmes notations qu'au lemme 3.2 :

Lemme 4.1.- *Etant donné* K, *il existe* C_2 *et* σ_2 *tels que pour tout* $T \in]T_1, T_2]$, *tout* $a \in H^\mu(\Omega_T)$ *de norme* $\leq K$, *tout* $f \in H^\mu(\Omega_T)$, $g \in H^\mu(b\Omega_T)$ *et* $v \in H^\mu(\Omega_{T_1})$ *solution de* (3.6), *la solution* u *qui prolonge* v *appartient à* $H^\mu(\Omega_T)$ *et pour* $\sigma \geq \sigma_2$ *on a :*

$$\sigma\|u\|^2_{H^\mu_\sigma(\Omega_T)} + |u|^2_{H^\mu_\sigma(b\Omega_T)} \leq C_2 \Big\{ \frac{1}{\sigma}\|f\|^2_{H^\mu_\sigma(\Omega_T)} + |g|^2_{H^\mu_\sigma(b\Omega_T)} + \sigma\|u\|^2_{H^\mu_\sigma(\Omega_{T_1})} + |v|^2_{H^\mu_\sigma(b\Omega_{T_1})} \Big\} . \tag{4.4}$$

Venons-en maintenant à la preuve du théorème 1. Avec les notations du § 3, il nous faut résoudre :

(4.5) $L(u)u = F(t,x,u)$ dans $x_n > 0$; $B(u)u = g$ pour $x_n = 0$,

(4.6) $$u|_{t<0} = v ,$$

où $g(t,x) = -\Phi(t,x,0)$ vérifie $g(0) = 0$, et v est une solution donnée de (4.5) dans H^μ pour $t < 0$, telle que $v(0) = 0$.

Pour $\delta \in]0,1]$, on introduit $v_\delta(t,x) = v(\delta t,\delta x)$, $g_\delta(t,x) = g(\delta t,\delta x)$ les opérateurs $L_\delta(a) = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(\delta t,\delta x,a)\partial_{x_j}$, $B_\delta(a) = B(\delta t,\delta x,a)$, et $F_\delta(t,x,u) = F(\delta t,\delta x, u)$. Pour résoudre (4.5) (4.6) au voisinage de 0 , il suffit de résoudre

(4.7) $$\begin{cases} L_\delta(u)u = \delta F_\delta(t,x,u) & \text{dans } x_n > 0 \\ B_\delta(u)u = g_\delta & \text{pour } x_n = 0 \\ u|_{t<0} = v_\delta . \end{cases}$$

Soit $\tilde{v}$ une extension H^μ de v ; partant de $u^o = \tilde{v}_\delta$ on considère alors pour $\nu \geq 0$ le schéma itératif suivant :

(4.8) $$\begin{cases} L_\delta(u^\nu)u^{\nu+1} = \delta F_\delta(t,x,u^\nu) \\ B_\delta(u^\nu)u^{\nu+1}|_{x_n=0} = g_\delta \\ u^{\nu+1}|_{t<0} = v_\delta \end{cases}$$

On remarque alors que l'on peut choisir un ouvert $\tilde{\Omega}$ (3.12) indépendant de δ , tel que les lemmes 3.2 et 4.1 s'appliquent aux opérateurs (L_δ,B_δ) sur ce même ouvert, avec des constantes C_2 , σ_2 indépendantes de δ . On peut alors affirmer que (4.8) définit une suite u^ν ; fixant $T \in]0,T_o[$ et posant $\Omega_1 = \Omega_{T_1}$, le théorème 1 résulte alors des deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.- *Si* δ *est petit, la suite* u^ν *est bornée dans* $H^\mu(\Omega_1)$.

Lemme 4.3.- *Si* δ *est petit, la suite* u^ν *converge dans* $L^2(\Omega_1)$.

