LAURENT CLOZEL

Progrès récents vers la classification du dual unitaire des groupes réductifs réels

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. n° 681, p. 229-252

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__229_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1987
39ème année, 1986-87, n° 681

PROGRÈS RÉCENTS VERS LA CLASSIFICATION DU DUAL UNITAIRE DES GROUPES RÉDUCTIFS RÉELS

par Laurent CLOZEL (*)

1. INTRODUCTION

La théorie des représentations unitaires des groupes de Lie réductifs réels a commencé il y a plus de quarante ans, avec les travaux de V. Bargmann et de Gelfand - Neumark sur le groupe de Lorentz et sur $SL(2,\mathbb{R})$ [13]. Pour ces groupes, ils obtenaient une classification complète du dual unitaire, c'est-à-dire de l'ensemble des représentations unitaires irréductibles à isomorphisme près. La méthode de Bargmann a servi de paradigme pour les progrès ultérieurs. Soit π une représentation irréductible de $G = SL(2,\mathbb{R})$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Bargmann étudiait la représentation dérivée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sur l'espace V des vecteurs de $\mathcal{H}$ qui ont une "décomposition de Fourier" finie sous l'action du sous-groupe $K = SO(2)$. Il obtenait, à l'aide des équations de structure de $\mathfrak{g}$, des formules explicites qui lui permettaient de classifier les représentations (*cf.* [32]). On trouve que la plupart des représentations unitaires de G peuvent se réaliser dans des espaces de Hilbert de fonctions sur lesquels G opère de façon naturelle. Par exemple, la *série principale* se compose des représentations $\pi_{s,\varepsilon}$ ($s \in i\mathbb{R}$, $\varepsilon = 0$ ou 1) obtenues par l'action suivante de G sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left(\pi_{s,\varepsilon}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f\right)(x) = \operatorname{sgn}(bx+d)^{\varepsilon}\,|bx+d|^{-1-s}\, f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Si $\varepsilon = 0$, Bargmann découvrit que les représentations données par cette formule pour s *réel*, $|s| < 1$, sont encore unitaires ; on doit, bien sûr, munir l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$ d'une autre structure hilbertienne, qui d'ailleurs dépend de s . Il appela cette série de représentations "série complémentaire". On remarque aussi que $\pi_{s,\varepsilon}$ est définie (et continue) pour tout $s \in \mathbb{C}$; mais, en dehors des cas précités, elle n'est unitaire pour aucune renormalisation du produit scalaire. (Bien sûr, G a aussi une autre série de représentations, dite "série discrète".)

(*) Pendant la préparation de cet exposé, les recherches de l'auteur étaient partiellement financées par la National Science Foundation (É.-U.).

Il s'avéra vite que les calculs explicites de Bargmann ne pouvaient s'étendre au cas général d'un groupe semi-simple G. La théorie se développa alors, sous l'influence dominante de Gelfand et Harish-Chandra, dans deux directions différentes. L'une, analytique, a consisté à décrire les représentations unitaires de G qui interviennent dans la mesure de Plancherel - c'est-à-dire dans la décomposition de $L^2(G)$, muni de la représentation régulière gauche, comme intégrale directe de représentations irréductibles. Ces représentations sont appelées *tempérées*. Les étapes de ce programme sont les suivantes : la classification de la série discrète par Harish-Chandra, et les réalisations explicites de Schmid et Atiyah-Schmid ; le "théorème de Plancherel" d'Harish-Chandra ; la classification fine des représentations tempérées par Knapp et Zuckerman. Certains de ces résultats sont rappelés dans le § 2.2.

L'autre programme a consisté à classifier les représentations de G, dans des espaces de Hilbert, qui sont continues, irréductibles mais non nécessairement unitaires - l'analogue des représentations $\pi_{s,\varepsilon}$ ci-dessus pour $s \in \mathbb{C}$. On considère, en fait, les représentations (irréductibles) *admissibles* (§ 2.1). En 1973, Langlands [33], à la suite des travaux d'Harish-Chandra, a montré que la classification des représentations admissibles se ramenait à celle des représentations tempérées, problème qui fut, rappelons-le, résolu par Knapp et Zuckerman (1976). La classification de Langlands est esquissée dans le § 2.3. Une classification différente, mais équivalente, fut obtenue par D. Vogan en 1976 [41, 2].

Grâce à ces progrès, la classification du dual unitaire est maintenant un problème très explicite : *parmi les représentations admissibles, caractériser les représentations unitaires*. Les dix dernières années ont vu de grands progrès dans cette direction, dus entre autres à W. Baldoni-Silva, D. Barbasch, M. Duflo, T.J. Enright, A. Knapp, R. Parthasarathy, B. Speh, D. Vogan et N. Wallach. Il y a deux types de problèmes assez différents :

(1) Pour G donné, décrire les représentations unitaires de G *isolées* (dans le dual unitaire ou admissible). On exclut la série discrète, considérée comme connue. Ces représentations sont les objets nouveaux (et en général remarquables) associés à G. Exemples :

- la représentation triviale (!) ;
- la représentation de Weil, ou métaplectique, de $Sp(n,\mathbb{C})$ [47, 24] ;
- les représentations de Zuckerman (§ 4). Ces représentations, obtenues par "induction cohomologique", interviennent dans la théorie de la cohomologie continue de G.

(2) Décrire les séries complémentaires.

A l'aide de (1) et (2), et de l'induction à partir de sous-groupes, on espère bien sûr

(3) Décrire explicitement le dual unitaire de G .

En général, la réponse à (3), pour un groupe donné, est compliquée. Le problème est résolu pour de nombreux groupes - en général de petit rang sur $\mathbb{R}$ - mais il n'est pas question de décrire ici ces résultats. Les plus récents sont dus à W. Baldoni-Silva et A. Knapp [9]. Dans cet exposé, après avoir donné les rudiments du sujet, on décrit d'abord des résultats nouveaux dus à Vogan. Le premier est un théorème (Thm. 5) montrant que, sous des hypothèses très larges, l'induction cohomologique (§ 4) préserve l'unitarité. Une des conséquences (§ 4.4) est la classification finale des représentations unitaires de G dont la cohomologie continue est non triviale. La démonstration du théorème repose sur un résultat très simple (Thm. 6, § 5) concernant les signatures des représentations hermitiennes ; on a esquissé la démonstration, qui devrait s'étendre aux groupes p-adiques. A partir du Thm. 5, Vogan classifie complètement les représentations unitaires de $GL(n,F)$ où $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. (Une démonstration différente a été proposée par M. Tadić.) Les résultats sont exposés au § 7.

Le § 8 est consacré au remarquable travail récent de D. Barbasch, qui a classifié le dual unitaire des groupes complexes classiques. Une description de ses résultats exigerait un exposé de la théorie, en plein développement, des représentations unipotentes. On s'est contenté de citer (incomplètement) un de ses théorèmes.

Les représentations des groupes semi-simples peuvent être étudiées par différentes méthodes, plus ou moins sophistiquées. Dans cet exposé, on a évité d'utiliser les parties plus difficiles de la théorie de Vogan - en particulier, la théorie du K-type minimal ; mais cette théorie est nécessaire, par exemple, pour les démonstrations du § 6. Par ailleurs, Beilinson et Bernstein ont donné [14] une construction des $(\mathfrak{g},K)$-modules irréductibles reposant sur la théorie des $\mathcal{D}$-modules. On peut penser qu'elle jouera un rôle dans les progrès futurs.

Terminons en espérant que la classification du dual unitaire d'un groupe réductif quelconque sera bientôt achevée !

2. NOTIONS FONDAMENTALES. CLASSIFICATION DE LANGLANDS

2.1. Dans le reste de l'exposé, G désigne le groupe de Lie des points réels d'un groupe réductif connexe $\underline{G}$ défini sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, un quotient d'un tel groupe par un sous-groupe connexe de son tore déployé central maximal (pour des hypothèses moins restrictives, *cf.* [42]). On renvoie à [1] pour un exposé détaillé des résultats de ce paragraphe, ainsi que pour les références.

Soit $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. (On utilise des notations analogues pour tout groupe de Lie.) Soient K un sous-groupe compact maximal de G , ϑ l'involution de Cartan associée, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. On fixe une forme bilinéaire invariante $B(X,Y)$ sur $\mathfrak{g}_0$, définie négative sur $\mathfrak{k}_0$ et positive sur $\mathfrak{p}_0$. On note $\hat{K}$ le dual unitaire de K .

Soient $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $Z(\mathfrak{g})$ le centre de celle-ci, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Rappelons qu'Harish-Chandra a défini un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ sur les invariants $S(\mathfrak{h})^W$ du groupe de Weyl dans l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}$. Si π est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, le lemme de Schur [18] montre que $Z(\mathfrak{g})$ opère par des scalaires sur l'espace de π . On note λ_π le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ ainsi défini, qu'on identifie à une orbite de W dans $\mathfrak{h}$: c'est le *caractère infinitésimal* de π .

Soit π une représentation continue de G , de longueur finie, sur un espace de Hilbert H . Soit V l'espace des vecteurs K-finis (= dont les transformés par K engendrent un espace fini) de H ; V est formé de vecteurs différentiables, et reçoit donc la représentation dérivée - aussi notée π - de $\mathfrak{g}$. D'après Harish-Chandra, si π est unitaire irréductible, et si $\mu \in \hat{K}$, la multiplicité de μ dans V (... ou H) est finie. On dit que (π,H) est *admissible* si elle a cette propriété.

Considérons alors le couple de représentations de $\mathfrak{g}$ et K sur V , toutes deux notées π . On a :

(1) V est somme directe de sous-espaces de dimension finie, sur lesquels K opère continûment.

(2) Si $X \in \mathfrak{k}_0$, $v \in V$, $\pi(X)v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp tX)v$.

