CHRISTOPHE MARGERIN

Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 683, p. 263-283

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__263_0>

Séminaire BOURBAKI
39e année, 1986-87, n°683

Juin 1987

FIBRÉS STABLES ET MÉTRIQUES D'HERMITE-EINSTEIN
d'après [S.K. DONALDSON – K.K. UHLENBECK – S.T. YAU]

par Christophe MARGERIN

Table des Matières :

Sur un fibré holomorphe hermitien de rang r $(E, \bar\partial_0, H)$ au-dessus d'une variété kählérienne compacte de dimension (complexe) m, (V, ω), il existe une unique connexion compatible à la structure holomorphe $\bar\partial_0$ et à la métrique H. Elle est classiquement appelée *connexion de Chern* et on la notera ∇^H. Sa courbure est une 2-forme sur V à valeurs dans End E, le fibré des endomorphismes du fibré, qu'on écrira $F^H \in \Omega^2(V, \text{End } E)$. En prenant la trace de la courbure, en tant qu'endomorphisme du fibré, on définit la première forme de Chern, notée $c_1(E,H)$ et égale à $\frac{i}{2\pi} tr\ F^H$ (" $tr\ F$" représente donc la trace dans la fibre). Le *degré* du fibré hermitien (E,H) est alors donné par l'intégrale $\int_V c_1(E,H) \wedge *\omega$, où $*$ est l'opérateur de Hodge de (V,ω); on le représente par $\deg_\omega(E,H)$. Pour tout autre métrique H' sur E; il existe une fonction lisse φ satisfaisant $c_1(E,H) - c_1(E,H') = \partial\bar{\partial}\varphi$; ω étant fermée, on peut parler du degré de E pour la structure kählérienne $[\omega]$, indépendamment de la métrique hermitienne H. On écrira $\deg_{[\omega]} E$. Plus généralement, pour un sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de E, on définit $c_1(\mathcal{F})$ par $c_1(\det\mathcal{F})$; on rappelle à cet effet que tout sous-faisceau réflexif de rang 1 est un "vrai" fibré en droite (cf. $[O-S-S]$ p.154) et que, si r' est le rang de $\mathcal{F}$, le fibré déterminant, $\det\mathcal{F}$, est le faisceau réflexif de rang 1 $\left(\Lambda^{r'}\mathcal{F}\right)^{**}$. La *pente* d'un sous-faisceau cohérent est le rapport du degré par le rang; on la notera $\mu(\mathcal{F},[\omega])$, puisqu'elle ne dépend que du sous-faisceau $\mathcal{F}$ et de la structure kählérienne de la base (V,ω).

Définition 1. *Un fibré* $(E,\bar{\partial}_0)$ *est* $[\omega]$ -stable (semi-stable) *si pour tout sous-faisceau cohérent,* $\mathcal{F}$, *de rang strictement inférieur au rang de* E, $\mu(\mathcal{F},[\omega]) < \mu(E,[\omega])$ (*resp.* $\mu(\mathcal{F},[\omega]) \leq \mu(E,[\omega])$).

Cette définition a été introduite par D. Mumford qui a établi, dès 1962, l'existence d'un espace de modules quasi projectif pour les fibrés stables sur une courbe, de rang et de degré fixés. Plus tard (1977), l'énoncé a été généralisé par D. Gieseker et M. Maruyama à l'existence d'un espace de modules quasi projectif pour les fibrés stables de rang et de classes de Chern fixés, sur une variété algébrique projective de dimension arbitraire.

En prenant maintenant la trace de F^H par ω (on notera Λ cette opération de contraction sur la base) on définit *l'endomorphisme de Ricci*, $K^H = i\Lambda F^H$, section H-hermitienne de End E. Il a été introduit par S. Kobayashi pour formuler les hypothèses de théorèmes d'annulation.

Définition 2. *Une métrique hermitienne* H *est d'*Hermite-Einstein *si l'endomorphisme de Ricci* , K^H, *est un multiple constant de l'identité. La connection de Chern d'une métrique d'Hermite-Einstein est dite de* Yang-Mills-Einstein . *Un fibré holomorphe* E *est d'Hermite-Einstein s'il existe sur* E *une métrique d'Hermite-Einstein.*

En utilisant le théorème de D. Mumford, M.S. Narasimhan et C.S. Seshadri (cf. [N − S]) démontrèrent, dès 1965, que tout fibré holomorphe stable sur une surface de Riemann provient d'une représentation unitaire projective irréductible du groupe fondamental de la base. On voit facilement (cf. [A − B] paragraphe.6) que cet énoncé est équivalent à l'existence d'une métrique d'Hermite-Einstein sur tout fibré stable au-dessus d'une courbe compacte.

S'appuyant sur l'analogie étroite qui lie les propriétés des fibrés stables d'une part et des fibrés d'Hermite-Einstein de l'autre -comme l'inégalité

$$\left(2r\, c_2 - (r-1)c_1^2\right) \cup \omega^{n-2} \geq 0,$$

reliant les deux premières classes de Chern du fibré, (démontrée par F. Bogomolov en 1978 pour les fibrés stables sur une variété projective , cf. [Bo], et par M. Lübke, cf. [Lü1], en 1982, pour tout fibré d'Hermite-Einstein) - S. Kobayashi a été conduit à poser vers 1980 la conjecture suivante :

Conjecture. ***Tout fibré holomorphe sur une variété kählérienne compacte*** (V,ω), ***qui est*** $[\omega]$ ***-stable admet une métrique d'Hermite-Einstein.***

Cette conjecture est aussi attribuée à N.J. Hitchin. S'inspirant de [A – B], où M.F. Atiyah et R. Bott utilisent le théorème de Narasimhan et Seshadri pour calculer les groupes de cohomologie de l'espace de modules des fibrés stables - et qui peut être considéré comme le fondement des résultats dont nous allons parler - S.K. Donaldson proposa en 1983 une démonstration, plus directe que celle de M.S. Narasimhan et C.S. Seshadri, de la conjecture pour les courbes (cf. [D1]). En 1985, il établit la conjecture pour les surfaces algébriques, en en ramenant la démonstration au cas des courbes- modulo un théorème de V.B. Mehta et A. Ramanathan [M – R1], selon lequel un fibré sur une surface projective V est $[\omega]$ -stable si et seulement si les restrictions aux intersections génériques de V avec une hypersurface de degré assez grand, sont elles-mêmes $[\omega]$ -stables. Plus récemment, s'appuyant sur une généralisation du théorème de Mehta-Ramanathan ([M – R2]) en toute dimension, S.K. Donaldson a pu généraliser sa démonstration au cas des fibrés stables sur n'importe quelle variété algébrique ([D3]). Parallèlement, K.Uhlenbeck et S.T. Yau (cf. [U – Y]) ont proposé les grandes lignes d'une démonstration plus subtile, mais plus naturelle; ils se passent, par exemple, du théorème de Mehta-Ramanathan. Leur solution devrait répondre définitivement à la conjecture, puisque leur preuve s'applique à tout fibré stable sur n'importe quelle variété kählérienne compacte (en particulier, non-nécessairement algébrique projective).

I. LE THÉORÈME DE KOBAYASHI-LUBKE : LA RÉCIPROQUE DE LA CONJECTURE.

Commençons par remarquer que la conjecture admet la réciproque suivante :

Théorème 1. *([Ko] et [Lü2]) : Soit* (E,H) ***un fibré holomorphe hermitien sur une variété kählérienne compacte*** (V,ω) . ***Si*** H ***est une métrique d'Hermite-Einstein alors*** E ***est une somme directe orthogonale de sous-fibrés stables de même pente.***

La démonstration de cet énoncé s'appuie sur un théorème d'annulation dont la preuve se ramène à l'identité :

$$\Delta |s|^2 = 2i\Lambda\bar{\partial}\partial |s|^2 = -|\partial s|^2 + < Ks, s >,$$

valable pour toute section holomorphe s d'un fibré hermitien sur une base kählérien -ne ;

Lemme 2. *(S. Kobayashi - H. Wu) Si* $K^H < 0$ *alors* $(E, \bar{\partial}_0)$ *n'admet aucune section holomorphe non triviale ; si* $K^H = 0$ *, toute section holomorphe est parallèle.*