Preuve du lemme 4.2. : $\tilde{v}$ est lipschitzienne et $v(0) = 0$; donc $\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2(\Omega_1)}$ et $|\tilde{v}_\delta|_{L^2(b\Omega_1)}$ sont en $0(\delta)$. En outre $\|\partial^\alpha v_\delta\|_{L^2(\Omega_1)}$ est $0(\delta^{|\alpha|-(M+1)/2}) = 0(\delta)$ lorsque $|\alpha| = \mu$. Finalement on voit que

(4.9) $$\|v_\delta\|_{H^\mu(\Omega_1)} \; ; \; |g_\delta|_{H^\mu(b\Omega_1)} = 0(\delta) .$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$, et montrons que si δ est assez petit, on a

(4.10) $$\|u^\nu\|_{H^\mu(\Omega_1)} \leq \varepsilon .$$

En effet, on peut supposer (4.10) vraie pour $\nu = 0$. Si (4.10) a lieu, alors $\|F_\delta(.,u)\|_{H^\mu(\Omega_1)}$ est majorée par une constante C_3 qui ne dépend que de ε . On applique alors le lemme 4.1 avec un σ fixé ($\sigma = \sigma_2$) et compte tenu de (4.9), on voit que :

$$\|u^{\nu+1}\|_{H^\mu(\Omega_1)} \leq C_2'\{\delta C_3 + 0(\delta)\}$$

où C_2' et C_3 ne dépendent que de ε . Le lemme en résulte.□

Preuve du lemme 4.3. : si (4.10) a lieu, alors $\|u^\nu\|_{L^\infty}$ et $\|\operatorname{grad} u^\nu\|_{L^\infty}$ sont en $0(\varepsilon)$. On écrit que $w^\nu = u^{\nu+1} - u^\nu$ est solution de :

$$(4.11) \qquad \begin{cases} L(u^\nu)w^\nu = \delta\, F(u^\nu) - F(u^{\nu-1}) + (L(u^{\nu-1}) - L(u^\nu))u^\nu = f_\nu \\ B(u^\nu)w^\nu = (B(u^{\nu-1}) - B(u^\nu))u^\nu = g_\nu \\ w^\nu\big|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\|f_\nu\|_{L^2(\Omega_1)} \leq 0(\delta + \varepsilon)\ \|w^{\nu-1}\|_{L^2(\Omega_1)}$$

$$|g_\nu|_{L^2(b\Omega_1)} \leq 0(\varepsilon)\ |w^{\nu-1}|_{L^2(b\Omega_1)} .$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.2 pour obtenir :

$$\|w^\nu\|_{L^2(\Omega_1)} + |w^\nu|_{L^2(b\Omega_1)} \leq 0(\delta + \varepsilon)\ \left\{\|w^{\nu-1}\|_{L^2(\Omega_1)} + |w^{\nu-1}|_{L^2(b\Omega_1)}\right\}$$

et le lemme 4.3 suit en prenant ε puis δ assez petit. ■

5. PREUVE DU THÉORÈME 3

$\tilde{\Omega}$ étant de la forme (3.12), on se donne une solution u de (1.1)(1.4) lipschitzienne sur $\bar{\Omega}$, nulle en 0 , et on suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, $u \in H^\mu(\Omega_{-\varepsilon})$. Le théorème 3 résulte alors du fait suivant :

Lemme 5.1.- *Les normes* $\|u\|_{H^\mu(\Omega_{-\varepsilon})}$ *sont bornées en* $\varepsilon > 0$.

La preuve de ce lemme est essentiellement similaire à celle du lemme 4.1, mais utilise des estimations plus fines que (4.2)(4.3), basées sur des inégalités de Gagliardo-Nirenberg à poids.

Lemme 5.2.- *Si* $v \in L^\infty \cap H^\mu_\sigma(\mathbb{R}^{n+1})$, alors pour $|\alpha| \leq k \leq \mu$, *on a*

$$(5.1) \qquad \sigma^{k-|\alpha|}\ \|e^{-(k/\mu)\sigma t}\partial^\alpha v\|_{L^{2\mu/k}} \leq C\|v\|_{L^\infty}^{1-k/\mu}\|v\|_{H^\mu_\sigma}^{k/\mu}$$

Lorsque $v \in L^\infty \cap H^\mu_\sigma(\Omega_{-\varepsilon})$ est nulle pour $t < T_1$, il n'est pas difficile de construire un prolongement $\tilde{v} \in L^\infty \cap H^\mu_\sigma(\mathbb{R}^{n+1})$ nul lui aussi pour $t < T_1$. Il en résulte que (5.1) est encore vrai pour de tels v , sur $\Omega_{-\varepsilon}$, avec une constante C indépendante de ε . Introduisant ensuite une fonction de troncature en t , on obtient :