(3) Si $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$, $\pi(\mathrm{Ad}(k)X) = \pi(k)\pi(\alpha)\pi(k)^{-1}$.

Une telle représentation du couple $(\mathfrak{g},K)$ est appelée un $(\mathfrak{g},K)$-*module*. Si elle est de longueur finie comme $U(\mathfrak{g})$-module, et si la multiplicité de tout $\mu \in \hat{K}$ est finie, c'est un *module de Harish-Chandra*. On dit que deux représentations admissibles de longueur finie sont *infinitésimalement équivalentes* si les modules de Harish-Chandra associés sont (algébriquement) équivalents. Deux représentations *unitaires* irréductibles sont infinitésimalement équivalentes si, et seulement si, elles sont équivalentes.

Un $(\mathfrak{g},K)$-module (π,V) est *unitaire* s'il existe une forme hermitienne définie positive $<\ ,\ >$ sur V invariante par K et par $\mathfrak{g}_0$:

$$<\pi(X)v,w> + <v,\pi(X)w> = 0 \ , \quad X \in \mathfrak{g}_0 \ .$$

Dans ce cas, la complétion H de V est une représentation unitaire de G . La classification des représentations unitaires de G se réduit ainsi à celle des modules de Harish-Chandra unitaires irréductibles.

Soit (π,V) un module de Harish-Chandra. On note V^h le *dual hermitien* de V , c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur V muni de la structure complexe conjuguée, et K-finies. C'est un module de Harish-Chandra. Si (π,V) est irréductible, il est *hermitien* s'il est isomorphe à V^h muni de la représentation évidente. Il est équivalent de supposer que V admet une forme hermitienne non dégénérée invariante par $\mathfrak{g}_0$.

2.2. Induction parabolique, représentations tempérées

Si P est un sous-groupe parabolique de G , P a une unique décomposition de Levi $P = MN$ avec M stable par ϑ ; on peut écrire $M = A_M{}^oM$, avec ${}^oM = \{m \in M : \chi(m) = 1$ pour tout caractère $\chi : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times\}$ et A_M le sous-groupe vectoriel maximal du centre de M .

Soit δ une représentation admissible de ${}^oM$, et $\nu \in \mathfrak{a}_M^*$. On note e^ν le quasi-caractère de A_M associé à ν et

$$I_P(\delta,\nu) = \mathrm{ind}_P^G(\delta \otimes e^\nu \otimes 1)$$

la représentation unitairement induite de la représentation $\delta \otimes e^\nu \otimes 1$ de $P = {}^oMAN$: elle est donnée par l'action à droite de G sur

(2.1) $\mathcal{H}_P(\delta,\nu) = \{f : G \longrightarrow \mathcal{H}_\delta ,\ f(mang) = a^{\nu+\rho_P}\delta(m)f(g) ,\ f$ mesurable, $f|_K \in L^2(K)\}$

($\rho_P \in \mathfrak{a}_o^*$ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$).

On a une construction analogue produisant des $(\mathfrak{g},K)$-modules à partir de $(\mathfrak{m},K_M)$-modules, K_M étant un sous-groupe compact maximal de M [16] ; l'induction commute alors avec le foncteur $\mathcal{H} \rightsquigarrow V$. L'induction préserve les représentations admissibles de longueur finie (les modules de Harish-Chandra). Si δ est unitaire et $\nu \in i\mathfrak{a}_{M,0}^*$ est la différentielle d'un caractère, $I_P(\delta,\nu)$ est unitaire.

Rappelons qu'une représentation irréductible δ de G appartient à la *série discrète* si ses coefficients sont de carré intégrable. Pour la théorie de la série discrète, on renvoie à l'exposé de Duflo [19] ; voir aussi le § 4.3.

Une représentation *unitaire* irréductible π de G est dite *tempérée* si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(1) les coefficients K-finis de π appartiennent à $L^{2+\epsilon}({}^oG)$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(2) π est une composante d'une induite $I_P(\delta,\nu)$, δ appartenant à la série discrète de ${}^oM$ et ν étant unitaire ;

(3) π appartient au support de la mesure de Plancherel sur le dual de G .

L'équivalence de (2) et (3) résulte des travaux d'Harish-Chandra sur la formule de Plancherel ; (1)$\Leftrightarrow$(2) est dû à Trombi, ou à la classification de Langlands (§ 2.3).

Grâce à (2) et aux résultats d'Harish-Chandra sur la réductibilité des $I_P(\delta,\nu)$, on peut classifier complètement les représentations tempérées. Cela a été achevé par Knapp et Zuckerman ; voir [30] pour un exposé de leurs résultats, et [31], écrit hélas pour G connexe, pour les démonstrations. Des résultats équivalents sont dans Vogan [2, ch. 6]. Nous retiendrons simplement que les représentations tempérées sont "connues" : leurs caractères, restrictions à K , etc., peuvent être déterminés explicitement.

2.3. Classification de Langlands

Soient $P = {}^{o}MAN$ un parabolique de G , δ une représentation tempérée de ${}^{o}M$, et $\nu \in \mathfrak{a}^*$. Notons $\Delta(\mathfrak{n},\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$: ce sont des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{a}_0$. Par restriction et dualité, la forme B définit un produit scalaire positif, $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{a}_0$ ou $\mathfrak{a}_0^*$. Notons $\bar{P} = {}^{o}MA\bar{N}$ le parabolique opposé à P . On définit, formellement d'abord, un opérateur $A(\delta,\nu) : H_P(\delta,\nu) \longrightarrow H_{\bar{P}}(\delta,\nu)$ par la formule

$$A(\delta,\nu)\, f\,(g) = \int_{\bar{N}} f(\bar{n}g)\, d\bar{n}\ , \tag{2.2}$$

où $d\bar{n}$ est une mesure de Haar. Formellement, il est facile de vérifier que $A(\delta,\nu)$ entrelace $I_P(\delta,\nu)$ et $I_{\bar{P}}(\delta,\nu)$.

On dit que ν est *positif* si $\mathrm{Re}\langle\nu,\alpha\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n},\mathfrak{a})$. La valeur absolue de $(A(\delta,\nu)f)(g)$ peut alors se majorer, pour f continue, par une intégrale analogue intervenant dans la théorie des fonctions sphériques ; on en déduit :

Lemme 1.- *Soit* f *un vecteur* C^∞ *de* $I_P(\delta,\nu)$. *Alors l'intégrale définissant* $A(\delta,\nu)f$ *converge absolument pour* ν *positif*.

Le résultat de Langlands [33], avec des compléments dus à Miličić [34], est alors le suivant (pour la démonstration, *cf*. [16]) :

THÉORÈME 1.- (i) *Supposons* ν *positif. Alors l'image de* $A(\delta,\nu)$ *est un sous-module irréductible de* $I_{\bar{P}}(\delta,\nu)$, *et l'unique quotient irréductible de* $I_P(\delta,\nu)$. *On le note* $J_P(\delta,\nu)$.

(ii) *Si* π *est une représentation admissible irréductible de* G , *il existe* $(P = {}^{o}MAN,\delta,\nu)$, δ *étant une représentation irréductible tempérée de* ${}^{o}M$ *et* $\nu \in \mathfrak{a}^*$ *positif pour* P , *tels que* π *soit infinitésimalement équivalente à* $J_P(\delta,\nu)$. *Les données* $({}^{o}M,A,N,\delta,\nu)$ *sont uniques à conjugaison près par un élément de* G .

On peut interpréter le quotient de Langlands $J_P(\delta,\nu)$ comme le sous-quotient de $I_P(\delta,\nu)$ dont les coefficients croissent le plus vite pour $g \longrightarrow \infty$, la croissance étant régie par $\mathrm{Re}\,\nu \in \mathfrak{a}_0^*$. Ceci rend plausible le résultat suivant, qu'on déduit de [16, Prop. 4.13] :

PROPOSITION 1 (B. Speh).- *Soit* (π,J) *un sous-quotient irréductible de* $I_P(\delta,\nu)$. *Supposons que* $J \cong J_{P'}(\delta',\nu')$; *soit* $J_P(\delta,\nu)$ *le quotient de Langlands de* $I_P(\delta,\nu)$. *Alors on a* $\|\mathrm{Re}\,\nu'\| \le \|\mathrm{Re}\,\nu\|$, *avec égalité seulement si* $J = J_P(\delta,\nu)$.

Considérons maintenant les $I_P(\delta,\nu)$ avec δ tempérée et ν positif.

THÉORÈME 2 (Zuckerman, Harish-Chandra).- *Soit* π *une représentation de longueur finie de* G . *Alors, dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longueur finie, on a* :

(2.3) $$\pi = \Sigma\, m_P(\delta,\nu)\ I_P(\delta,\nu)$$

avec $m_P(\delta,\nu) \in \mathbb{Z}$ *; cette expression est unique à conjugaison près des données par* G .

Démonstration.- On peut supposer π irréductible ; soit $\pi = J_P(\delta,\nu)$, donc $\pi = I_P(\delta,\nu) - \Sigma\, \pi'$ où la somme porte sur les autres sous-quotients de $I_P(\delta,\nu)$. D'après la Prop. 1, on peut supposer, par récurrence sur $\|Re\ \nu\|$, que les π' ont une expression (2.3). La récurrence est justifiée, car les π' ont le même caractère infinitésimal (§ 2.1) que π , et d'après un théorème d'Harish-Chandra, les irréductibles de caractère infinitésimal donné sont en nombre fini. On obtient ainsi une expression des $J_P(\delta,\nu)$ de caractère infinitésimal donné comme combinaisons linéaires des $I_P(\delta,\nu)$; la matrice est triangulaire inversible, et donc l'indépendance (sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{C}$) des représentations irréductibles distinctes $J_P(\delta,\nu)$ implique celle des $I_P(\delta,\nu)$.