Si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau cohérent de rang r' du faisceau $\mathcal{E}$ des germes de sections de E, il lui est associé une section holomorphe non triviale de $\left(\Lambda^{r'}E \otimes (\det\mathcal{F})^*\right)$, fibré hermitien, d'Einstein pour la métrique produit de la métrique d'Hermite-Einstein induite par H sur $\Lambda^{r'}E$, et de la métrique d'Hermite-Einstein de $(\det\mathcal{F})^*$. (Tout fibré en droites sur une base kählérienne admet une telle métrique). En prenant la trace de l'identité $K = \mu \mathrm{Id}_E$, puis en l'intégrant sur V, on voit que $\mu = \frac{2\pi}{Vol(V)} \cdot \frac{\deg_{[\omega]} E}{r}$. Comme

$$\deg\left(\Lambda^{r'}E \otimes (\det\mathcal{F})^*\right) = \frac{r!}{(r-1)!(r-r')!}\left[\mu(E) - \mu(\mathcal{F})\right],$$

on déduit du lemme 2 que $\mu(E) \geq \mu(\mathcal{F})$, et qu'en cas d'égalité, le sous-fibré $\det\mathcal{F}$ est stable pour la dérivation covariante de $\Lambda^r E$; le faisceau $\mathcal{F}$ est alors associé à un sous-fibré holomorphe F de E. La connexion de Chern étant métrique, E admet la décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$. ∎

II. LE THÉORÈME DE NARASIMHAN-SESHADRI RELU PAR S.K. DONALDSON : Le cas de la dimension 1.

La preuve de la conjecture sur une courbe est aujourd'hui (presque) classique. Elle n'en reste pas moins une étape de la démonstration, (par récurrence sur la dimension), proposée par S.K. Donaldson dans le cas où la base est algébrique projective, mais de dimension quelconque. La preuve que nous donnons ici est dûe elle aussi à Donaldson : c'est la seule partie de l'exposé qui fasse directement référence à la théorie de Yang-Mills, une source d'inspiration commune à tous les pionniers (M.F. Atiyah, R. Bott, S.K. Donaldson, K. Uhlenbeck, S.T. Yau...) qui dépasse pourtant le cadre de cette démonstration. Cette preuve se fait par récurrence sur le rang du fibré, le cas $r = 1$ étant trivial (nous l'avons d'ailleurs déjà utilisé dans (I)). Notons $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$, le groupe de jauge complexe, c'est à dire l'espace des sections lisses du fibré des automorphismes C-linéaires de E et $\mathcal{A}$ l'espace des connexions C-linéaires sur E. Si, en plus de l'action "ordinaire" de $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$ sur $\mathcal{A}$, définie par : $(g,\nabla) \to \nabla^g = g\circ\nabla\circ g^{-1} = \nabla - d^\nabla g.g^{-1}$, on introduit une "nouvelle" action définie par $(g,\nabla) \to g(\nabla) = \nabla - \bar\partial^\nabla g.g^{-1} + (\bar\partial^\nabla g.g^{-1})^*$ - c'est à dire que l'image de ∇ par un élément g de $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$ pour la "nouvelle action" est la connexion H-métrique déterminée par sa composante $\bar\partial^{g(\nabla)} = g\circ\bar\partial^\nabla\circ g^{-1}$, donnée par l'action "ordinaire" de g - on voit que deux connexions définissent encore des structures holomorphes équivalentes si et seulement si elles appartiennent à la même orbite sous $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$. Par construction, la nouvelle action préserve de plus le sous-espace de $\mathcal{A}$ formé des connexions H-métriques.

On notera $\mathcal{O}(E)$, l'orbite sous $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$ de ∇^H. Nous remarquons tout de suite que s'il existe dans l'orbite de la connexion de Chern d'une métrique hermitienne H_0 d'un fibré holomorphe $(E,\bar\partial_0)$ une connexion de Yang-Mills-Einstein - que l'on notera donc $g\,(\nabla^{H_0})$- alors $H_0^{g^{-1}}$ (définie par $H_0^{g^{-1}}(u,v) = H_0(g.u,g.v)$) est une métrique d'Hermite-Einstein sur $(E,\bar\partial_0)$; ($\tilde\nabla$ représentant la connexion de Chern de la métrique $H_0^{g^{-1}}$ pour la structure holomorphe $\bar\partial_0$ de E, $\tilde\nabla^g = g\circ\tilde\nabla\circ g^{-1} = g(\nabla^{H_0})$. Mais $F^{\tilde\nabla^g} = g\circ F^{\tilde\nabla}\circ g^{-1}$, c'est à dire, $K^{\tilde\nabla} = g^{-1}\circ K^{\tilde\nabla^g}\circ g = \lambda.1d_E$).

A. La fonctionnelle et le théorème de compacité d'Uhlenbeck.

Pour des raisons techniques, (cf. lemme 6), on préfère à la fonctionnelle de Yang-Mills $\left(\nabla \to \|F^\nabla\|^2_{L^2}\right)$, la fonctionnelle $J(\nabla \to J(\nabla) = N\left(\frac{*F}{2i\pi} + \frac{\mu(E)}{VolV}.1d_E\right))$, où la norme N est définie par $N(s) = \int_V tr(s^*s)^{1/2}$ (s représente ici une section de End E). Nous notons que $J(\nabla) = 0$ si et seulement si ∇ est de Yang-Mills-Einstein.Nous avons alors la proposition capitale suivante :

Proposition 3. *Si l'infimum de $J_{|\mathcal{O}(E)}$ n'est pas atteint sur l'orbite $\mathcal{O}(E)$ il existe un fibré holomorphe F, de même degré et de même rang que E , non isomorphe à E , tel que* $\mathrm{Hom}(E,F) \neq 0$ *et que* $\inf J_{|\mathcal{O}(F)} \leq \mathrm{Inf}\, J_{|\mathcal{O}(E)}$,

dont la démonstration se ramène facilement au théorème de compacité d'Uhlenbeck :

Théorème 4. *([U]) Toute suite de connexions unitaires de courbures uniformément bornées dans L^2 admet, à changement de jauge près, une sous-suite faiblement convergente dans L^2_1.*

B. Le minimum est atteint dans l'orbite.

Dans l'étape suivante, on montre que l'infimum est nécessairement atteint sur l'orbite $\mathcal{O}(E)$, dès que E est stable. Si f est un morphisme non trivial de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, il est facile de construire la factorisation suivante de f

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{O} & \to & \mathcal{P} & \to & \mathcal{E} & \to & \mathcal{Q} & \to & \mathcal{O} \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ \mathcal{O} & \leftarrow & \mathcal{N} & \leftarrow & \mathcal{F} & \leftarrow & \mathcal{M} & \leftarrow & \mathcal{O} \end{array}$$

On pourra prendre $\mathcal{P} = \ker f$ *et* $\mathcal{N} = \text{Coker } f/\text{torsion}$; $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ sont alors clairement localement libres; de plus $rg\ Q = rg\ \mathcal{M}$ et $\deg \mathcal{Q} \leq \deg \mathcal{M}$. Le lemme suivant repose sur une manipulation d'algèbre linéaire (décomposition en blocs de la matrice de courbure) :

Lemme 5. *Si F est l'extension $\mathcal{O} \to \mathcal{M} \to \mathcal{F} \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ avec $\mu(\mathcal{M}) \geq \mu(\mathcal{F})$, alors pour toute connexion unitaire sur $\mathcal{F}$, ∇,*

$$J(\nabla) \geq rg\mathcal{M}\ (\mu(\mathcal{M}) - \mu(\mathcal{F})) + rg\mathcal{N}\ (\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{N})) = C_0,$$

tandis que :

Lemme 6. *Si on suppose la conjecture démontrée pour tout fibré sur une courbe compacte, de rang r', $r' < r$, et si E est l'extension $\mathcal{O} \to \mathcal{P} \to \mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{O}$, il existe une connexion ∇ sur E satisfaisant l'inégalité :*

$$J(\nabla) < rg\mathcal{P}\ (\mu(\mathcal{E}) - \mu(\mathcal{P})) + rgQ\ (\mu(Q) - \mu(\mathcal{E})) = C_1.$$

La démonstration de ce résultat est plus substantielle : on utilise la filtration semi-stable $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}_r \subset \dots \subset \mathcal{P}_k = \mathcal{P}$ du fibré holomorphe $\mathcal{P}$ (i.e. $\mathcal{P}_i/\mathcal{P}_{i-1}$ est semi-stable et $\mu(\mathcal{P}_i/\mathcal{P}_{i-1})$ est une fonction croissante -au sens large- de i) puis la filtration stable des fibrés semi-stables ainsi obtenus : $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_{i,1} \subset \dots \subset \mathcal{R}_{i,l_i} = \mathcal{P}_i/\mathcal{P}_{i-1}$. Par hypothèse de stabilité $\mu(\mathcal{R}_{ij}/\mathcal{R}_{i,j-1}) < \mu(E)$; comme $rg\ \mathcal{R}_{i,j}/\mathcal{R}_{i,j-1} < rg\ E$, c'est à $(\mathcal{R}_{i,j}/\mathcal{R}_{i,j-1})$ qu'on applique l'hypothèse de récurrence. ∎

C. Caractérisation variationnelle du minimum et unicité.

On conclut, par un calcul de la variation première de $J(\nabla)$ au voisinage du minimum ∇_0 de $J_{|\mathcal{O}(E)}$, que $*F^{\nabla_0} + 2\mu i\pi = 0$. Il n'est pas difficile, en utilisant un principe du maximum, d'établir enfin l'unicité de ∇_0.