Lemme 5.3.- *Soit* F *une fonction* C^∞ *de ses arguments. Alors pour* $|\alpha| \le k \le \mu$, *on a* :

(5.2) $$\sigma^{k-|\alpha|}\, \| e^{-(k/\mu)\sigma t}\, \partial^\alpha F(u)\|_{L^{2\mu/k}(\Omega_{-\varepsilon})} \le C_1(\sigma) + C_2 \|u\|^{k/\mu}_{H^{k/\mu}(\Omega_{-\varepsilon})}$$

où C_1 *et* C_2 *dépendent de* $\|u\|_{L^\infty(\Omega_0)}$, $\|u\|_{H^\mu(\Omega_{T_1})}$, *mais sont indépendantes de* $\varepsilon \in]0,-T[$; *en outre* C_2 *ne dépend pas de* σ .

Puisque u est supposée lipschitzienne sur $\bar{\Omega}_0$, les coefficients $a = A_j(t,x,u)$ sont estimés dans H^μ_σ par le lemme 5.3 ; en outre, leurs dérivées premières sont L^∞ et estimées dans $H^{\mu-1}_\sigma$. Utilisant aussi le fait que $\partial_{x_j} u \in L^\infty \cap H^{\mu-1}_\sigma$, on obtient les estimations :

(5.3) $$\sigma^{\mu-|\alpha|}\, \|\partial^\alpha (A_j(u)\partial_{x_j} u) - A_j(u)\partial_{x_j}\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega_{-\varepsilon})} \le C_1(\sigma) + C_2\|u\|_{H^\mu_\sigma(\Omega_{-\varepsilon})}$$

avec C_1 et C_2 comme dans le lemme 5.3. De même, sur le bord, on a :

(5.4) $$\sigma^{\mu-|\alpha|}\, |\partial^\alpha(\phi(u)) - \phi'(u)\partial^\alpha u|_{L^2_\sigma(b\Omega_{-\varepsilon})} \le C'_1(\sigma) + C'_2|u|_{H^{\mu-1}_\sigma(b\Omega_{-\varepsilon})} .$$

On peut maintenant supposer $\tilde{\Omega}$ assez petit pour que le lemme 3.2 soit applicable au problème

$$\begin{cases} L(u)w = f \\ \phi'(u)w = g . \end{cases}$$

Dérivant tangentiellement (1.1)(1.4), puis estimant les dérivées normales par l'équation, on tire finalement de (5.3)(5.4) et du lemme 3.1, que pour assez grand :

(5.5) $$\|u\|_{H^\mu_\sigma(\Omega_{-\varepsilon})} \le C''_1(\sigma) + \frac{1}{\sigma} C''_2\, \|u\|_{H^\mu_\sigma(\Omega_{-\varepsilon})}$$

où $\|u\|_{H^\mu}$ désigne $(\sigma\|u\|^2_{H^\mu_\sigma} + |u|_{H^\mu_\sigma})^{1/2}$, C''_1 et C'_2 dépendent de $\|u\|_{\mathrm{Lip}(\Omega_0)}$ et $\|u\|_{H^\mu(\Omega_1)}$ mais sont indépendantes de $\varepsilon > 0$. En outre C''_2 ne dépend pas de σ , et le lemme 5.1 résulte immédiatement de (5.5).

PARTIE II : CHOCS UNIFORMÉMENT STABLES

6. CHOCS PLANS

Considérons un système de lois de conservation

(6.1) $$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f_j(u) = 0$$

où les f_j sont des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. On suppose pour simplifier que ce système est strictement hyperbolique et on notera $\lambda_k(u,\xi)$ les valeurs propres (réelles et distinctes) de $\sum_{j=1}^{n} \xi_j f'_j(u)$; $r_k(u,\xi)$ désignera un vecteur propre associé.