Nous aurons besoin de l'effet de la dualité (hermitienne) sur la classification de Langlands. Il existe une forme hermitienne G-invariante non dégénérée canonique sur $I_P(\delta,\nu) \times I_P(\delta,-\bar{\nu})$. ($\bar{\nu}$ désigne le conjugué de ν par rapport à $\mathfrak{a}_0^* \subset \mathfrak{a}^*$.) Elle est donnée, dans la réalisation (2.1), par

(2.4) $$\langle f,f'\rangle = \int_K \langle f(k),f'(k)\rangle_\delta\, dk\ ,$$

où $\langle\ ,\ \rangle_\delta$ est la forme hermitienne sur H_δ et dk la mesure de Haar normalisée sur K . On en déduit :

Lemme 2.- (i) *Si* $(-\nu)$ *est positif pour* P , $I_P(\delta,\nu)$ *a un unique* sous-module *irréductible* $L_P(\delta,\nu)$.

(ii) *Soit* ν *positif pour* P . *On a les isomorphismes canoniques :*

$$J_P(\delta,\nu)^h = L_P(\delta,-\bar{\nu}) = J_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu})\ .$$

Démonstration.- (i) vient de la dualité hermitienne entre $I_P(\delta,\nu)$ et $I_P(\delta,-\bar{\nu})$ et du Thm. 1 (i) appliqué à $I_P(\delta,-\bar{\nu})$. La première égalité de (ii) vient de la dualité canonique. La seconde résulte de l'existence de l'entrelacement $A(\delta,-\bar{\nu})\ :\ I_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu}) \longrightarrow I_P(\delta,-\bar{\nu})$. (Noter que $-\bar{\nu}$ est positif pour $\bar{P}$.)

3. REPRÉSENTATIONS UNITAIRES : POSITION DU PROBLÈME. BOÎTE A OUTILS

3.1. Comme on dispose maintenant d'une classification des représentations admissibles irréductibles de G (Thm. 1 ; on pourrait aussi utiliser celle de Vogan [41, 2]), la description du dual unitaire se réduit à caractériser les représentations unitaires parmi les admissibles. On commence par classifier les représentations *hermitiennes* (§ 2.1). D'après le lemme 2, et la classification de Langlands, $J_P(\delta,\nu)$ est hermitienne si, et seulement si, $J_P(\delta,\nu) \cong J_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu})$, c'est-à-dire si les données $(P = {}^{O}MAN,\delta,\nu)$ et $(\bar{P} = {}^{O}MA\bar{N},\delta,-\bar{\nu})$ sont conjuguées par G . On voit facilement qu'elles doivent alors l'être par K .

Par ailleurs, on obtient alors une forme hermitienne (presque) canonique sur $J_P(\delta,\nu)$. Fixons $k \in K$ conjuguant les données ci-dessus. Par transport de structure, k réalise un isomorphisme $J_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu}) \underset{k}{\cong} J_P(\delta,\nu)$. D'après le lemme 2, on a alors

$$J_P(\delta,\nu)^h = L_P(\delta,-\bar{\nu}) = J_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu}) \underset{(k)}{\cong} J_P(\delta,\nu) .$$

Par construction, l'isomorphisme $J_P(\delta,\nu)^h \longrightarrow J_P(\delta,\nu)$ ainsi obtenu définit bien une forme hermitienne, qui ne dépend que de k . Ainsi :

PROPOSITION 2.- (i) $J_P(\delta,\nu)$ *est* hermitienne *si, et seulement si, il existe* $k \in K$ *conjuguant les données* $({}^{O}MAN,\delta,\nu)$ *et* $({}^{O}MA\bar{N},\delta,-\bar{\nu})$.

(ii) $J_P(\delta,\nu)$ *est* unitaire *si, et seulement si, la forme hermitienne associée à* k *est définie positive ou négative.*

On remarque que - mis à part l'entrelacement, tautologique, associé à k - la forme hermitienne "canonique" est complètement décrite par l'opérateur d'entrelacement $A(\delta,-\bar{\nu})$. Pour celui-ci, on a une décomposition en produit, qui permet *a priori* d'obtenir des formules explicites pour ses coefficients matriciels K-finis [28]. Le problème d'unitarisabilité peut donc se réduire à celui, accessible au calcul, de tester la positivité de la forme hermitienne sur les différents K-types. (Il suffit en fait de considérer un nombre fini de K-types, *cf.* § 8.1.)

3.2. Boîte à outils

Certaines techniques permettent - parfois - de décider si $J_P(\delta,\nu)$, supposée hermitienne, est unitaire. (Pour un exposé plus complet, *cf.* [5, § 4].)

3.2.1. Une représentation unitairement induite d'une unitaire est unitaire (!). Ceci produit des représentations unitaires isolées par induction parabolique de représentations unitaires connues - par exemple, la représentation triviale, *cf.* [21].

Une réciproque intéressante est due à Speh [36] :

PROPOSITION 3.- *Soient* $P = MN \subset G$ *un parabolique,* π_M *une représentation hermitienne irréductible de* M , $\pi = \mathrm{ind}_{MN}^{G}(\pi_M \otimes 1)$ *la représentation unitairement induite. Elle est hermitienne. Alors, si* π *est unitaire irréductible,* π_M *est unitaire.*

La démonstration est élémentaire : soient V , W les espaces de vecteurs K-finis ($K \cap M$-finis) dans l'espace de π (de π_M). Si π_M n'est pas unitaire, on peut trouver deux sous-espaces W_+ , W_- de W , irréductibles sous $K \cap M$, sur lesquels la forme est positive (négative). La forme hermitienne sur V (unique à un scalaire réel près) est donnée par la formule (2.4). Elle est positive sur

$\mathrm{ind}_{K\cap M}^{K} W_+ \subset V$, négative sur $\mathrm{ind}_{K\cap M}^{K} W_-$. Barbasch [11] utilise systématiquement ce principe.

3.2.2. Arguments de continuité. Rappelons que l'opérateur $A(\delta,\nu) : I_P(\delta,\nu) \longrightarrow I_{\bar{P}}(\delta,\nu)$ est défini pour ν positif (§ 2.3). La formule du produit (*cf.* § 3.1) implique que ses coefficients K-finis sont des fonctions élémentaires (produits de quotients de fonctions gamma évaluées à $Q\langle\alpha,\nu\rangle + p$, où $p \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{N}$ ne dépend que de G , et α parcourt les racines de $\mathfrak{n}$ par rapport à $\mathfrak{a}$). (Pour une assertion plus précise, *cf.* [6, § 5].) On en déduit tout d'abord que $A(\delta,\nu)$ est *méromorphe* en $\nu \in \mathfrak{a}^*$; le diviseur de ses zéros et pôles est un réseau d'hyperplans. (Pour une démonstration *a priori* très simple de la méromorphie, voir [4, thm. 4.11].)

Ceci induit une décomposition du cône positif en *facettes d'équiréducibilité* : ce sont des sous-espaces de $\mathfrak{a}^*$, définis par des inégalités (et égalités !) linéaires portant sur $Re\,\nu$, à l'intérieur de chacun desquels $J_P(\delta,\nu)$ varie analytiquement. L'intersection avec l'ensemble des paramètres hermitiens donne une décomposition en facettes de l'espace des représentations hermitiennes. A l'intérieur d'une facette, la forme "canonique" (Prop. 2) ne change pas de signature, et il suffit donc de considérer un seul point pour tester l'unitarité. Ces arguments, qui remontent au moins aux travaux anciens de Kostant, Harish-Chandra et Sally, sont d'un usage constant.

3.2.3. Majorations. Les coefficients d'une représentation unitaire non triviale (... G étant supposé simple) tendent vers 0 pour $g \longrightarrow \infty$ [24]. Vu la relation entre le paramètre de Langlands et la croissance des coefficients, on en déduit :

PROPOSITION 4 [16].- *Supposons* $J_P(\delta,\nu)$ *unitaire non triviale,* G *simple. Alors* $Re\,\nu \in \mathfrak{a}_0^*$ *appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe des* ρ_Q (*cf.* 2.1) *pour tous les paraboliques* Q *de composante de Levi* $M = M_P$.

Supposons, pour simplifier, G semi-simple. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan, soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ le sous-espace réel de $\mathfrak{h}$ où les racines prennent des valeurs réelles. On dit que le caractère infinitésimal $\lambda \in \mathfrak{h}^*/W$ (§ 2.1) de π est *réel* s'il appartient au dual réel de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Si π est une représentation unitaire irréductible de caractère infinitésimal réel, on dispose d'une majoration plus fine sur λ (et donc sur le paramètre de Langlands) qui résulte de l'*inégalité de Dirac* [21], [5, § 4.5]. Mentionnons que, d'après un théorème de Vogan [6 , 1] la classification des représentations unitaires se réduit à la classification de celles dont le caractère infinitésimal est réel.

4. INDUCTION COHOMOLOGIQUE ET UNITARITÉ. LA CONJECTURE DE ZUCKERMAN

4.1. $(\mathfrak{g},K)$-cohomologie

Soit V un $(\mathfrak{g},K)$-module. Rappelons la définition de la cohomologie relative $H^\bullet(\mathfrak{g},K;V)$ [16]. Considérons le complexe $C^q(\mathfrak{g};V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda^q\,\mathfrak{g},V)$ muni de la différentielle d définissant la cohomologie d'algèbre de Lie. Soit $i(X) : C^q \longrightarrow C^{q-1}$ le produit intérieur par $X \in \mathfrak{g}$. Le groupe K opère dans C^q par le produit de ses actions sur $\mathfrak{g}$ et V. On note $C^q(\mathfrak{g},K;V)$ le complexe des formes invariantes par K, et annulées par $i(X)$ pour $X \in \mathfrak{k}$. Sa cohomologie est notée $H^\bullet(\mathfrak{g},K;V)$; on l'appelle $(\mathfrak{g},K)$-cohomologie.