III. LE THÉORÈME DE DONALDSON - LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE EN TOUTES DIMENSIONS DANS LE CADRE PROJECTIF.

On se propose de donner maintenant une démonstration de la conjecture dans le cas où la base est une variété algébrique projective de dimension quelconque. A l'équation $K^H - \lambda 1 d_E = 0$, on associe un champ de vecteurs $X(H)$ sur la variété de Fréchet des métriques hermitiennes (lisses) sur E, $\mathcal{M}$, défini par $X(H) = \theta^{-1}(-2(K^H - \lambda 1 d_E))$; on a noté θ l'identification canonique de $T_H\mathcal{M}$ avec l'espace des endomorphismes hermitiens de (E,H), $\mathcal{H}_H$: si $\mathcal{X} \in T_H\mathcal{M}$, on définit θ par $\mathcal{X}(u,v) = H(\theta(\mathcal{X})u,v)$.

On commence par construire une fonctionnelle, $\mathcal{D}$, sur $\mathcal{M}$ dont $(-X)$ est le gradient. Il "suffira", pour résoudre notre problème, de trouver sur $\mathcal{M}$ un point critique de $\mathcal{D}$. Pour cela on "intègre" le champ X- à partir d'une métrique quelconque H_0 dans $\mathcal{M}$- jusqu'à un minimum de $\mathcal{D}$, H_∞, qui, si on peut en établir l'existence, sera d'Hermite-Einstein.

A. Construction de la fonctionnelle à partir des classes caractéristiques secondaires.

A tout polynôme homogène de degré l, P, que l'on supposera sans restriction symétrique, on associe classiquement l'endomorphisme de Chern-Weil

$$\tilde{P} : \begin{pmatrix} \mathcal{M} \to & \Omega^{l,l}(V) \\ H \to & P(iF^H,...,iF^H) \end{pmatrix}.$$

L'application $\tilde{P}$ satisfait $\left(d^{\mathcal{M}}\tilde{P}\right)_H(\mathcal{X}) = i.l.\bar{\partial}\partial P\left(\theta(\mathcal{X}), iF^H,...,iF^H\right) = i\bar{\partial}\partial\Phi(\mathcal{X})$ où Φ est la 1-forme sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\Omega^{l-1,l-1}(V)$ définie par

$$\Phi = l.P(\theta(\mathcal{X}), iF^H,...,iF^H)$$

On vérifie que Φ est $d^{\mathcal{M}}$- fermée, modulo $\mathrm{Im}\partial \oplus \mathrm{Im}\bar{\partial}$. On obtient ainsi une section de $\Omega^{l-1,l-1}(V), R$, satisfaisant $d\ R = \Phi$, c'est à dire $i\bar{\partial}\partial d\ R = d\tilde{P}$. Par intégration le long d'un chemin quelconque de H à H_0 dans $\mathcal{M}$, on a alors $i\bar{\partial}\partial R(H,H_0) = \tilde{P}(H) - \tilde{P}(H_0)$. Notez que R n'est définie que modulo $\mathrm{Im}\partial \oplus \mathrm{Im}\bar{\partial}$; ω étant fermée, $\tilde{R}(H,H_0) = \int_V R(H,H_0) \wedge \frac{\omega^{m-l+1}}{(m-l+1)!}$ est cependant définie sans ambiguïté. Si $l = 1$, $P_1 = 2\pi c_1$; pour $l = 2$, $P_2 = 4\pi^2.\pi_1 = 4\pi^2\left(c_1^2 - 2c_2\right)$. Comme $d^{\mathcal{M}}R_1(\mathcal{X}) = \Phi(\mathcal{X}) = tr\theta(\mathcal{X}), \mathrm{grad}\tilde{R}_1 = \theta^{-1}(1d_E)$ (pour le produit scalaire $< \mathcal{X},\mathcal{Y} >= \int_V tr\theta(\mathcal{X}).\theta(\mathcal{Y})$). De même $d^{\mathcal{M}}R_2(\mathcal{X}) = 2\int_V tr(\theta(\mathcal{X}).iF^H) \wedge \frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}$ $= 2m\int_V tr(\theta(\mathcal{X}).K)$, c'est à dire $\mathrm{grad}\tilde{R}_2 = 2m\theta^{-1}(K)$.

Avec R_1 nous avons construit une *transgression* de la première forme de Chern $c_1(E,H)$, c'est à dire une fonction R_1 sur V vérifiant $i\bar{\partial}\partial R_1(H,H_0) = 2\pi(c_1(E,H) - c_1(E,H_0))$. De façon similaire, la 2-forme R_2,de type(1,1), qui vérifie $\bar{\partial}\partial R_2(H_1,H_0) = 4\pi^2(\pi_1(E,H) - \pi_1(E,H_0))$ est une transgression de la première forme de Pontryagin $\pi_1(E,H)$.Nous venons donc d'établir

Proposition 7. *Si la base du fibré, (V,ω), est kählérienne, l'intégrale*

$$\int_V (R_2(H,H_0) - 2\lambda R_1(H,H_0) \wedge \omega) \wedge \frac{\omega^{m-1}}{m!},$$

où $R_1(R_2)$ est une transgression de la première forme de Chern $c_1(E,H)$ (resp. de la première forme de Pontryagin $\pi_1(E,H)$), définit une fonctionnelle *sur $\mathcal{M}$ - notée $\mathcal{D}_\lambda(H_0, H)$- dont le gradient est précisément $2\,\theta^{-1}(K^H - \lambda 1d_E)$. $\mathcal{D}_\lambda$ satisfait de plus l'identité $\mathcal{D}_\lambda(H_0,H_1)+\mathcal{D}_\lambda(H_1,H_2) = \mathcal{D}_\lambda(H_0,H_2)$, pour tout triplet (H_0,H_1,H_2) de $\mathcal{M}$.*

B. Existence du flot et unicité.

On n'utilisera dans cette partie qu'une conséquence (faible) de l'hypothèse de stabilité, à savoir que toute section holomorphe de End E est un multiple constant de $1d_E$ (on dit dans ce cas que E est *simple*). Pour démontrer cette propriété élémentaire des fibrés stables, qui s'étend au cas où la base est kählérienne non-projective, considérons une section holomorphe non nulle de End E, s. Si le fibré, E, est stable, le rang de s est égal, en au moins un point de la base, au rang de E (puisque l'image est à la fois un sous-faisceau et un faisceau quotient). Le déterminant de s, fonction holomorphe sur une base compacte, est donc constant, (non nul); il en est de même des autres coefficients du polynôme caractéristique de s. Si λ en est une racine, $rg(s - \lambda 1d) < rgE$, et de notre première remarque nous déduisons que $s - \lambda 1d \equiv 0$. ∎

1) Unicité et normalisation.

Un calcul élémentaire établit la convexité de la fonctionnelle $\mathcal{D}_\lambda$ (ce n'est pas étonnant puisque $\mathcal{D}_\lambda$ est une "application-moment") :

Proposition 8. *Si $(E, \bar\partial_0)$ admet une métrique d'Hermite-Einstein, H_∞, pour toute autre métrique hermitienne H, (non homothétique à H_∞), $\mathcal{D}_\lambda(H, H_\infty) > 0$; en particulier il existe au plus une telle métrique sur E, minimum absolu de $\mathcal{D}_\lambda$.*

On se propose maintenant de "normaliser" le flot. A partir du calcul de la connexion de Chern et de la courbure d'une métrique $\tilde H = H.h$ (fonction de h, de sa connexion et de sa courbure), ainsi que de la théorie de Hodge scalaire on montre que,

Proposition 9. *Quitte à remplacer la condition initiale H_0 par une métrique conforme $H = e^\varphi.H_0$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)$, on peut supposer la courbure scalaire $u_t = tr\, K^{H_t}$ constante, (en $x \in V$ et $t \in \mathbf{R}$), le long du flot. Si on pose $H_t = H_0.h_t$ on pourra aussi supposer que $\det h_t = 1$, pourvu que $\lambda = \lambda_0 = \frac{2\pi\mu_{[\omega]}(E)}{Vol(V,\omega)}$.*

2) Existence locale du flot et unicité.