Considérons alors l'exemple le plus simple de discontinuité :

(6.2) $$u(t,x) = u^{\pm} \quad \text{pour} \quad \pm\, \nu \,.\, x > \sigma t$$

où $u^+ \neq u^-$ sont deux constantes, $(\sigma,\nu) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. Alors u est solution (au sens distribution) de (6.1), si et seulement si

(6.3) $$\sigma(u^+ - u^-) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j (f_j(u^+) - f_j(u^-)) \;.$$

Quant à l'existence de telles solutions, rappelons le lemme suivant (Lax [9]).

Lemme 6.1.- *Il existe au voisinage de* $(u^o, u^o, \nu^o, \lambda_k(u^o,\nu^o))$ *une variété de codimension* N *de solutions de* (6.3) *qu'on peut paramétrer par*

(6.4) $$\begin{cases} u^+ = u^- + \varepsilon\, r_k(u^-,\nu) + 0(\varepsilon^2) \\ \sigma \;= \lambda_k(u^-,\nu) + \frac{1}{2}\varepsilon\, r_k(u^-,\nu) \,.\, \mathrm{grad}_u\, \lambda_k(u^-,\nu) + 0(\varepsilon^2) \;. \end{cases}$$

Lorsque la valeur propre λ_k est vraiment non linéaire (i.e. $r_k \,.\, \mathrm{grad}_u \lambda_k \neq 0$) et après la normalisation $\sigma_k \,.\, \mathrm{grad}_u\, \lambda_k = 1$, on voit que pour ε assez petit, la condition $\varepsilon < 0$ équivaut à :

(6.5) $$\begin{cases} \lambda_k(u^+,\nu) < \sigma < \lambda_k(u^-,\nu) \\ \lambda_{k-1}(u^-,\nu) < \sigma < \lambda_{k+1}(u^+,\nu) \end{cases}$$

(les valeurs propres étant rangées en ordre croissant). Dans ce cas, Lax [10] a aussi montré que (6.5) équivaut à toutes les conditions d'entropie raisonnables. Plus généralement, suivant Lax, on pose :

DÉFINITION 6.2.- *La solution* u (6.2), *vérifiant* (6.3), *est un* k-*choc si et seulement si la condition* (6.5) *est satisfaite.*

Remarque 6.3.- Lorsque λ_k est vraiment non linéaire et que $\varepsilon > 0$ dans (6.4), la solution obtenue est violemment instable. Lorsque λ_k est linéairement dégénérée ($r_k \,.\, \mathrm{grad}_u\, \lambda_k \equiv 0$) , alors on a pour la solution (6.4)
$\lambda_k(u^+,\nu) = \lambda_k(u^-,\nu) = \sigma$; on est en présence d'une discontinuité de contact.

7. CHOCS MULTIDIMENSIONNELS

Soit Σ une surface (localement) d'équation $x_n = \phi(t,x')$. Soit u une fonction régulière de part et d'autre de Σ ; on appelle u^+ [resp. u^-] sa restriction à $x_n > \phi(t,x')$ [resp. $x_n < \phi(t,x')$]. Alors est solution faible de (6.1) si et seulement si u^+ et u^- sont solutions régulières et vérifient la condition de saut :

(7.1) $$\frac{\partial\phi}{\partial t}\,[u] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,[f_j(u)] = [f_n(u)]$$

où $[v] = v^+ - v^-$ désigne le saut de la fonction v le long de Σ .

Suivant la définition 6.2, on dit que u est un k-choc si les conditions (6.5) sont satisfaites sur Σ, avec $\sigma = \partial_t \phi$, $\nu = (-d_x, \phi, 1)$.

Les inconnues du problèmes sont donc u^+, u^- et ϕ. Comme il est classique dans les problèmes à frontière libre, on fixe la frontière en effectuant, pour $u^{\pm}$, le changement de variables $\tilde{x}_n = \pm(x_n - \phi(t,x'))$. Posant $A_j(v) = f'_j(v)$, $A_n(v,d\phi) = A_n(v) - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j} \phi A_j(v) - \partial_t \phi \,\mathrm{Id}$, on obtient les équations :

$$(7.2) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^{\pm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(\tilde{u}^{\pm})\, \partial_{x_j} \tilde{u}^{\pm} \pm A_n(\tilde{u}^{\pm}, d\phi)\, \partial_{\tilde{x}_n} \tilde{u}^{\pm} = 0 & \text{dans } \tilde{x}_n > 0 \\ \partial_t \phi [\tilde{u}] + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j} \phi\, [f_j(\tilde{u})] - [f_n(\tilde{u})] = 0 & \text{sur } \tilde{x}_n = 0 \end{cases}$$

$[.]$ désignant maintenant le saut le long de $\{\tilde{x}_n = 0\}$.