Si E est une représentation de dimension finie de G, on peut aussi considérer la cohomologie "à coefficients" $H^\bullet(\mathfrak{g},K\,;V\otimes E)$.

Plus généralement, ces définitions s'étendent si l'on remplace K par un sous-groupe fermé H et si V est un $(\mathfrak{g},H)$-module, i.e. satisfait les conditions (1)-(3) du § 2.1 pour $(\mathfrak{g},H)$.

L'étude, à l'aide de la théorie des représentations, de la cohomologie des groupes arithmétiques [16], ainsi que les applications de la théorie des formes automorphes à la cohomologie (étale et complexe) des variétés de Shimura [17] motivent la question suivante : quels sont les modules d'Harish-Chandra irréductibles unitaires dont la $(\mathfrak{g},K)$-cohomologie n'est pas nulle ? Leur construction nécessite un outil nouveau.

4.2. Induction cohomologique

Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ telle que

(1) $\vartheta\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$;

(2) $\mathfrak{q}$ et sa conjuguée complexe $\bar{\mathfrak{q}}$ sont opposées : $\mathfrak{q}\cap\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l}$ est un facteur de Levi de $\mathfrak{q}$.

Une telle algèbre est dite, par abus de langage, *parabolique ϑ-stable*. D'après (2), $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0\otimes\mathbb{C}$ pour une sous-algèbre $\mathfrak{l}_0$ de $\mathfrak{g}_0$. Soit L le normalisateur de $\mathfrak{l}_0$ dans G ; L satisfait les conditions du § 2.1 ; L est ϑ-stable et $K_L = K\cap L$ en est un sous-groupe compact maximal.

Exemple.- $G = GL(2n,\mathbb{R})$, $L = GL(n,\mathbb{C})$ plongé dans G de la façon usuelle. Noter que L n'est pas un sous-groupe de Levi d'un parabolique réel de G !

On ne peut donc, en général, utiliser l'induction parabolique pour produire des représentations de G à partir de celles de L. Néanmoins, la construction par Schmid de la série discrète à l'aide de la cohomologie de Dolbeault, ainsi que la méthode des orbites [7], suggèrent la possibilité d'induire à G des représentations de L. Le problème est résolu par le foncteur d'*induction cohomologique* défini en 1977 par G. Zuckerman.

Pour le décrire, on supposera dans ce § G *connexe* ; K, L, K_L le sont alors aussi (pour le cas général, *cf.* [2, ch. 6]). Soit $\mathcal{M}(\mathfrak{g},H)$ la catégorie des $(\mathfrak{g},H)$-modules, où H est fermé connexe dans K. Soit V un $\mathfrak{g}$-module. Un vecteur de V est H-*fini* s'il est contenu dans un sous-$\mathfrak{h}$-module de dimension finie de V qui s'intègre en une représentation de H. On définit alors des foncteurs

$$\Gamma^i : \mathcal{M}(\mathfrak{g},K_L) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$$

de la façon suivante : Γ^o associe au $(\mathfrak{g},K_L)$-module V le $(\mathfrak{g},K)$-module formé des vecteurs K-finis de V. Il est exact à gauche. On définit Γ^i, à l'aide de résolutions injectives dans $\mathcal{M}(\mathfrak{g},K_L)$, comme le i-ième foncteur dérivé de Γ^o.

Soit maintenant V_L un $(\mathfrak{l},K_L)$-module. On définit le "module produit" W, une représentation de $\mathfrak{g}$, par

$$W \underset{\text{def}}{=} \mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} V_L = (\mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(U(\mathfrak{g}),V_L))_{K_L}$$

où $(\ )_{K_L}$ désigne l'espace des vecteurs K_L-finis de $(\ )$, et V_L est étendu à $\mathfrak{q}$ par l'action nulle du radical unipotent $\mathfrak{u}$. Le foncteur

$$\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}(\mathfrak{l},K_L) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{g},K_L)$$

est exact. On définit alors

$$\mathcal{R}^i : \mathcal{M}(\mathfrak{l},K_L) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$$

par

$$\mathcal{R}^i(V_L) = \Gamma^i(\mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(V_L \otimes \Lambda^{\max}\mathfrak{u})) ,$$

où $\Lambda^{\max}$ désigne le produit extérieur en degré $\dim(\mathfrak{u})$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$ une sous-algèbre de Cartan ; ainsi $\mathfrak{h}^*/W(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$ paramètre les caractères de $Z(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{h}^*/W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ ceux de $Z(\mathfrak{g})$ (§ 2.1). Soit $\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ les racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{u}$, $\rho(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{h}^*$ leur demi-somme. Les propriétés suivantes sont de démonstration facile [2].

PROPOSITION 5.- *Soit* V_L *un* $(\mathfrak{l},K_L)$*-module d'Harish-Chandra.*

(i) *Pour tout* i, $\mathcal{R}^i V_L$ *est un* $(\mathfrak{g},K)$*-module d'Harish-Chandra.*

(ii) *Pour* $i > S = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$, $\mathcal{R}^i V_L = 0$.

(iii) *Supposons que* V_L *admet un caractère infinitésimal, de paramètre* $\lambda - \rho(\mathfrak{u})$. *Alors* V *admet un caractère infinitésimal, de paramètre* λ.

On renvoie à [2, Ch. 6] pour une étude détaillée des $\mathcal{R}^i$. Le résultat suivant est plus difficile :

THÉORÈME 3 (Speh - Vogan [38] ; voir aussi [42, Thm. 1.2]).- *Soit* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. *Soit* V_L *un* $(\mathfrak{l},K_L)$*-module irréductible, de caractère infinitésimal* $\lambda - \rho(\mathfrak{u})$. *Supposons que*

(A) $\mathrm{Re}\langle\alpha,\lambda\rangle \geq 0$ *pour tout* $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$.

Alors $\mathcal{R}^S V_L = 0$ $(0 \leq i < S)$, *et* $\mathcal{R}^S V_L$ *est irréductible ou nul. Si de plus,*

(B) $\mathrm{Re}\langle\alpha,\lambda\rangle > 0$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$,
$R^S V_L$ *est irréductible.*

4.3. Modules de Zuckerman

On décrit maintenant les modules de Zuckerman associés au *système de coefficients trivial* (§ 4.1). Le cas général n'est qu'un peu plus compliqué : on renvoie à l'article très lisible de Vogan et Zuckerman [43].

Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre parabolique ϑ-stable, L associé à $\mathfrak{q}$ (§ 4.2). On définit le *module de Zuckerman* $A_{\mathfrak{q}}$ par :

$$A_{\mathfrak{q}} = R^S\,\mathbb{C} \quad , \quad S = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) \ .$$

Bien sûr, $\mathbb{C}$ désigne la représentation triviale de L .

THÉORÈME 4 (Vogan - Zuckerman [43]).- *Soit* $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$, $q = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

(i) $A_{\mathfrak{q}}$ *est irréductible.*

(ii) *On a* $R^i\,\mathbb{C} = 0$ *pour* $i < S$ (*et donc* $i \neq S$).

(iii) $H^i(\mathfrak{g},K,A_{\mathfrak{q}}) \cong H^{i-R}(\mathfrak{l}\ ,K_L\,;\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{K_L}(\Lambda^{i-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}),\mathbb{C})$.

(iv) *Soit* V *un* $(\mathfrak{g},K)$-*module* unitaire *irréductible tel que* $H^i(\mathfrak{g}\ ,K\,;V) \neq 0$ *pour quelque* $i \in [0,q]$. *Alors il existe une sous-algèbre parabolique* ϑ-*stable* $\mathfrak{q}$ *telle que* $V \cong A_{\mathfrak{q}}$.

(On a en fait des résultats plus précis : par exemple, la décomposition de V restreint à K .)

Exemples.- . Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$, $A_{\mathfrak{q}} = \mathbb{C}$.

. Si G a un sous-groupe de Cartan compact $T \subset K$, et donc, d'après Harish-Chandra, une série discrète, toute sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{t}$ est ϑ-stable. On obtient ainsi des modules $A_{\mathfrak{b}}$: ils appartiennent à la série discrète, et on obtient ainsi toutes les représentations de la série discrète dont le caractère infinitésimal est celui du module trivial.

En général, les modules de Zuckerman sont des représentations "nouvelles" sans description géométrique simple.

On remarque que (i) et (ii) résultent du Thm. 3 (le caractère infinitésimal de la représentation triviale est $\rho_{\mathfrak{l}} = \rho_{\mathfrak{g}} - \rho(\mathfrak{u})$, où $\rho_{\mathfrak{l}}$, $\rho_{\mathfrak{g}}$ sont les demi-sommes de racines pour des algèbres de Borel compatibles). Le reste est démontré dans [43].

4.4. Induction cohomologique et unitarité

L'induction parabolique ordinaire respecte les représentations unitaires ; on sait, d'après la description de l'induction *cohomologique* dans la classification de Langlands [2], qu'elle respecte les représentations tempérées. On s'attend donc à ce qu'elle respecte l'unitarité. C'est vrai, sous des hypothèses convenables :

THÉORÈME 5 (Vogan) (Les notations sont celles du Thm. 3).- (i) *Supposons que* V_L *est un* $(\mathfrak{l},K_L)$*-module unitaire irréductible de caractère infinitésimal* $\lambda - \rho(\mathfrak{u})$, *et que* λ *vérifie* (A). *Alors* $R^S\, V_L$ *est unitaire.*

(ii) *Supposons de plus que* λ *vérifie* (B). *Alors si* $R^S\, V_L$ *est unitaire,* V_L *l'est aussi.*

Wallach [46] a donné une démonstration différente de la partie (i). On comparera la partie (ii) à la Prop. 3, § 3.2. Dans le § 6, on donnera quelques indications sur la démonstration de la partie (i) par Vogan.