On est amené à intégrer l'équation (E) : $\frac{dH_t}{dt} = \theta^{-1}\left(-2(K_t - \lambda 1d_E)\right)$ que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned}\frac{dh_t}{dt} &= -2h_t(K_t - \lambda 1d)\\ &= -\Delta h_t - \{K_0 - \lambda 1d, h\} + 2i\Lambda\bar\partial h_t.h_t^{-1} \wedge \partial_0 h_t\end{aligned}$$

où $K_t = K^{H_t}$, $\Delta = i\Lambda(\bar{\partial}\partial - \partial\bar{\partial})$ est le "laplacien" de (End E, H_t), et où $\{\}$ représente l'anti-commutateur de End E.

Cette équation -non linéaire mais strictement parabolique - admet une solution locale d'après la théorie générale (on se ramène au théorème d'inversion locale dans les Banach - cf. [Ham]); autrement dit :

Proposition 10. *Pour toute métrique hermitienne H_0 sur un fibré holomorphe $(E, \bar{\partial}_0)$, il existe un réel $\varepsilon, \varepsilon > 0$, et une application lisse $H(t,x)$ définie sur $[0, \varepsilon) \times V$, solution de (E) , et coïncidant avec H_0 en $t = 0$.*

Pour établir l'unicité, en plus de la structure métrique usuelle ($d(H_1, H_1 e^k) = |k|^2$) de $\mathcal{M}_x \subset Gl(r, \mathbf{C})/U(r)$, il est commode d'introduire la quasi-distance

$$\tau\,(H_1, H_1.h) = tr\ h + tr\ h^{-1} - 2,$$

qui satisfait clairement les estimations $d^2 \leq \tau \leq 4r\ sh^2 \frac{d}{2}$. Si H_t^1 et H_t^2 sont alors deux solutions de (E) et si l'on pose $\tau_t = \tau\left(H_t^1, H_t^2\right)$, on établit l'inéquation d'évolution $\frac{\partial \tau_t}{\partial t} + \Delta \tau_t \leq 0$ (1). Du principe du maximum ordinaire pour les équations paraboliques nous déduisons.

Proposition 11. *Si H_t^1 et H_t^2 sont deux solutions de l'équation (E) sur $[0\ , T)$ et si $H_0^1 = H_0^2$ alors $H_t^1 = H_t^2$ sur $[0,\ T)$.*

3) Existence globale du flot.

En appliquant l'équation (1) à $\tau\,(H_t(x), H_{t+\delta}(x))$, où $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ et H_t est une solution de (E) sur $[O\ , T)$, on montre que (H_t) converge uniformément vers une limite continue H_T. Pour établir que H_T est lisse, il faut travailler plus : pour appliquer la théorie elliptique "ordinaire" (inégalités de Schauder), il faut d'abord borner H_t, en norme C^1, ainsi que la courbure pour toutes les normes C^k. (C'est la non-linéarité de l'équation qui rend nécessaires ces estimées a priori).

L'évolution de $|K_t|_t$ est régie par l'équation $\frac{\partial |K_t|_t^2}{\partial t} + \Delta\,|K_t|_t^2 = -2\,|\nabla K_t|_t \leq 0$, équation que satisfait aussi $\hat{K}_t = K_t - \lambda_0 1 d_E$. Le principe du maximum scalaire entraîne alors $\sup\limits_{t,x \in V} |K_t(x)|_t \leq \sup\limits_{x \in V} |K_0(x)|_0$. Nous venons donc de démontrer que :

Proposition 12. *La norme de l'endomorphisme de Ricci, $|K_t|_t$ est uniformément bornée le long d'une courbe intégrale.*

Pour obtenir la borne C^1, il n'est pas difficile - les H_t étant uniformément bornés et la base étant compacte - de se ramener au problème local d'une suite (h_i), définie sur la boule unitée de $\mathbf{C}^m$ et dont les gradients à l'origine divergent $\left(|\nabla h_i(0)| = \sup\limits_{B(0,1)} |\nabla h_i(x)| = m_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$. On remplace alors la suite divergente (h_i) par la suite "éclatée" $\left(\tilde{h}_i\right)$, définie sur $B(O,1)$ par $\tilde{h}_i(x) = h_i\left(\frac{x}{m_i}\right)$. La suite $\left(\tilde{h}_i\right)$ ainsi construite est maintenant bornée pour la topologie C^1 et vérifie $\left|\nabla\tilde{h}_i(0)\right| = 1$. Comme (h_i) converge uniformément vers H_T (topologie C^0) , il est clair que "l'écart" - i.e. la distance entre "sup $\tilde{h}_i$ " et "inf $\tilde{h}_i$ " tend vers 0. D'autre part, si l'on rappelle que $K_t = K_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h_t^{-1}\partial h_t\right)$, (2), on obtient comme corollaire de la proposition 12 que $\left|\tilde{h}_i\Delta\tilde{h}_i + i\Lambda\tilde{h}_i^{-1}\partial\tilde{h}_i\wedge\tilde{h}_i^{-1}\bar{\partial}\tilde{h}_i\right|$ est uniformément bornée. En particulier $\left|\Delta\tilde{h}_i\right|$ est bornée pour la topologie C^0, et donc L^p, pour tout $p > 0$. La théorie elliptique classique (inégalité de Schauder) entraîne alors que les $\tilde{h}_i$ sont bornés dans L_2^p; par les théorèmes d'inclusion de Sobolev, les $\tilde{h}_i$ sont donc bornées dans $C^{1,\alpha}$ dès que p est assez grand. On obtient la contradiction en considérant une limite des $\tilde{h}_i$ dans $C^1(B(O,1)), \tilde{h}_\infty$, application C^1, d'écart nul (donc constante) satisfaisant de plus $\left|\nabla\tilde{h}_\infty(0)\right| = 1$!

Les (H_t) étant bornées dans la topologie C^1, on obtient maintenant la borne L_2^p en raisonnant, comme précédemment sur les $\tilde{h}_i$, à partir de l'équation (2). On a ainsi établi :

Proposition 13. *Si H_t est une solution de (E) sur $[0\ ,T)$, $T < \infty$, alors H_t est uniformément bornée, pour la topologie C^1, comme pour les topologies L_2^p, $p > 0$. En particulier la courbure est bornée dans L^p.*

Pour ce qui est de la courbure, on peut établir les inéquations d'évolution suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}|F_t|_t^2 \qquad +\Delta|F_t|^2 \qquad \leq C\left(|F_t|^3 + |F_t|^2\right) \qquad (3),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla^k F_t\right|_t^2 \quad +\Delta\left|\nabla^k F_t\right|_t^2 \quad \leq C\left|\nabla^k F\right|.\left(\sum_{i+j=k}\left|\nabla^i F\right|\left(\left|\nabla^j F\right| + 1\right)\right) \quad (4),$$

l'inégalité (4) contenant implicitement une formule de Weitzenböck (passage du laplacien sur les formes au laplacien "brut" $\nabla^*\nabla$). En utilisant le noyau de l'équation scalaire de la chaleur $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)$ sur V pour résoudre $\frac{\partial}{\partial t}f + \Delta f = C\left(|F_t|^3 + |F_t|^2\right)$, et le principe du maximum pour $\left(|F_t|_t^2 - f\right)$, on peut établir que, le long d'une ligne de flot, la courbure est uniformément C^0-bornée dès qu'elle l'est pour une topologie $L^q, q > \frac{6m}{2m-2}$. Il n'est pas difficile en utilisant l'inéquation (4) d'établir ensuite par récurrence sur k que, si la courbure est bornée pour la topologie C^0 le long d'une ligne intégrale, elle l'est pour toutes les topologies C^k. De ceci et de la proposition 13 on déduit :

Proposition 14. *Si H_t est solution de (E) sur $[0\ ,T)$, $T < \infty$, alors (F_t) est uniformément bornée pour les topologies C^k sur $[0\ ,T)$.*

Réécrivons l'équation (2) sous la forme :

$$\Delta h_t = h_t\,(K_t - K_0) + i\Lambda\bar{\partial} h_t.h_t^{-1} \wedge \partial h_t \qquad (5).$$

Par itération nous allons déduire des propositions 12 à 14 que (H_t) est uniformément bornée pour les topologies C^k sur l'intervalle $[0\ ,T)$. En particulier, H_t se prolonge en une solution C^∞ de (E) sur $[0,T]$; l'intervalle maximal d'existence, ouvert (par la proposition 10) est donc aussi fermé.