Dans [13], A. Majda a montré l'existence de solutions régulières de (7.2) avec données de Cauchy (u_0, ϕ_0) sur $t = 0$. Bien entendu, il faut pour cela que les données satisfassent un certain nombre de conditions de compatibilité (cf. (1.8)). La première de ces conditions est que sur $\tilde{x}_n = 0$, il existe $\sigma(x')$ tel que :

$$(7.3) \qquad \sigma \,.\, [u_0] + \Sigma\, \partial_{x_j} \phi \,.\, [f_j(u_0)] - [f_n(u_0)] = 0 \,.$$

Le lemme 6.1 montre précisément comment on peut choisir des données qui vérifient cette condition. Les conditions d'ordre supérieur sont du même type (et linéaires en les dérivées maximales) et on construit de même les données qui les satisfont. On renvoie à [13] pour un énoncé précis. Dans la fin de l'exposé, nous allons seulement écrire ce qu'est la condition de Lopatinski uniforme pour le problème (7.2), et l'analogue des inégalités d'énergie (3.7).

8. STABILITÉ UNIFORME

Majda considère la linéarisation suivante du problème (7.2), analogue à celle du problème mixte introduite au § 3 :

$$(8.1) \quad \begin{cases} L^{\pm} v^{\pm} \equiv \partial_t v^{\pm} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{\pm}\, \partial_{x_j} v^{\pm} \pm A_n^{\pm}\, \partial_{x_n} v^{\pm} = f^{\pm} & \text{dans } x_n > 0 \\ G(v^+, v^-, d\psi) = b_0\, \partial_t \psi + \sum_{j=1}^{n-1} b_j\, \partial_{x_j} \psi - M(v^+, v^-) = g & \text{sur } x_n = 0 \,. \end{cases}$$

où $A_j^{\pm} = A_j(u^{\pm}, d\phi)$, $b_0 = [u]$, $b_j = [f_j(u)]$ et $M(v^+, v^-) = [A_n v]$.

Si on veut faire tourner un schéma itératif semblable à (4.8), et puisque u et $d\phi$ ont même importance dans les coefficients de $L^{\pm}$ et G, on voit qu'on a besoin d'estimations *a priori* qui donnent le même contrôle sur v et $d\psi$. Avec les notations antérieures, ce sont les suivantes :

(8.2) $$\sigma\|v\|^2_{L^2_\sigma} + |v|^2_{L^2_\sigma} + |\psi|^2_{H^1_\sigma} \le C\left\{\frac{1}{\sigma}\|f\|^2_{L^2_\sigma} + |g|^2_{L^2_\sigma}\right\} .$$

Maintenant le gain de $|d\psi|_{L^2}$ dans (8.2) montre que les conditions aux limites G doivent être elliptiques en ψ , c'est-à-dire que $b_0 , \dots , b_{n-1}$ doivent être linéairement indépendants. Ces conditions peuvent alors se réécrire sous la forme :

(8.3) $$d\psi = g_1 + N_1(v^+,v^-) \quad ; \quad N_2(v^+,v^-) = g_2 .$$

La première équation se partage entre des conditions sur $q_1 + N_1$ et une formule qui explicite ψ . Revenant aux conditions aux limites initiales et introduisant $\pi(t,x',\tau,\xi')$ le projecteur orthogonal sur $(\tau b_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j b_j)^\perp$, on voit que v est essentiellement solution d'un problème de la forme :

(8.4) $$\begin{aligned} &L^\pm v^\pm = f^\pm \\ &\pi(t,x',D_t,D_{x'})(M(v^+,v^-) + g) = 0 . \end{aligned}$$