COROLLAIRE.- *Les modules de Zuckerman* $A_{\mathfrak{q}}$ *sont unitaires.*

En effet, leurs caractères infinitésimaux vérifient (A) (§ 4.3). Plus généralement, ceci s'applique aux représentations $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ de [43], qui ont de la cohomologie à coefficients non triviaux. Ce corollaire avait été conjecturé par Zuckerman.

5. LE THÉORÈME DES SIGNATURES

5.1. La démonstration du Thm. 5 repose sur un résultat très simple concernant la signature d'une représentation hermitienne. Soit V un $(\mathfrak{g},K)$-module de longueur finie muni d'une forme hermitienne invariante non dégénérée $<\ ,\ >$. On a $V = \bigoplus_{\mu\in\hat{K}} V_\mu$, la composante isotypique V_μ étant de dimension finie. Soit $(d(\mu)p(\mu), d(\mu)q(\mu))$ la signature de la forme sur V_μ, $d(\mu)$ étant le degré de μ. La *signature de* $<\ ,\ >$ est le couple (p,q) de fonctions à valeurs entières sur $\hat{K}$. Le K-*caractère* (formel) $\Theta_K(V)$ est la fonction $m(\mu) = p(\mu) + q(\mu)$, i.e. la multiplicité de μ dans V.

THÉORÈME 6 (Vogan [42]).- *Soit* V *un* $(\mathfrak{g},K)$*-module de longueur finie muni d'une forme hermitienne non dégénérée* $<\ ,\ >$.

(i) *Il existe des* $(\mathfrak{g},K)$*-modules irréductibles tempérés* $Z_1,\dots,Z_p$ *et des entiers* r_i^+, r_i^- $(i = 1,\dots p)$ *tels que la signature de* $<\ ,\ >$ *soit égale à*

$$\left(\sum_{i=1}^{p} r_i^+\, \Theta_K(Z_i)\ ,\ \sum_{i=1}^{p} r_i^-\, \Theta_K(Z_i)\right).$$

(ii) *On peut supposer les* Z_i *de caractère infinitésimal* réel (§ 3.2.3). *Cette expression est alors unique.*

Le fait que $m = p+q$ admet une expression du type (i) résulte du Thm. 2 (déformer les $I_P(\delta,\nu)$ en $I_P(\delta,0)$: $I_P(\delta,0)$ est tempérée et cela ne change pas le K-caractère). La partie (ii) résulte du fait que les représentations tempérées de caractère infinitésimal réel ont des K-caractères linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, une conséquence bien connue des résultats de Knapp - Zuckerman et Vogan ; *cf.* [42, Thm. 3.40]. On va esquisser la démonstration de la partie (i).

Tout d'abord, un lemme analogue à la théorie de Witt des formes quadratiques :

Lemme 3.- Soit V *satisfaisant les hypothèses du Thm. 6, et soit* (p,q) *la signature de* V *. Il existe alors des* $(\mathfrak{g},K)$*-modules irréductibles* X_i $(i=1,\dots,r)$ *de signature* (p_i,q_i) *,* Y_j $(j=1,\dots s)$ *de K-caractère* m_j *tels que*

(i) *Dans le groupe de Grothendieck des* $(\mathfrak{g},K)$*-modules de longueur finie,*

$$V = \sum_{i=1}^{r} X_i + \sum_{j=1}^{s} (Y_j + Y_j^h) .$$

(ii) $$(p,q) = (\sum_i p_i + \sum_j m_j , \sum_i q_i + \sum_j m_j) .$$

La démonstration est élémentaire. Joint au Thm. 2, ceci réduit le problème au cas où V est irréductible. Rappelons alors les constructions du § 2.3. On peut écrire $V = J_P(\delta,\nu) \hookrightarrow I_{\bar{P}}(\delta,\nu) \underset{\text{def}}{=} W$. (On désignera ici par V , W , $J_P(\delta,\nu)$, etc., les *modules d'Harish-Chandra* fermés des vecteurs K-finis dans les représentations de G correspondantes.) Soit alors $W^h = I_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu}) \underset{(k)}{\cong} I_P(\delta,\nu)$; il s'identifie au dual hermitien de W . D'après la construction des induites (§ 2.2), les espaces de W et W^h s'identifient à des espaces *indépendants de* ν de fonctions K-finies sur K . Si ν est positif, on a une application analytique en ν :

$$W^h = I_{\bar{P}}(\delta,-\bar{\nu}) \underset{(k)}{\cong} I_P(\delta,\nu) \xrightarrow[A(\delta,\nu)]{} I_{\bar{P}}(\delta,\nu) = W .$$

Lemme 4.- Soit $W_t = I_{\bar{P}}(\delta,-t\,\bar{\nu})$ $(t \in \mathbb{R})$ *. Il existe une famille analytique* $A(t)$ $(t \geq 0)$ *d'applications* $W^h \longrightarrow W$ *, commutant à l'action de* K *, telles que :*

(i) *Pour tout* $t \geq 0$ *,* $A(t) : W_t^h \longrightarrow W_t$ *est un morphisme de* $(\mathfrak{g},K)$*-modules.*

(ii) *Pour* $t \geq 0$ *,* $A(t) \neq 0$ *; pour* $t > 0$ *, l'image de* $A(t)$ *est égale à* $J_P(\delta,t\,\nu)$.

(iii) W_t^h $(t \geq 0)$ *est muni d'une forme hermitienne non nulle* $\langle\ \rangle_t$ *donnée par* $\langle x,y\rangle_t = \langle x,A(t)y\rangle$.

(iv) *Le noyau de* $\langle\ ,\ \rangle_t$ *est le noyau de* $A(t)$.

En particulier, $\langle\ ,\ \rangle_1$ *s'identifie à une forme hermitienne non nulle sur* $J_P(\delta,\nu)$.

Démonstration.- L'application $W^h \longrightarrow W$ exhibée avant le lemme jouit des propriétés (i), (ii), (iii) pour $t > 0$ d'après le § 2.2. On sait de plus (§ 3.2.2) qu'elle est méromorphe en $\nu \in \mathfrak{a}^*$. On peut alors la multiplier par une puissance convenable de t pour obtenir l'analyticité en 0 , et la condition (ii) ; (i) est alors vrai en 0 par prolongement analytique. La propriété (iv) est évidente.

5.2. Filtration de Jantzen

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, E^h son dual hermitien (§ 2.1), $<\ ,\ >_t$ une famille analytique de formes hermitiennes sur E définies pour t réel au voisinage de 0 et non dégénérées pour $t \neq 0$. Soit E_n le sous-espace de E formé des vecteurs e tels qu'il existe un germe de fonction analytique f_e de t au voisinage de 0 , à valeurs dans E , tel que :

(5.1) (a) $f_e(0) = e$.

(b) Pour tout $e' \in E$, $<f_e(t),e'>_t$ est d'ordre $\geq n$ en 0 . On obtient ainsi une filtration $E = E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_N = \{0\}$ sur E . On définit une forme hermitienne $<\ ,\ >^n$ sur E_n par $<e,e'>^n = \lim\limits_{t \to 0} t^{-n} <f_e(t),f_{e'}(t)>_t$, f_e et $f_{e'}$ vérifiant (a), (b). Il est clair que cela ne dépend pas des relèvements f_e , $f_{e'}$.

PROPOSITION 6 (Jantzen [26, 5.1]).- *Le noyau de* $<\ ,\ >^n$ *est égal à* E_{n+1} . *En particulier,* $<\ ,\ >^n$ *définit une forme hermitienne non dégénérée sur* E_n/E_{n+1} , *et* E_1 *est le noyau de* $<\ ,\ >_0$.

PROPOSITION 7 (Vogan).- *Soit* (p_n,q_n) *la signature de* $<\ ,\ >^n$, (p_t,q_t) *celle de* $<\ ,\ >_t$. *Alors :*

(i) *Pour* $t > 0$ *voisin de* 0 ,

$$(p_t,q_t) = \left(\sum_{n=0}^{N} p_n \ , \ \sum_{n=0}^{N} q_n \right) .$$

(ii) *Pour* $t < 0$ *voisin de* 0 ,

$$(p_t,q_t) = \left(\sum_{n \text{ pair}} p_n + \sum_{n \text{ impair}} q_n \ , \ \sum_{n \text{ impair}} p_n + \sum_{n \text{ pair}} q_n \right) .$$

Démonstration.- Soit $\mathcal{O}$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques d'une variable réelle en 0 , $\mathcal{E} = \mathcal{O} \otimes E$, $\mathcal{E}^h = \mathcal{O} \otimes E^h$. On identifie $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^h$ aux germes de fonctions analytiques à valeurs dans E , E^h . La forme $<\ ,\ >_t$ définit une application de $\mathcal{O}$-modules $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^h$, et une forme sesquilinéaire $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}$ qu'on notera $<\ ,\ >$; $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^h$ sont des $\mathcal{O}$-modules libres, et le déterminant de A (pour un choix de bases) est non nul. En appliquant le théorème des diviseurs élémentaires à l'image de A dans $\mathcal{E}^h$, on voit qu'il existe des bases f_i , g_j de $\mathcal{E}$ telles que

$$<f_i,g_j> = t^{n_i} \delta_{ij} \quad , \quad n_i \in \mathbb{N} . \tag{5.2}$$

Soit $\mathcal{E}_n = \{f \in \mathcal{E} : <f,g>$ est d'ordre au moins n en 0 pour tout $g \in \mathcal{E}\}$. Par définition, $E_n = \mathcal{E}_n(0)$. Si $f \in \mathcal{E}$, on peut écrire $f = \Sigma\, x_i\, f_i$, $x_i \in \mathcal{O}$. D'après (5.2), $f \in \mathcal{E}_n$ si, et seulement si, $x_i(0) = 0$ pour $n_i < n$. Donc E_n est engendré par les $f_i(0)$, $n_i \geq n$. Comme (5.2) est symétrique en les variables f et g , il l'est aussi par les $g_i(0)$, $n_i \geq n$. La relation (5.2) implique alors que $<\ ,\ >^n$ a pour noyau exactement E_{n+1}. Pour la Prop. 7, choisir e_i^n $(i = 1,\dots p_n)$ dans E_n de telle sorte que $<e_i^n, e_j^n>^n = \delta_{ij}$. Si on les relève en $f_i^n \in \mathcal{E}_n$, on a alors

$$\begin{aligned} <f_i^n, f_j^m> &\equiv t^n \delta_{ij} \mod t^{n+1} \mathcal{O} && (m = n) \\ &\equiv 0 \mod t^{\sup(m,n)} \mathcal{O} && (m \neq n)\ . \end{aligned}$$

Remplaçant, pour $t > 0$, f_i^n par $h_i^n = t^{-n/2} f_i^n$, on voit que la matrice $<h_i^n(t), h_j^n(t)>_t$ est de la forme $1 + t^{1/2} X$, X à coefficients dans $\mathcal{O}$. Pour $t > 0$ voisin de 0, $<\ ,\ >_t$ est donc positive sur l'espace, de dimension $\Sigma\, p_n$, engendré par les h_i^n. On en déduit (i) puisque $\dim E = \Sigma \dim(E_n/E_{n+1})$. Pour (ii), considérer $<\ ,\ >_{-t}$.