Proposition 15. *Pour toute métrique hermitienne H_0 sur un fibré holomorphe $(E,\bar{\partial}_0)$, il existe une et une seule application lisse sur $[0,\ \infty)\times V$, qui est solution de (E) et qui coïncide avec H_0 en $t=0$.*

En effet, comme (H_t) est bornée pour la topologie C^1 sur $[0\ ,T)$ (proposition 13) et comme (K_t) est bornée pour la topologie C^0 (proposition 12) on déduit de l'équation (5) que (Δh_t) est uniformément bornée, pour la topologie C^0- et donc pour les topologies L^p. La théorie elliptique (inégalité de Schauder) entraîne alors que (H_t) est bornée pour les normes L^p_2, et donc $C^{1,\alpha}$, par le théorème d'inclusion de Sobolev de L^p_2 dans $C^{1,\alpha}$, valable dès que p est assez grand.

La borne uniforme sur les dérivées covariantes de la courbure - à tous les ordres - entraînant une borne uniforme sur les dérivées covariantes de l'endomorphisme de Ricci, $K_t = i\Lambda F_t$, - à tous les ordres - on établit classiquement, par itération, que toute solution (H_t) de (5), bornée pour la topologie $C^{k,\alpha}, (k\geq 1, \alpha>0)$, est bornée pour la topologie $C^{k+1,\alpha}$. On raisonne comme il suit. Si (H_t) est bornée dans $C^{k,\alpha}$, comme (K_t) est bornée dans C^k, $\left[h_t\,(K_t-K_0)+i\Lambda\bar{\partial} h_t.h_t^{-1}\wedge\partial h_t\right]$ est bornée dans $C^{k-1,\alpha}$; l'inégalité de Schauder entraîne alors que (h_t) est bornée dans $C^{k+1,\alpha}$. ∎

C. Convergence à l'infini - construction de la métrique d'Hermite-Einstein.

1) La solution H^t est bornée pour la topologie C^0.

Malheureusement, les arguments de convergence en T, $T<\infty$, développés en B, ne s'appliquent plus : les bornes obtenues divergent en effet quand T tend vers l'infini. Nous commencerons par établir l'existence d'une borne C^0 sur (H^t). C'est ici qu'interviennent, et l'hypothèse de récurrence (on suppose la conjecture démontrée pour tout fibré stable de rang $r', r' < r$), et l'hypothèse de stabilité. On admettra le théorème suivant ([M − R2]).

Théorème 16. *Soit $[\omega]$ la classe hyperplane de $V\subseteq \mathbf{P}^N$. Un fibré holomorphe E est $[\omega]$ - stable si et seulement si la restriction de E à une intersection lisse, générique, de V avec une hypersurface S de degré assez grand (ne dépendant que de E) est $[\omega]$ -stable.*

Note. Le plongement de V dans $\mathbf{P}^N$ ne faisant pas partie de la donnée de E on pourra, en remplaçant éventuellement ω par un multiple - autrement dit en plongeant $\mathbf{P}^N$ dans $\mathbf{P}^M$ par une application de Véronèse - se ramener au cas où la restriction de E à une section hyperplane générique est stable.

Introduisons une nouvelle distance sur $\mathcal{M}$; H et K étant deux métriques de même déterminant, on peut écrire $H = K.e^s$, où s est une section de trace nulle de End E, hermitienne pour H et K. On pose

$$\delta(H,K)(x) = \max\{\text{valeurs propres de s(x)}\}.$$

L'application $\delta(H,K)$ est alors lipschitzienne sur V et

$$C_1 \|s\|_{C^0} \geq \sup_V \delta(H,K) \geq C_2 \|s\|_{C^0} \qquad (6),$$

les constantes C_1 et C_2 étant évidemment indépendantes de s. Comme on a normalisé le flot par la condition det $h_t = 1$, il suffit, pour borner H_t dans la topologie C^0, de borner $\delta(H_t,K)$. Pour ce faire, en se ramenant par un argument de transversalité à l'ouvert de V où $\delta(H,K)$ est lisse, on peut démontrer :

Lemme 17. $\int_V \delta(H,K)\Delta\Phi \leq \int_V \Phi\left(\left|\hat{K}^H\right| + \left|\hat{K}^K\right|\right)$ *pour toute application lisse* Φ*, positive ou nulle.*

Nous allons utiliser ce résultat pour montrer qu'il suffit, pour borner uniformément $\delta(H_t,K)(x)$, de borner la norme L^p de sa restriction à un ouvert quelconque.

Proposition 18. *S'il existe un ouvert U de V et une métrique de référence K sur E tels que $\left(\int_U \delta(H_t,K)^p\right)$ est bornée alors $\delta(H_t,K)$ est uniformément bornée sur $V \times [0,\infty)$.*

La distance $\delta(H,K)$ est une application L_1^2, puisque lipschitizienne; comme $\sup_V \left|\hat{K}_t\right|_t$ est une fonction décroissante de t, le lemme 17 entraîne, au sens des distributions, que $\Delta\delta \leq C$. La preuve se réduit ainsi à un énoncé classique connu sous le nom d'itération de Moser qui s'écrit ici: pour tout ouvert $U_1, \bar{U}_1 \subset U, \sup_{U_1}\delta < C\left[\left(\int_U \delta^p\right)^{1/p} + 1\right]$; en effet si W est un ouvert non vide de V, satisfaisant $\bar{W} \subset U_1$, on peut trouver une fonction lisse ψ sur V vérifiant $\Delta\psi = C$ sur $V - W$ (prendre f, lisse sur V, avec $\int_V f = 0$ et $f_{|V-W} = C$, puis résoudre $\Delta\psi = f, \psi \geq 0$). Le principe du maximum appliqué à $(\delta - \psi)$ entraîne alors $\sup_{V-W}(\delta-\psi) \leq \sup_{U_1-W}(\delta-\psi)$ i.e. $\sup_{V-W}\delta \leq |\psi|_\infty + \sup_{U_1-W}\delta$.∎

Par la stabilité de E, et d'après le théorème de Mehta-Ramanathan, il existe une famille Y_z de sections hyperplanes de V, paramétrée par le disque $\overline{B(O,1)} \subset \mathbf{C}$, telle que $E_{|Y_z}$ est stable pour tout z dans $\overline{B(O,1)}$. En particulier il existe un ouvert U de V, paramétré par $B(O,1) \times B^{m-1}(O,1)$, et feuilleté par les hypersurfaces ouvertes $U_z = U \cap Y_z$. On notera $\tilde{H}_z$ la métrique d'Hermite-Einstein sur $E_{|Y_z}$ qui existe par hypothèse de récurrence; il est possible de choisir $\tilde{H}_z$ lisse en z, et de définir ainsi une métrique $\tilde{H}$ sur la restriction de E à l'ouvert U. D'autre part, si une section hyperplane Y est définie par les zéros d'une section σ alors $i\bar{\partial}\partial\left(\frac{1}{4\pi}\log|\sigma|^2\right) = \omega - \frac{1}{2}C_Y$ où C_Y est le courant associé à l'hypersurface Y (par exemple une masse de Dirac si dim $Y = 0$). De l'égalité $i\bar{\partial}\partial R_2(H,K) = trF_H^2 - trF_K^2$ (cf. III. **A**) on déduit :

$$\tilde{R}_{2(V,\omega)}(H,K) = \frac{1}{2}\tilde{R}_{2(Y,\omega)}(H,K) - \frac{1}{4\pi}\int_V \log|\sigma|^2 \left(tr\left(F^H\right)^2 - tr\left(F^K\right)^2\right)\wedge\omega^{m-2}.$$

Modulo une décomposition orthogonale de F^H, en parties avec et sans trace, on conclut :

Lemme 19. *Si $Y \subset V$ est une section hyperplane donnée par les zéros d'une section σ de $\mathcal{O}_V(1)$, on a la majoration suivante de $\mathcal{D}_{Y,\omega}(H,K)$*

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_{Y,\omega}(H,K) \le \mathcal{D}_{V,\omega}(H,K) + C_1\left(\left|F^H\right|_{L^2} + \left|\hat{K}^H\right|_{L^\infty}\right) + C_2$$

où C_1 ne dépend que de σ et C_2 de σ et de K.

