ALAIN-SOL SZNITMAN

Grandes déviations

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. nº 680, p. 207-227
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__207_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1987
39ème année, 1986-87, n° 680

GRANDES DÉVIATIONS

par Alain-Sol SZNITMAN

Les quelques pages qui suivent ne peuvent rendre compte de tous les travaux effectués sur le thème des grandes déviations et représentent plutôt une illustration sur quelques exemples des développements du sujet.

1. GÉNERALITÉS

La méthode de Laplace permet d'affirmer que si $\mu_n(dx) = \exp\{-nI(x)\}dx$ est une suite de mesures sur $\mathbb{R}$, le comportement exponentiel d'intégrales

(1.1) $$\int_{\mathbb{R}} \exp\{nF(x)\}\,d\mu_n(x) \ ,$$

(F et I mesurables réelles), toutes supposées finies, est du type : $\exp\{n(\text{ess}\sup(F-I)+o(1))\}$. Dans le cadre des probabilités, en vue d'obtenir de telles asymptotiques, on est intéressé à définir qu'une suite de probabilités Q_n sur un espace X (métrique séparable complet) se comporte comme $\exp\{-nI(x)\}dx$, même si on ne dispose plus d'une mesure de référence "dx" sur X. On a alors recours à une approche utilisant la topologie de l'espace et on pose

DÉFINITION 1.1.- Q_N *admet la fonction de grande déviation* $I : X \longrightarrow [0,\infty]$, *si :*
- I *est semi continue inférieurement,*
- *pour* $a < \infty$, $\{I \le a\}$ *est compact,*
- *pour* F *fermé,* $Q_n(F) \le \exp\{-n(\inf_F I + o(1))\}$,
- *pour* G *ouvert* $Q_n(G) \ge \exp\{-n(\inf_G I + o(1))\}$.

On a alors une méthode de Laplace abstraite (Varadhan [61]) :

THÉORÈME 1.2.- *Si* Q_N *admet la fonction de grande déviation* I , *et* F *est une fonction continue bornée sur* X :

(1.2) $$\int_X \exp\{nF(x)\}\,dQ_n(x) = \exp\{n(\sup_X (F-I) + o(1))\} \ .$$

A partir d'une suite Q_n admettant une fonctionnelle de grande déviation I , on obtient toute une catégorie d'autres exemples de grandes déviations par les schémas abstraits suivants :

PROPOSITION 1.3 (Principe de contraction).- *Si* $\Phi : X \longrightarrow Y$ *est continue, et* Q_n *admet la fonction de grande déviation* I *sur* X , $P_n = \Phi \circ Q_n$, *admet la fonction de grande déviation sur* Y :

$$J(y) = \inf\{I(x) \ , \ \Phi(x) = y\} \ . \tag{1.3}$$

PROPOSITION 1.4.- *Si* F *est continue bornée sur* X , *et* Q_n *admet la fonction de grande déviation* I , *sur* X , *la suite des probabilités*

$P_n = Z_n^{-1} \cdot \exp\{nF(x)\} dQ_n(x)$, (Z_n constante de normalisation),

admet la fonction de grande déviation

$$J(x) = I(x) - F(x) - \min_X (I(\cdot) - F) \ . \tag{1.4}$$

Outre le fait d'obtenir des résultats asymptotiques tels (1.2), un des grands intérêts des grandes déviations est de préciser la manière dont se produisent certains évènements rares. Par exemple si B_s , $0 \le s \le 1$ est un pont Brownien en temps 1 , on peut voir que lorsque n est grand, la masse de l'évènement où $\sup B_s \ge n$ est essentiellement portée par les voisinages $|\frac{1}{n} B_s - \varphi| \le \varepsilon$ où φ est la fonction cloche

$$\varphi(t) = 2t \ , \ 0 \le t \le 1/2 \ , \ \varphi(1-t) = \varphi(t) \ .$$

Ceci nous dit que conditionnellement à l'évènement rare $\sup B_s \ge n$, la loi de $\frac{1}{n} B_s$ se concentre autour de φ . (Pour d'autres exemples de franchissements de barrières, voir [57].)