Nous voulons pour ce problème les inégalités d'énergie (3.7), ce qui conduit à requérir la condition de Lopatinski uniforme pour (8.4). Pour cela, on fige les coefficients $(u^\pm,d\phi)$ de $(L^\pm,G)$ en un point $(u_0^\pm,\nu_0)$; on introduit les espaces $E^\pm(\tau,\xi')$, pour $\operatorname{Im} \tau < 0$, engendrés par les vecteurs propres de $\pm(A_n^\pm)^{-1}(\tau \,\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j^\pm)$ associés à des valeurs propres de partie imaginaire < 0 . La condition de Lopatinski s'écrit alors :

(8.5) pour tout $(\tau,\xi') \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}) \setminus 0$, $\operatorname{Im} \tau \le 0$, l'application $(\lambda,v^+,v^-) \longrightarrow \lambda(\tau b_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j b_j) - M(v^+,v^-)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C} \times E^+(\tau,\xi') \times E^-(\tau,\xi')$ sur $\mathbb{C}^N$.

En particulier, si les coefficients sont figés en $(u^\pm,d\phi)$ qui vérifient (7.1), et les conditions de choc, Majda introduit la terminologie de choc uniformément stable quand la condition (8.5) est satisfaite.

Ce que montre effectivement Majda, c'est que la condition (8.5) conduit bien aux inégalités (8.2), puis à l'aide d'un schéma itératif à l'existence de solutions régulières du problème (7.2).

Pour finir, faisons quelques remarques sur cette condition de stabilité uniforme des chocs :

1) en dimension $n = 1$ (cas bien connu par ailleurs), pour les chocs faibles ($|u^+ - u^-|$ petit), cette condition se réduit exactement à la condition de Lax (6.5) ;

2) en dimension $n = 2$, pour les systèmes 2×2 strictement hyperboliques, on a le même résultat ([15]) ;

3) cette condition s'explicite et est effectivement vérifiée dans des exemples physiques ! (A. Majda [12]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. BONY - *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. E.N.S., 14, (1981), pp. 209-246.

[2] J. CHAZARAIN - A. PIRIOU - *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[3] R. COIFMAN - Y. MEYER - *Au-delà des opérateurs pseudodifférentiels*, Astérisque 57 (1978).

[4] K.O. FRIEDRICHS - *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954), pp. 345-392.

[5] T. KATO - *The Cauchy problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 58 (1975), pp. 181-205.

[6] T. KATO - *Linear and quasilinear equations of evolution of hyperbolic type*, C.I.M.E. (1976).

[7] T. KATO - *Quasilinear equations of evolution with applications to partial differential equations*, Lectures Notes in Math., 448, Springer, 1975, pp. 25-70.

[8] H.O. KREISS - *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), pp. 277-298.

[9] P.D. LAX - *Hyperbolic systems of conservation laws, II*, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), pp. 537-566.

[10] P.D. LAX - *Shock waves and entropy ; contribution to non linear functional analysis*, Academic Press, New York (1971).

[11] P.D. LAX - R.S. PHILLIPS - *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp. 427-455.

[12] A. MAJDA - *The stability of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc., 275 (1983).

[13] A. MAJDA - *The existence of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc., 281 (1983).

[14] A. MAJDA - *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Applied Math. Sc. 53, Springer Verlag (1984).

[15] G. MÉTIVIER - *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation*, Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986), pp. 431-479.

[16] G. MÉTIVIER - *Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires*, Journées E.D.P. Saint-Jean-de-Monts, 1986.

[17] Y. MEYER - *Remarques sur un théorème de J.-M. Bony*, Supplemento al rendiconti del circolo matematico di Palermo, Série II, n° 1 (1981).

[18] Y. MEYER - *Nouvelles conditions pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Goulaouic - Schwartz, Ecole Polytechnique, année 1981-82.

[19] J. RAUCH - L^2 *is a continuable condition for Kreiss' mixed problems*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), pp. 221-232.

[20] J. RAUCH - F. MASSEY - *Differentiability of solutions of hyperbolic boundary value problems*, Trans. Amer. Math. Soc., 189 (1974), pp. 303-318.

[21] M. SABLE-TOUGERON - *Problème mixte avec condition de Neumann pour l'élastodynamique non linéaire*, preprint.

Guy MÉTIVIER

IRMAR
Université de Rennes 1
UER Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu
F-35042 RENNES CEDEX