On déduit de ce résultat la majoration

$$\mathcal{D}_{Y_z,\omega}\left(H_t, \tilde{H}_z\right) \le 2\mathcal{D}_{V,\omega}\left(H_t, \tilde{H}\right) + C_1(z)\left(\left|F^{H_t}\right|_{L^2} + \left|\hat{K}^{H_t}\right|_{L^\infty}\right) + C_2(z)$$

où $\mathcal{D}_{V,\omega}(H_t, \tilde{H})$ est décroissante le long du flot, tandis que $\left|F^{H_t}\right|_{L^2}$, ainsi que $\left|\hat{K}_t\right|_{L^\infty}$, sont uniformément bornées.

Pour obtenir la majoration uniforme de $\int_U \delta^p(H_t,K)$ on peut majorer $|s|_{L^p(Y)}$ par $\mathcal{D}_{Y,\omega}(Ke^s,K)$ en utilisant une inégalité de Sobolev pour les sections sans trace du type Poincaré $-L^1$ (précisément, $|s|_{L^p(Y)} \le C\,|\nabla s|_{L^1(Y)}$ si $p = \left(\frac{\dim_{\mathbb{R}} Y}{\dim_{\mathbb{R}} Y - 1}\right)$ et si $tr\ s = 0$).

Lemme 20. *Si (F,K) est un fibré stable d'Hermite-Einstein sur une base kählérienne compacte de dimension $(m-1)$, (Y,ω), et si $p = \frac{2m-2}{2m-3}$, toute section K-hermitienne et sans trace de* End E, s, *vérifie la majoration :*

$$|s|_{L^p} - 1 \le C.\mathcal{D}_{Y,\omega}(Ke^s,K)$$

La formule (6) et les lemmes 19 et 20 entraînent ainsi l'inégalité

$$\int_Y \delta\left(H_t, \tilde{H}_z\right)^p \leq C\left(\mathcal{D}_{Y_z,\omega}\left(H_t, \tilde{H}_z\right)+1\right)$$
$$\leq C(z)\left(\mathcal{D}_{V,\omega}\left(H_t, \tilde{H}\right)+1\right) \leq C(z).$$

On en déduit une borne sur $\int_{U_z} \delta\left(H_t, \tilde{H}_z\right)^p$, uniforme en z par continuité de $\tilde{H}_z$ sur le bord de la boule $B(0,1) \subset \mathbf{C}$.

On a ainsi établi l'existence d'une borne uniforme sur $\int_U \delta\left(H_t, \tilde{H}_z\right)^p$, et donc sur $\delta\left(H_t, \tilde{H}\right)$ par la proposition 18.

Proposition 21. *Si (H_t) est une solution de (E) sur $[0, +\infty)$ alors (H_t) est bornée pour la topologie C^0.*

2) <u>Construction d'une limite lisse</u>

La fin de la démonstration se réduit à l'énoncé suivant :

Proposition 22. *Si (H_t) est bornée pour la topologie C^0, alors H_t converge, faiblement dans L_2^p, vers une métrique d'Hermite-Einstein (C^∞, par définition).*

Notons que par la normalisation $\det h_t = 1$, les inverses, h_t^{-1} sont uniformément bornés dès que les applications h_t le sont.

Lemme 23. *Si k est un endomorphisme de trace intégrale nulle il existe une constante C pour laquelle $\int |k|_0^2 \leq C \int \left(\bar{\partial} k\right)^2$.*

Puisque E est simple, (i.e. $H^0(\mathrm{End}\ E) = \mathbf{C}.1d$), k appartient à $\left(H^0(\mathrm{End}\ E)\right)^\perp$. On introduit alors l'opérateur $\spadesuit$, défini par $\spadesuit = \bar{\partial}^* \bar{\partial}$, d'ordre 2, auto-adjoint, elliptique ($\spadesuit k = +\frac{1}{2}\Delta k - \frac{1}{2}[K_0, k]$), dont le noyau est constitué précisément des sections holomorphes de End E. On peut alors choisir $C = \lambda_1^{-1}(\spadesuit)$. ∎ De ceci on déduit que,

Lemme 24. *Si la norme de H_t est uniformément bornée, il existe une constante C telle que, pour toute section k de End E, de trace intégrale nulle, on ait $\int |k|_t^2 \leq C \int \left|\bar{\partial} k\right|_t^2$. Si, de plus, k est H_t- hermitien alors $\int |k|_t^2 \leq C \int |\nabla_t k|_t^2$.*

Puisque la trace intégrale de $\hat{K}_t = K_t - \lambda 1 d_E$ est nulle on a le corollaire suivant.

Corollaire 25. *Le long d'une ligne de flot,* $\int \left|\hat{K}_t\right|_t^2 \leq C \int \left|\nabla_t \hat{K}_t\right|_t^2$.

L'équation d'évolution $\frac{\partial |\hat{K}_t|_t^2}{\partial t} + \Delta \left|\hat{K}_t\right|_t^2 = -2\left|\nabla \hat{K}_t\right|_t^2$ (cf.B.3)) et le corollaire 25 établissent la décroissance exponentielle de $\left|\hat{K}_t\right|_t$.

Lemme 26. *Le long d'une ligne de flot,* $\sup_V \left|\hat{K}_t\right|_t^2 \leq A.e^{-ct}$.

On voit clairement que $\int \left|\hat{K}_t\right|_t^2 \leq A\, e^{-ct}$; en introduisant le noyau de l'équation $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)$ sur V on démontre de plus que $\sup_V \left|\hat{K}_{t+\varepsilon}\right|_{t+\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \int_V \left|\hat{K}_t\right|^2$. ∎

Nous allons construire la limite H_∞, fibre par fibre. Si $t' > t > T$, l'équation d'évolution, $\frac{dH_t}{dt}(x) = -2\theta^{-1}\left(\hat{K}_t\right)$, entraîne que

$$d\left(H_t(x), H_{t'}(x)\right) \leq 2\int_t^{t'} \left|\hat{K}_s\right|_s ds \leq Ce^{-CT}.$$

La suite $(H_t(x))$ est donc, pour tout x dans V, une suite de Cauchy de $\mathcal{M}_x$, espace complet pour la distance d. On appelle $H_\infty(x)$ la limite. L'uniformité en x de l'inégalité (7) montre que la convergence est uniforme; en particulier H_∞ est continue. En reproduisant -sans changement- l'argument de la proposition 13 on démontre

Proposition 27. *Une courbe intégrale de l'équation d'évolution, est bornée tant pour la topologie C^1 que pour les topologies $L_2^p (p > 0)$.*

Puisque $\hat{K}_t$ converge vers 0 en norme L^p pour tout p, que h_t^{-1} et $h_t^{-1}\bar{\partial}h_t.h_t^{-1}$ sont uniformément bornées en norme C^0 (par la proposition précédente), et que (h_t) est uniformément bornée en norme L_2^p, $h_t^{-1}\Delta h_t$ et $h_t^{-1}\bar{\partial}h_t \wedge h_t^{-1}\partial h_t$ convergent faiblement dans L^p vers $h_\infty^{-1}\Delta h_\infty$ et $h_\infty^{-1}\bar{\partial}h_\infty \wedge h_\infty^{-1}\partial h_\infty$ respectivement. En particulier, on déduit de l'équation (2)

Lemme 28. *La limite h_∞ satisfait l'équation $0 = h_\infty^{-1}\Delta h_\infty + h_\infty^{-1}\bar{\partial}h_\infty \wedge h_\infty^{-1}\partial h_\infty$. La limite* h_∞ *est donc lisse et définit une "vraie" métrique d'Hermite-Einstein H^∞.*

Ceci achève la démonstration de la conjecture dans le cadre algébrique projectif.