5.3. Pour démontrer le Thm. 6 (i), on considère W_t^h muni de sa famille analytique de formes hermitiennes. Les considérations du § 3.2.2 montrent que W_t^h est irréductible sauf pour un nombre fini de points $t_i \in [0,1]$. En particulier, d'après le lemme 4, $<\ ,\ >_t$ est non dégénérée pour $t \neq t_i$. Bien sûr, W^h est de dimension infinie, mais on peut appliquer les constructions du § 5.2 aux composantes isotypiques. On a alors :

PROPOSITION 8.- (i) *Pour tout* $t > 0$, *la filtration de Jantzen*

$$W_t^h = W_t^{h,0} \supset W_t^{h,1} \supset \dots \supset W_t^{h,N}\ , \quad N = N(t)$$

est une filtration par des $(\mathfrak{g},K)$*-modules.*

(ii) $W_t^{h,0}/W_t^{h,1}$ *est isomorphe à* $J_P(\delta, t\nu)$.

(iii) *La forme hermitienne non dégénérée* $<\ ,\ >^n$ *sur* $W_t^{h,n}/W_t^{h,n+1}$ *est invariante ; soit* (p_n, q_n) *sa signature.*

(iv) *Pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit, la forme hermitienne* $<\ ,\ >_{t+\varepsilon}$ *est de signature* $(\Sigma\, p_n, \Sigma\, q_n)$ *; la forme* $<\ ,\ >_{t-\varepsilon}$ *est de signature* $(\sum_m (p_{2m} + q_{2m+1}), \sum_m (p_{2m+1} + q_{2m}))$.

Démonstration.- Pour (i), considérer W_t^h comme la limite inductive de sous-espaces de dimension finie stables par K et construire ainsi la filtration de Jantzen. Si $v \in W^h$ et s'il existe $f_v \in \mathcal{O} \otimes E$ (où E est un sous-espace de dimension finie de W^h) telle que $<f_v(t), w>_t \equiv 0 \mod t^n \mathcal{O}$, $w \in W^h$, et $f_v(0) = v$, la fonction $f_{Xv}(t) = X f_v(t)$ vérifie les mêmes conditions pour Xv. On en déduit (i) ; (ii) résulte de la Prop. 6 et du Lemme 4 (ii) - (iv) ; (iii) se démontre comme (i), et (iv) résulte de la Prop. 7.

Rappelons que, d'après la Prop. 1, tout sous-quotient irréductible de W_t^h pour $t < 1$, ou de W_1^h différent de $J_P(\delta,\nu)$, a un paramètre de Langlands de longueur inférieure à celui de $J_P(\delta,\nu)$. On démontre alors le Thm. 6 (i) pour $J_P(\delta,\nu)$ en supposant qu'il est vrai pour tout $J_{P'}(\delta',\nu')$ tel que

$\|\mathrm{Re}\,\nu'\| < \|\mathrm{Re}\,\nu\|$. (Noter que pour $\|\mathrm{Re}\,\nu\| = 0$, on a $\nu = 0$, $P = G$ et $J_P(\delta,\nu) = \delta$ est tempérée !) Distinguons les cas suivants :

(1) W_t est irréductible pour $0 \le t \le 1$. Alors, par déformation (§ 3.2.2), la signature de $\langle\ ,\ \rangle_1$ sur $W_1^h = J_P(\delta,\nu)$ est la même que celle de $\langle\ ,\ \rangle_o$ sur W_o^h , une représentation tempérée.

(2) W_1 est *réductible*. Soit alors, comme dans la Prop. 8, (p_n,q_n) la signature de $\langle\ ,\ \rangle^n$ sur $W_1^{h,n}/W_1^{h,n+1}$. Soit (P_1^-,Q_1^-) la signature de $\langle\ ,\ \rangle_{1-\varepsilon}$ pour ε petit. On a, d'après la Prop. 8 (iv) :

$$(5.3) \qquad (P_1^-,Q_1^-) = (p_o,q_o) + \sum_{m>0} (p_{2m},q_{2m}) + \sum_{m\geq 0} (q_{2m+1},p_{2m+1}) \ .$$

Mis à part (p_o,q_o) , tous les termes sont des signatures de modules d'Harish-Chandra dont le paramètre de Langlands est de longueur inférieure à celui de $J_P(\delta,\nu)$. On en déduit par récurrence (et à l'aide du Lemme 3), qu'ils s'expriment comme combinaisons linéaires de K-caractères tempérés. Donc il en est de même pour $J_P(\delta,\nu) = W_1^{h,o}/W_1^{h,1}$.

(3) W_1 est *irréductible*, et il existe $t_o \in [0,1[$ tel que W_{t_o} est réductible. On choisit t_o maximal. La signature de $\langle\ ,\ \rangle_1$ est alors celle de $\langle\ ,\ \rangle_{t+\varepsilon}$: on applique alors la Prop. 8 à droite du point t_o .

Il reste à justifier cette récurrence portant sur la longueur (réelle !) du paramètre de Langlands. L'argument de Vogan repose sur la théorie du K-type minimal. On peut aussi donner un argument combinatoire, basé sur les considérations du § 3.2.2. D'après le théorème de Vogan cité à la fin du § 3.2.3, on peut supposer le caractère infinitésimal de $J_P(\delta,\nu)$ *réel*. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de ${}^o\mathfrak{m}$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ est alors une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le caractère infinitésimal de $I_P(\delta,\nu)$, avec les identifications d'usage, est $\lambda_\delta + \nu$ où $\lambda_\delta \in \mathfrak{t}^*$ est celui de δ . La représentation δ doit être une "limite de série discrète" [31] et son caractère infinitésimal λ_δ est dans un réseau fixe de $\mathfrak{t}^* \cap \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (notations 3.2.3). D'après les arguments de 3.2.2, on peut se ramener à considérer $J_P(\delta,\nu)$ pour ν dans un réseau de $\mathfrak{a}_o^*$ rencontrant toutes les facettes. La démonstration qu'on a donnée nécessite deux types d'opérations sur $J_P(\delta,\nu)$:

(a) remplacer $J_P(\delta,\nu)$ par un autre sous-quotient $J_{P'}(\delta',\nu')$ de $J_P(\delta,\nu)$. Il est facile de voir que $\nu' \in (\mathfrak{a}_o')^*$ est alors de nouveau dans un réseau indépendant des données ;

(b) déformer $I_P(\delta,\nu)$ à travers un point de réductibilité. On peut changer un peu l'argument et déformer jusqu'au centre d'une facette adjacente. Le point de réductibilité est de nouveau dans un réseau fixe.

On voit ainsi que la récurrence a lieu dans un ensemble discret de données (δ,ν) , ce qui termine la démonstration.

6. SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5

Rappelons les données : V_L est un $(\mathfrak{l},K_L)$-module de caractère infinitésimal $\lambda - \rho(\mathfrak{u})$, avec

$$\text{(A)} \qquad \mathcal{R}e \langle\alpha\,,\lambda\rangle \geq 0 \quad , \quad \alpha \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}) \ .$$

D'après le Thm. 3, on sait que $V = \mathcal{R}^S\, V_L$ est irréductible ou nul.

6.1. La première étape consiste à montrer que V reçoit une forme hermitienne non dégénérée naturelle. La démonstration repose sur le théorème de dualité suivant :

THÉORÈME 7.- *Soit* V_L *un* $(\mathfrak{l},K_L)$*-module. Il existe alors un isomorphisme naturel :*

$$\Gamma^i(V_L)^h \cong \Gamma^{2S-i}(V_L^h) \ .$$

Il est facile de voir que le théorème est équivalent à l'assertion analogue pour les duaux (non hermitiens). Ce théorème avait été conjecturé par Zuckerman ; des démonstrations ont été données, après des travaux de Zuckerman et P. Trauber, par Enright, Wallach, Knapp - Vogan, Y. Benoist, D. Wigner, Duflo - Vergne [22, 29, 20]. On renvoie à la note de Duflo - Vergne pour une preuve simple et élégante.

Le Thm. 7 ne produit pas immédiatement une forme hermitienne sur $\mathcal{R}^S\, V_L = \Gamma^S\, \mathrm{pro}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(V_L \otimes \Lambda^{\max}\, \mathfrak{u})$, car le module produit n'est pas hermitien. Il faut faire appel aux "modules induits", *cf.* [42, § 5].