IV. LE THÉORÈME D'UHLENBECK-YAU ; LA PREUVE DE LA CONJECTURE DANS LE CADRE KAHLÉRIEN.

A la méthode du flot exposée précédemment, K. Uhlenbeck et S.T. Yau préfèrent la méthode concurrente de la "continuité"; nous commençons avec ces idées -même si elles ne sont pas l'originalité essentielle de leur démarche. Au lieu d'intégrer le champ associé à l'équation $\hat{K} = 0$ (8), on introduit une famille d'équations perturbées, plus faciles à résoudre, et dont il suffit d'établir la convergence des solutions quand la perturbation tend vers 0. Cela se fera par des estimées a priori pour des normes convenables. On comprend que, jusque là, l'analyse n'est pas foncièrement différente de celle contenue dans les parties II et III, supra.

A. La méthode de la continuité.

Rappelons que si H_0 est une métrique de référence sur E, et si H est une autre métrique hermitienne caractérisée par la section h, de End E, H_0-hermitienne, définie par $H = H_0 h$, on a :

$$\nabla^H = \nabla^0 + h^{-1}\partial^0 h, \quad F = F_0 + \bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right), \text{ et } \hat{K} = \hat{K}_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right).$$

Comme annoncé, on remplace l'équation associée à la conjecture,

$$\hat{K}_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right) = 0 \qquad (9),$$

par une famille d'équations "perturbées",

$$\hat{K}_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right) - \varepsilon \ln h = 0 \qquad (10).$$

Ici ε représente un réel quelconque. On notera h_ε une solution éventuelle de (10). De la même façon que supra, (cf.III), on peut normaliser les solutions de (10) par changement conforme sur H_0, de telle sorte que det $h_\varepsilon = 1$.

1) Pour résoudre l'équation (10) on introduit une nouvelle perturbation avec la famille à deux paramètres

$$L_{\varepsilon,\sigma}(h) = \hat{K}_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right) - \varepsilon \ln h - \sigma\, h^{-1/2}\hat{K}_0 h^{1/2} = 0 \text{ où } \sigma \in [0,1].$$

L'ensemble $I_\varepsilon = \{\sigma \in [0,1] \,/\, \exists h \in \text{ End } E, L_{\varepsilon,\sigma}(h) = 0\}$ est non vide ($\sigma = 1, h = 1d_E$). A partir d'estimées a priori comme

Lemme 29. *Si h est une solution de $\hat{K}_0 + i\Lambda\bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0 h\right) - \varepsilon \ln h + h^{-1/2}\tilde{K}_0 h^{1/2} = 0$, où $\tilde{K}_0$ est un endomorphisme H_0- hermitien de E fixé, et si on pose $u = \ln h$ alors*

1) $$|u| \cdot \left|\hat{K}_0 - \tilde{K}_0\right| \geq \frac{1}{2}\Delta |u|^2 + \varepsilon |u|^2,$$

2) $$\max_V |u| \leq \varepsilon^{-1} \max_V \left|\hat{K}_0 - \tilde{K}_0\right|,$$

3) $$\max_V |u| \leq C \left(\int_V |u|^2\right)^{1/2} + \max\left|\hat{K}_0 - \tilde{K}_0\right|,$$

4) $$|h|_{C^k} \leq C \max\left(|u|, \left|\hat{K}_0\right|_{C^k}, \left|\tilde{K}_0\right|_{C^k}\right)$$

(l'inégalité 4) n'est vraie que si max $|u|$ *est assez petit),*

et du calcul du linéarisé de l'opérateur $L_{\varepsilon,\sigma}$, on montre qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à $L_{\varepsilon,\sigma}$: $\begin{pmatrix} L^p_k & \rightarrow & L^p_{k-2} \\ h & \rightarrow & L_{\varepsilon,\sigma}(h) \end{pmatrix}$ au moins pour ε assez grand. L'intervalle I_ε est alors ouvert, tandis que le point 4) du lemme 29 entraîne que I_ε est fermé : l'intervalle $[0,1]$ étant connexe, l'équation $L_\varepsilon(h) = L_{\varepsilon,0}(h) = 0$ admet une solution si ε est assez grand.

2) En raisonnant sur le linéarisé on voit que l'ensemble des ε, pour lesquels $L_\varepsilon(h) = 0$ admet une solution, est ouvert. Par différentiation de l'identité $L_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$ par rapport à ε, on établit une seconde série d'estimées a priori;

Lemme 30. *S'il existe une famille à 1-paramètre de solutions,* $L_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$, *sur un intervalle* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *et si* $|ln\ h_\varepsilon|$ *est bornée uniformément par* m, *alors, pour tout* ε *dans* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $|h_\varepsilon|_{L^p_2} \leq C(m)\left(|h_{\varepsilon_1}|_{L^p_2} + 1\right)$.

De ceci et du lemme 29 on déduit

Proposition 31. *Il existe une solution à l'équation* $L_\varepsilon(h) = 0$ *pour tout* ε *strictement positif; si, de plus,* $\int_V |ln\ h_\varepsilon|^2$ *est bornée uniformément en* ε *au voisinage de zéro, il existe une solution pour tout* $\varepsilon > -\varepsilon_0\ (\varepsilon_0 > 0)$. *Enfin, si* $\varepsilon > 0$, $\int_V |F^{H_\varepsilon}|^2 \leq \int_V |F_0|^2$.

B. Convergence sous l'hypothèse de stabilité.

La proposition 31 est l'analogue -dans le cadre de la méthode de la continuité- de la proposition 15 de l'approche variationnelle de Donaldson. Il reste à établir que, sous l'hypothèse de stabilité, h_ε tend vers une solution h_0 de $L_0(h) = 0$.

Remarquons que, grâce à la métrique de référence H_0 tout sous fibré F de E s'identifie à la projection H_0-hermitienne sur ce sous-fibré -c'est à dire à une section de End E, π^F, satisfaisant $\pi^F = (\pi^F)^2 = (\pi^F)^*$; de plus, le sous-fibré F est holomorphe si et seulement si $(1 - \pi^F).\bar{\partial}\pi^F = 0$ (c'est à dire $\bar{\partial} f \in \Gamma(F)$ si $f \in \Gamma(F)$). Par analogie, on dira d'une section L^2_1 de End E qu'elle définit un *fibré faiblement holomorphe* si $\pi^2 = \pi = \pi^*$ et si $(1-\pi)\bar{\partial}\pi = 0$ (au sens des distributions).

L'originalité du raisonnement des auteurs réside dans la fin de la démonstration qui s'articule comme suit (la rédaction, malheureusement parfois "allusive", n'a pas fait l'unanimité des lecteurs).

1) Si les solutions perturbées, h_ε, ne convergent pas en $\varepsilon = 0$, on peut construire un sous-fibré faiblement holomorphe π de E.

2) Tout sous-fibré faiblement holomorphe est, en fait, lisse en dehors d'une sous-variété de codimension complexe 2 et définit un sous-faisceau cohérent de E.

1) Pour le premier point, si (h_ε) diverge en 0 il en est de même de $\int_V |ln\ h_\varepsilon|^2$ par la proposition 31. En remarquant que, pour $0 < \sigma \leq 1$, toute solution de $L_\varepsilon(h) = 0$ satisfait l'inégalité a priori : $\left|h^{-\sigma/2}\partial^0 h^\sigma\right|^2 + \varepsilon < ln\ h, h^\sigma > + \frac{1}{\sigma}\Delta\,|h^\sigma| \leq - < \hat{K}_0, h^\sigma >$, on peut construire une suite (ε_l), tendant vers 0, telle que la suite $\left(\tilde{h}_l\right) = (\rho_l.h_{\varepsilon_l})$ converge faiblement dans L_1^2 vers une limite h_0, $h_0 \neq 0$. De plus, si on définit la constante ρ_l par $\exp\left(-\sup_{x\in V}\ \sup_i \left\{\lambda_i^l(x)\right\}\right)$, (où $\left\{\lambda_i^l(x)\right\}$ est l'ensemble des valeurs propres du logarithme de $h_{\varepsilon_l}(x)$), alors $\tilde{h}_l \leq 1d$ et $\rho_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il est clair que $0 < rg\ h_0 < rg\ E$; écrivant la décomposition spectrale de la limite h_0 sous la forme $h_0 = \sum_{j=1}^J a_j(x)\pi_j(x)$, où les $\pi_j(x)$ représentent les projecteurs L^2 – hermitien associés aux sous-espaces propres de $h_0(x)$ (i.e. $\pi_i = \pi_i^*, \pi_i \circ \pi_j = \delta_j^i \pi_j$ et $\sum_{j=1}^J \pi_j = 1d_E$), les auteurs affirment que les fonctions $a_j(x)$ sont en fait constantes. Supposant alors $a_j < a_{j-1}$, on montre aisément que les sections $\sum_{j=1}^k \pi_j$ (en particulier π_1) définissent un fibré faiblement holomorphe pour tout $k < r$.

2) Le second point se ramène à un joli théorème de régularité, dont l'intérêt dépasse le cadre de la conjecture de Hitchin-Kobayashi.

Définition. *Une application, f , de la boule unité $B^1(O,1)$ de $\mathbf{C}$ dans une variété projective V, qui est L_1^2 et qui, presque partout sur B^1, envoie le plan tangent holomorphe $T_xB^{(1,0)}$ dans le plan tangent holomorphe de V en $f(x)$, $\left(T_{f(x)}V\right)^{(1,0)}$, est* faiblement holomorphe . *Une application de $B^m(O,1)$ dans la même variété V est faiblement holomorphe si, pour tout systèmes de coordonnées holomorphes $\{z_1,...,z_m\}$ sur B^m, et presque tout point $(0,z_{20},...,z_{m0})$ de B^{m-1}, f, restreint à la droite $\{z_i = z_{i0}\ si\ i \geq 2\}$, est faiblement holomorphe.*

Théorème 32 ([Y-U]). *Tout application faiblement holomorphe à valeurs dans une variété algébrique projective est rationnelle.*

La démonstration est trop longue pour être exposée ici. Disons que l'on raisonne par récurrence sur la dimension de la source, le cas de la dimension 1 se ramenant -modulo le lemme de Morrey (qui réduit la continuité d'une application de L_1^2 à une "formule de monotonicité") et la solution générale du problème de Plateau-, à une inégalité isopérimétrique pour les surfaces minimales. On passe à la dimension quelconque par une construction astucieuse s'appuyant sur le théorème de Bishop (cf. [Bi] ou [s.g.a]).

Proposition 33. *Tout ensemble fermé non vide, limite (au sens de la distance de Hausdorff) d'une suite de sous-ensembles analytiques fermés de dimension d d'un ouvert de $\mathbf{C}^N$, est lui-même une sous-variété analytique fermée de dimension d,*

dès que le volume 2d-dimensionnel de la suite est borné.

En appliquant le théorème 32 aux restrictions de π_1 à des ouverts de trivialisation de E on peut voir que π_1 définit un sous-faisceau cohérent de E. En particulier, π_1^{**} est localement libre (et donc un "vrai" fibré holomorphe) en dehors d'une sous-variété de codimension complexe 2, ensemble de mesure nulle, que la formule de Chern-Weil ne "voit" pas. On montre alors facilement que $\mu(\pi_0) \geq \mu(E)$- établissant ainsi la contradiction qui achève la démonstration. ∎

V. APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATIONS.

1) De même que l'inégalité sur les nombres de Chern, $3c_2 \geq c_1^2$, apparaissait comme le principal corollaire de la preuve de la conjecture de Calabi, on peut voir, par le même argument (cf. [Lü1]) que la preuve de la conjecture de Hitchin-Kobayashi entraîne le théorème suivant :

Corollaire 34. ***Si E^r est un fibré $[\omega]$ - stable sur une base kählérienne compacte (V^m,ω), alors $2rc_2(E)\cup\omega^{n-2} \geq (r-1)c_1^2(E)\cup\omega^{n-2}$; avec l'égalité si et seulement si l'image réciproque de E sur $\tilde{V}^m$, revêtement universel de V, s'écrit comme somme directe de fibrés en droites, holomorphes, hermitiens, de même forme de courbure. En particulier, un fibré stable sur une variété kählérienne compacte provient d'une représentation unitaire de son groupe fondamental si et seulement si $c_1^2 = c_2 = 0$ et $c_1 = 0$.***

A la différence de ce qui s'est passé pour la conjecture de Calabi, il convient de remarquer que l'inégalité était déjà connue dans le cadre algébrique projectif (cf. l'introduction et [Bo]); plus qu'un corollaire, elle a été un guide vers la conjecture.

2) J'aurais pu (du?) parler d'une autre généralisation, plus récente encore, du théorème de Narasimhan-Seshadri, proposée par N.J. Hitchin [Hi] ; ∇ étant une connexion sur un fibré principal P au-dessus d'une surface de Riemann V, et Φ un champ de Higgs (i.e. une (1,0)-forme sur V à valeur dans l'algèbre de Lie de P) on peut introduire le système d'auto-dualité suivant

$$(*)\begin{cases} \bar\partial^\nabla \Phi = 0 \\ F^\nabla + [\Phi,\Phi^*] = 0. \end{cases}$$

On peut d'autre part définir une notion de "stabilité équivariante" : une *paire* (E,φ), où E est un fibré vectoriel sur V et φ une section holomorphe de End $V \otimes \mathcal{O}_V(-1)$, est *stable* si pour tout sous-fibré strict φ -invariant de E, F, $\mu(F) < \mu(E)$. N.J. Hitchin établit que toute solution de ($*$) correspond à une paire stable (E,φ) et qu'à toute paire (E,φ) stable correspond réciproquement une solution de ($*$). L'esprit analytique de la démonstration est proche des idées exposées dans le paragraphe.II.

Je remercie P. Gauduchon, dont la collaboration a été déterminante dans la préparation de ces notes et C. Sabbah, mon précieux conseiller pour la géométrie analytique.

BIBLIOGRAPHIE.

1) papiers cités au cours du texte.

[A-B] M.F. ATIYAH-R.BOTT, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.A 308 (1982), 524-615.

[Bi] E. BISHOP, Conditions for the analyticity of certain sets, Michigan Math.J. (1964), 289-304.

[Bo] F. BOGOMOLOV, Holomorphic tensors and vector bundles, Izvestia USSR 42 (1978), 1227-1287.

[D1] S.K. DONALDSON, A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, J. Differential Geom., 18 (1983), 269-277.

[D2] S.K. DONALDSON, Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985), 1-26.

[D3] S.K. DONALDSON, Infinite determinants - Stable bundles and curvature, Preprint (Oxford-England).

[G-T] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential equations of second order, Springer 1977.

[Ham] R.S. HAMILTON, Harmonic Maps of manifolds with boundary, Lecture Notes in Mathematics 471 (Springer 1975).

[Hi] N.J. HITCHIN, The self duality equations on a Riemann surface, à paraître in Proc. London Math. Soc.

[Ko] S. KOBAYASHI, Curvature and stability of vector bundles, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 58 (1982), 158-162.

[Lü1] M. LUBKE, Chernklassen von Hermite-Einstein-Vektorbündeln, Math. Ann. 260 (1982), 133-141.

[Lü2] M. LUBKE, Stability of Einstein-Hermitian Vector bundles, Manuscripta Math. 42 (1983), 245-257.

[M-R1] R.B. MEHTA, A. RAMANATHAN, Semi-stable sheaves on projective varieties and their restriction to curves, Math. Ann. 258 (1982), 213-224.

[M-R2] R.B. MEHTA, A. RAMANATHAN, Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group, Invent. Math. 77, 163-172 (1984).

[N-S] M.S. NARASIMHAN, C.S. SESHADRI, Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, Ann. of Math. 82 (1965), 540-567.

[O-S-S] C. OKONEK, M. SCHNEIDER, H. SPINDLER, Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser (1980).

[s.g.a] F. CAMPANA, le théorème sur les limites d'ensembles analytiques de E. Bishop, le Séminaire de Géométrie Analytique, Publication de l'Institut Elie Cartan n°5, Janvier 1982.

[s.g.a] C. SABBAH, Application du théorème de Bishop à l'espace des cycles, Séminaire de Géométrie Analytique, Publication de l'Institut Elie Cartan n°5, Janvier 1982.

[U] K.K. UHLENBECK, Connections with L^p bounds on curvature, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31-42.

[U-Y] K.K. UHLENBECK et S.T. YAU, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable Vector Bundles, Preprint, (à paraître dans Communication Pure and Applied Math).

2) Les notes de S. Kobayashi, "differential geometry of complex vector bundles", sont une bonne introduction au sujet abordé dans l'exposé. (à paraître en "Princeton University Press").
On pourra aussi consulter les "lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics", de Y.T. SIU, (notes pour le German Mathematical Society Seminar in Düsseldorf, Juin 1986). Mais 4 des 5 chapitres sont consacrés aux métriques de Kähler-Einstein !

Christophe Margerin
Centre de Mathématiques
Unité associée C.N.R.S. n°169
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU CEDEX