6.2. La seconde étape consiste à montrer que l'induction cohomologique est compatible avec l'expression des signatures données par le Thm. 6 (i). Soit $(p_L,0)$ la signature de la forme hermitienne - supposée positive - sur V_L . Ecrivons $p_L = \Sigma\, r_i^+\, \Theta_{K_L}(Z_i^L)$, $r_i^+ \in \mathbb{Z}$, où les Z_i^L sont des représentations irréductibles tempérées de L , de caractère infinitésimal réel. La démonstration du Thm. 6, jointe à des résultats de Speh - Vogan [38], montre que la signature de la forme hermitienne obtenue au § 6.1 sur V s'écrit

$$(p,q) = (\Sigma\; s_i^+\, \Theta_K(Z_i)\ ,\ s_i^-\, \Theta_K(Z_i))\ ,$$

Z_i étant induite de Z_i^L . Il s'agit de montrer que $s_i^+ = r_i^+$, $s_i^- = 0$. (On ne le sait pas *a priori* : il faudrait connaître les filtrations de Jantzen après induction et - plus difficile - les signes des formes de Jantzen sur les sous-quotients hermitiens.)

L'argument final utilise alors le fait qu'il suffit de tester les signatures sur les K-*types minimaux* [41, 2] des Z_i : on montre que, sur les K-types minimaux, les signatures sont contrôlées par celles des Z_i .

7. LE CAS DE GL(n)

On considère $GL(n,F)$ pour $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Vogan traite aussi le cas où F est le corps des quaternions.) On va décrire la classification des représentations unitaires obtenue par Vogan [44] ; Tadič [39] a proposé une démonstration différente, basée sur l'extension conjecturée d'un théorème prouvé par Bernstein [15, Thm. 5.4] dans le cas p-adique. On va réduire la classification du dual unitaire à celle, supposée connue du lecteur, des représentations *de carré intégrable* (= unitaires, dont les coefficients sont de carré intégrable modulo le centre). Notre présentation des résultats est celle de Tadič.

Notation : $G_n = GL(n)$. On écrira parfois G_n pour $G_n(F)$.

7.1. Représentations tempérées

D'après Harish-Chandra, $GL(n,F)$ n'a de représentations de carré intégrable que s'il a un sous-groupe de Cartan compact modulo le centre. Ceci implique $n = 1$ $(F = \mathbb{C})$, $n = 1,2$ $(F = \mathbb{R})$. Pour $n = 1$, on considère donc des caractères *unitaires* de $F^{\times}$; pour les représentations de carré intégrable de $GL(2,\mathbb{R})$, voir [25]. On note δ une représentation de carré intégrable de $G_n(F)$.

Si $P : n = n_1 + \ldots + n_r$ $(n_i > 0)$ est une partition de n , on note P le parabolique associé, formé de matrices triangulaires supérieures par blocs. Son sous-groupe de Levi est $M = G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_r}$. Si π_i est une représentation irréductible de G_{n_i} , on note $\pi = \pi_1 \times \ldots \times \pi_r$ la représentation unitairement induite $\mathrm{ind}_P^G(\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r \otimes 1)$. On sait (§ 2.2) que les représentations tempérées sont des sous-modules de $\mathrm{ind}_P^G(\delta)$, δ étant une représentation de carré intégrable de M .

PROPOSITION 9 (Speh [35], Wallach [45]).- (i) *Soit* $M = G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_r}$ *un sous-groupe de Levi d'un parabolique de* G , δ_i *une représentation de carré intégrable de* G_{n_i} . *Alors* $\pi = \delta_1 \times \ldots \times \delta_r$ *est irréductible.*

(ii) *Si* π *une représentation unitaire* π *peut s'écrire ainsi de deux façons différentes, les* n_i *et les* δ_i *sont égaux à permutation près.*

D'après les résultats généraux (§ 2.2), toute représentation tempérée est de ce type : cela classifie le dual tempéré.

7.2. Modules de Speh

Soit $P \subset G$ un parabolique *homogène* : $n_i = n_j = r$ pour tout i . Soit δ une représentation de carré intégrable de G_r . (Donc $r = 1 (F=\mathbb{C})$, $r = 1$ ou 2 $(F=\mathbb{R})$). Soit $n = mr$. On note $\delta |\ |^s$ $(s \in \mathbb{C})$ la représentation de G_r donnée par $\delta(g)\ |\det g|_F^s$, où $|x|_{\mathbb{R}} = |x|$ et $|z|_{\mathbb{C}} = z\bar{z}$. Considérons la représentation

$$\pi = \delta |\ |^{\frac{m-1}{2}} \times \delta |\ |^{\frac{m-3}{2}} \times \ldots \times \delta |\ |^{-\left(\frac{m-1}{2}\right)} .$$

D'après le Thm. 1, elle a un unique quotient irréductible. On le note $J(\delta,m)$.

THÉORÈME 8 (Speh [37]).- *La représentation* $J(\delta,m)$ *est unitaire.*

Si $r = 1$, $J(\delta,m)$ n'est autre que la représentation $\delta(\det g)$ de $GL(n,F)$ - une représentation unitaire ! Le cas nouveau est donc $F = \mathbb{R}$, $r = 2$. Il avait été pressenti par Gelfand. Si le caractère central de δ est un caractère algébrique de $F^\times$, $J(\delta,m)$ a de la cohomologie non triviale dans un certain système de coefficients E , représentation rationnelle de $GL(n)$ déterminée par (δ,m) . C'est ainsi que Speh démontrait la conjecture de Zuckerman (§ 4) pour $GL(n)$. Réciproquement, la preuve de la conjecture de Zuckerman - i.e. le Thm. 5 - implique le Thm. 8 : il suffit de calculer les paramètres de Langlands des représentations $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ (§ 4.4), ce qui est fait dans [43]. La démonstration de Speh [37] faisait appel à la théorie des formes automorphes. Notons qu'elle implique l'unitarité des représentations analogues aux $J(\delta,m)$ pour les groupes p-adiques, démontrée par Tadić [40].

7.3. Séries complémentaires

Soit $J = J(\delta,m)$ un module de Speh pour $G_n(F)$, $n = rm$. Considérons la représentation $J\,|\;|^{\alpha} \times J\,|\;|^{-\alpha}$, de $G_{2n}(F)$, pour α *réel*. Il est facile de voir qu'elle est hermitienne.

THÉORÈME 9 [44], [39].- *Pour* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $J(\delta,m)\,|\;|^{\alpha} \times J(\delta,m)\,|\;|^{-\alpha}$ *est irréductible et unitaire.*

Pour $F = \mathbb{C}$, ceci est dû à E. Stein. Notons que l'unitarité résulte, par déformation à partir de $\alpha = 0$, de l'irréductibilité (§ 3.2.2). Soit $J(\delta,m,\alpha)$ la représentation ainsi définie.

7.4. Représentations unitaires

THÉORÈME 10 [44], [39].- (i) *Soit* π *une représentation unitaire de* $G_n(F)$. *Alors il existe une partition* $n = m_1r_1 + \ldots + m_sr_s + 2(m_{s+1}r_{s+1} + \ldots + m_tr_t)$, *des représentations de carré intégrable* δ_i *de* $G_{r_i}(F)$ $(i = 1,\ldots t)$, *et des réels* $0 < \alpha_i < \frac{1}{2}$ $(i = s+1,\ldots,t)$ *tels que*

$$\pi = J(\delta_1,m_1) \times \ldots \times J(\delta_s,m_s) \times J(\delta_{s+1},m_{s+1},\alpha_{s+1}) \times \ldots \times J(\delta_t,m_t,\alpha_t) .$$

(ii) *Cette expression est unique, aux permutations près des* (δ_i,m_i) $(i \leq s)$ *et des* (δ_j,m_j,α_j) $(j > s)$.

Indiquons brièvement comment déduire (i) des résultats, formulés différemment, de Vogan. Considérons le cas, plus difficile, de $GL(n,\mathbb{R})$. Vogan obtient les représentations unitaires par induction cohomologique à partir de représentations d'un sous-groupe L de $GL(n,\mathbb{R})$ de la forme $\underline{L}(\mathbb{R})$, $\underline{L} \subset GL(n)$ étant un sous-groupe de Levi de $GL(n,\mathbb{C})$. On a $L \cong \Pi\, GL(n_i,\mathbb{C}) \times \Pi\, GL(n_j,\mathbb{R})$; il se plonge dans un sous-groupe de Levi $\Pi\, G_{2n_i}(\mathbb{R}) \times \Pi\, G_{n_j}(\mathbb{R})$ de $G_n(\mathbb{R})$. En composant des inductions paraboliques et cohomologiques, il suffit alors de vérifier le fait suivant. Rappelons [25] que si χ est un caractère unitaire de $\mathbb{C}^\times$ tel que $\chi(z) \neq \chi(\bar{z})$, la fonctorialité de Langlands lui associe une représentation de carré intégrable $\delta = \pi\ (\chi)$ de $GL(2,\mathbb{R})$.

Lemme 5.- *Soient* $L = GL(m,\mathbb{C})$ *plongé dans* $GL(2n,\mathbb{R})$, $\delta = \pi\ (\chi)$ *où* χ *est un caractère unitaire de* $\mathbb{C}^{\times}$, $\chi(\bar{z}) \neq \chi(z)$.

Alors $J(\delta,m) = R^{S}(\chi \circ \det)$, *où* $\chi \circ \det$ *est le caractère évident de* L .

Ceci résulte de la construction de $J(\delta,m)$ par induction cohomologique (§ 7.2).

8. GROUPES COMPLEXES

8.1. Commençons par quelques remarques générales. Pour simplifier, on ne considère maintenant que des groupes $G = \underline{G}(\mathbb{R})$, où $\underline{G}$ est réductif connexe, défini sur $\mathbb{R}$. Une façon d'aborder la classification du dual unitaire consiste à tenter de décrire, pour tout groupe réductif L de ce type, un ensemble fini $\mathcal{U}_0(L)$ de représentations unitaires jouissant de la propriété suivante : Pour tout G , on peut obtenir "simplement" le dual unitaire de G , à partir des $\mathcal{U}_0(L)$ pour les sous-groupes $\underline{L}$ de $\underline{G}$, définis sur $\mathbb{R}$, tels que $\underline{L}$ soit le sous-groupe de Levi d'un parabolique (*on ne suppose pas* le parabolique défini sur $\mathbb{R}$: *cf.* § 7.4). Par "simplement", on entend que les opérations permises sont l'induction (parabolique et cohomologique) et la déformation (§ 3.2.2). Notons que la démonstration de Vogan pour $GL(n)$ est une application de cette idée. A. Knapp et B. Speh [27] ont formulé une conjecture précise de ce type. Les résultats de Barbasch sont une illustration de ce principe.

8.2. Soit $G = \underline{G}(\mathbb{C})$ un groupe réductif complexe, $\underline{H} \subset \underline{G}$ un tore maximal, $H = \underline{H}(\mathbb{C})$ le sous-groupe de Cartan associé de G . Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ sont alors munies de structures complexes. Soit $\Lambda = X^*(H)$ le réseau des caractères rationnels de $\underline{H}$; Λ est naturellement plongé dans $\mathfrak{h}_0^*$.

On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_0$ (décomposition holomorphe / antiholomorphe), d'où $\Lambda \oplus \Lambda \subset \mathfrak{h}^*$. On dit qu'un élément de $\mathfrak{h}^*$ est *entier* s'il appartient au réseau des poids $\Pi = \Lambda \oplus \Lambda$, demi-entier s'il appartient à $\frac{1}{2}\Pi$.

Pour tout groupe réductif complexe G *classique* (= dont le système de racines est d'un des types classiques A , B , C , D), Barbasch décrit un ensemble fini de représentations $\mathcal{U}_0(G)$; leur caractère infinitésimal est entier ou demi-entier. Il démontre alors :

THÉORÈME 11 [10, 11].- *Soit* G *un groupe réductif complexe classique. Alors une représentation irréductible admissible de* G *est unitaire si, et seulement si, elle est obtenue par induction unitaire et déformation à partir d'une représentation de* $\mathcal{U}_0(L)$, *où* L *est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de* G .

Les représentations de $\mathcal{U}_0(G)$ sont décrites à partir d'orbites nilpotentes dans le "dual de Langlands" de $\mathfrak{g}_0$.

La démonstration vérifie, en particulier, pour ces groupes, une conjecture d'Arthur étendue par Barbasch et Vogan [8, 12]. Elle repose - en plus des résultats de Vogan esquissés ici - sur toute la théorie, développée entre autres par Barbasch et Vogan [8], reliant orbites nilpotentes, fronts d'onde, représentations unitaires et idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$.

Pour terminer, je voudrais remercier W. Baldoni-Silva, A. Knapp et D. Vogan pour des indications précieuses.

BIBLIOGRAPHIE

Trois livres, récents ou prochain , exposent la théorie des représentations des groupes réductifs réels (le rédacteur n'a pas consulté [3]) :

[1] A. KNAPP - *Representation theory of semi-simple groups : an overview based on examples*, Princeton U. Press, 1986.

[2] D. VOGAN - *Representations of real reductive Lie groups*, Birkhaüser, 1981.

[3] N. WALLACH - *Real reductive groups*, en préparation.

Un livre à paraître de Vogan esquisse la théorie des représentations unipotentes citée dans le § 8 :

[4] D. VOGAN - *Unitary representations of reductive Lie groups*, à paraître dans Annals of Math. Studies, Princeton U. Press.

Voici des exposés utiles :

[5] A. KNAPP, B. SPEH - *Status of classification of irreducible unitary representations*, Harmonic Analysis Proceedings, Minneapolis 1981, Springer Lect. Notes 908, 1982.

[6] D. VOGAN - *Understanding the unitary dual*, in Lie groups representations I, Herb ed., Springer Lect. Notes 1024, 1983.

[7] D. VOGAN - *Representations of reductive Lie groups*, International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986 (à paraître).

Autres références :

[8] J. ARTHUR - *On some problems suggested by the Trace Formula*, in Lie group representations II, Herb ed., Springer Lect. Notes 1041, 1984.

[9a] W. BALDONI-SILVA, A. KNAPP - *Indefinite intertwining operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 81, 1272-1275 ; [9b] *Indefinite intertwining operators II*, preprint.

[10] D. BARBASCH - *Unipotent representations and unitarity*, preprint, 15 p. (exposé de [11]).

[11] D. BARBASCH - *Unipotent representations of complex semi-simple groups II*, 1987.

[12] D. BARBASCH, D. VOGAN - *Unipotent representations of complex semi-simple groups*, Ann. of Math. 121 (1985), 41-110.

[13] V. BARGMANN - *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. of Math. (2) 48 (1947), 568-640.

[14] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN - *Localisation de* $\mathfrak{g}$*-modules*, Comptes rendus, 292 (1981), 15-18.

[15] J. BERNSTEIN - P-*invariant distributions on* GL(N) *and the classification of unitary representations of* GL(N) *(non-Archimedian Case)*, in Lie group representations II, Herb ed., Springer Lect. Notes 1041, 1984.

[16] A. BOREL, N. WALLACH - *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1980.

[17] W. CASSELMAN - *The Hasse-Weil* ζ*-function of some moduli varieties of dimension greater than one*, Proc. Symp. Pure Math. 33 (2) (1979), 141-163.

[18] J. DIXMIER - *Algèbres enveloppantes*, Cahiers scientifiques XXXVII, Gauthier-Villars, 1974.

[19] M. DUFLO - *Représentations de carré intégrable des groupes semi-simples réels*, Exposé 508, Séminaire Bourbaki, 1977-78, Springer Lect. Notes 710, 1979.

[20] M. DUFLO, M. VERGNE - *Sur le foncteur de Zuckerman*, Comptes rendus, à paraître.

[21] T.J. ENRIGHT - *Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complex Lie groups*, Duke Math. J. 46 (1979), 513-525.

[22] T.J. ENRIGHT, N. WALLACH - *Notes on homological algebra and representations of Lie algebras*, Duke Math. J. 47 (1980), 1-15.

[23] R. HOWE - ϑ*-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math. 33 (1) (1979), 275-285.

[24] R. HOWE - *On the asymptotic behavior of matrix coefficients*, preprint.

[25] R. GODEMENT - *Notes on Jacquet-Langlands*, Princeton, I.A.S., 1970.

[26] J.-C. JANTZEN - *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Springer Lect. Notes 750, 1980.

[27] A. KNAPP, B. SPEH - *The role of basic cases in classification : theorems about unitary representations applicable to* SU(N,2), *Non commutative harmonic analysis and Lie groups*, Springer Lect. Notes 1021, 1983.

[28] A. KNAPP, E. STEIN - *Intertwining operators for semi-simple groups II*, Invent. Math. 60 (1980), 9-84.

[29] A. KNAPP, D. VOGAN - *Duality theorems in relative Lie algebra cohomology*, preprint.

[30] A. KNAPP, G. ZUCKERMAN - *Normalizing factors and L-groups*, Proc. Symp. Pure Math. 33 (1) (1979), 93-105.

[31] A. KNAPP, G. ZUCKERMAN - *Classification of irreducible representations of semi-simple groups*, Ann. of Math. 116 (1982), 389-501.

[32] S. LANG - SL2(ℝ) , Addison-Wesley, 1975.

[33] R.P. LANGLANDS - *On the classification of irreducible representations of real reductive groups*, Princeton, I.A.S., 1973.

[34] D. MILIČIĆ - *Asymptotic behavior of matrix coefficients of the discrete series*, Duke Math. J. 44 (1977), 59-88.

[35] B. SPEH - *Some results on principal series for* GL(n,ℝ) , thèse, M.I.T., Cambridge, Mass., U.S.A., 1977.

[36] B. SPEH - *The unitary dual of* GL(3,ℝ) *and* GL(4,ℝ) , Math. Ann. 258 (1981), 113-133.

[37] B. SPEH - *Unitary representations of* GL(n,ℝ) *with non trivial* (g,K)- *cohomology*, Inv. Math. 71 (1983), 443-465.

[38] B. SPEH, D. VOGAN - *Reducibility of generalized principal series representations*, Acta Math. 145 (1980), 227-299.

[39] M. TADIČ - *Unitary representations of general linear group over real and complex field*, Max Planck Inst. F. Math., 1985.

[40] M. TADIČ - *On the classification of irreducible unitary representations of* GL(n) *and the conjectures of Bernstein and Zelevinsky (non-archimedian case)*, Ann. Sc. E.N.S. (4° sér.) 19 (1986), 335-382.

[41] D. VOGAN - *The algebraic structure of the representations of semi-simple Lie groups I*, Ann. of Math. 106 (1979), 1-60.

[42] D. VOGAN - *Unitarizability of certain series of representations*, Ann. of Math. 120 (1984), 141-187.

[43] D. VOGAN, G. ZUCKERMAN - *Unitary representations with non-zero cohomology*, Compositio Math. 53 (1984), 51-90.

[44] D. VOGAN - *The unitary dual of* GL(n) *over an archimedian field*, Inventiones Math. 83 (1986), 449-505.

[45] N. WALLACH - *Cyclic vectors and irreducibility for principal series representations*, Trans. A.M.S. 158 (1971), 107-113.

[46] N. WALLACH - *On the unitarizability of derived fonctor modules*, Inv. Math. 78 (1984), 131-141.

[47] A. WEIL - *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111 (1964), 143-211.

Laurent CLOZEL

Department of Mathematics
University of Michigan
ANN ARBOR, Mi 48109 - USA