Lien avec la convexité :

Les grandes déviations dans le cas où X est un espace vectoriel, et I est convexe, ont un lien profond avec la transformation de Fenchel - Legendre. En effet, en appliquant de manière informelle (1.2) à $F(x) = \langle y,x \rangle$, (qui n'est pas bornée), $y \in X^*$ le dual de X , on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H^n(ny) = \sup_X (\langle y,x \rangle - I(x)) \ ,$$

où

$$H^n(y) = \mathrm{Log}\left(\int \exp\langle y,x \rangle \, dQ_n(x) \right) .$$

C'est-à-dire que $H(y) = \lim_n \frac{1}{n} H^n(ny)$, (renormalisation du logarithme des transformées de Laplace des Q_n), est duale de I au sens de Legendre. Ceci va permettre d'identifier I par

$$I(x) = \sup_Y (\langle x,y \rangle - H(y)) \ .$$

En fait, il est possible d'utiliser ces idées pour démontrer des résultats de grandes déviations comme le montre le théorème suivant que l'on peut trouver chez Gärtner [37], Ellis [26], (voir aussi [67]).

THÉORÈME 1.5.- *Soit* Q_n *une suite de probabilités sur* $\mathbb{R}^d$ *, telle que* $H(y) = \lim_n \frac{1}{n} H^n(ny)$ *existe pour* $y \in \mathbb{R}^d$ *, appartienne à* $]-\infty,+\infty]$ *, soit finie sur un voisinage de* 0 *et s.c.i., alors :*

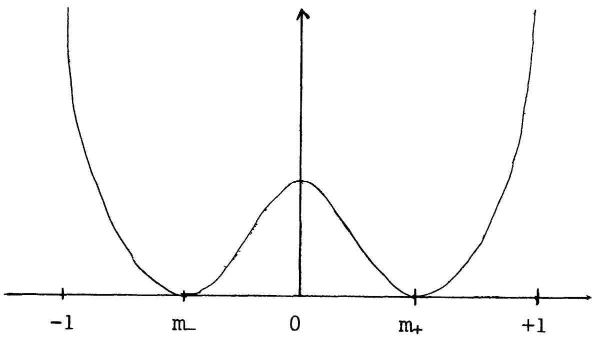
- L *la fonction duale de* H *vérifie les trois premières propriétés de la définition* 1.1.
- *Si de plus* L *est strictement convexe , là où elle est finie, alors* Q_n *admet* L *pour fonctionnelle de grande déviation.*

Remarques.-

- Le théorème s'applique au cas de $S_n = \frac{1}{n}(X^1 + \ldots + X^n)$, X^i i.i.d. intégrant les exponentielles (Cramer [12]).
- La démonstration de ce résultat contient un certain nombre d'ingrédients communs aux démonstrations de grandes déviations. La partie majoration utilise le contrôle donné par l'existence de H à travers des majorations de Bienaymé - Tchebicheff. La minoration consiste à construire des mesures $\tilde{Q}_n$, absolument continues par rapport aux Q_n qui se concentrent au voisinage d'un point x qu'on s'est donné ; (dans le cas présent, l'hypothèse de stricte convexité permet précisément d'appliquer le résultat de majoration aux $\tilde{Q}_n$ pour affirmer que les $\tilde{Q}_n$ ne chargent pas asymptotiquement le complémentaire de tout voisinage fixe de x).
- Dans le cas de dimension infinie (voir Baldi [5], Dawson - Gärtner [13], Gärtner [37]), on a besoin de pouvoir se ramener à des parties compactes de l'espace.
- L'hypothèse de stricte convexité sur L peut être obtenue à partir d'une hypothèse de régularité sur H (Rockafellar [55], th. 26.3).

On voit donc que l'on peut être tenté de détecter les phénomènes de grandes déviations à travers l'étude du logarithme des transformées de Laplace. Dans le cas où la fonction de grande déviation I n'est pas convexe, on va typiquement obtenir la fonction $\tilde{I}$ ayant pour épigraphe l'enveloppe convexe fermée de l'épigraphe de I .

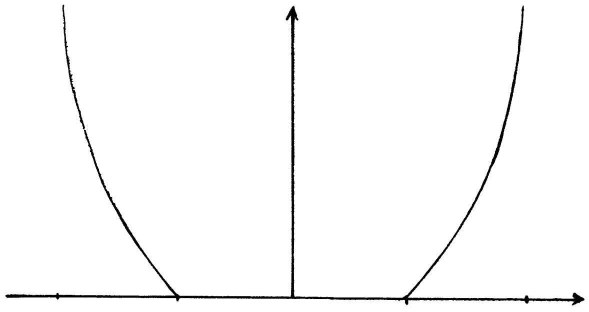
Exemples.- 1) I n'est pas forcément convexe : Modèle de Curie - Weiss (Ellis [26], p. 180-1981), on regarde $S_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \in \mathbb{R}$ sous la probabilité : $Z_n^{-1} \cdot \exp\left\{\frac{\beta}{2n} \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\right\} \prod_i P(dx_i)$ où $P(dx_i) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. Pour $\beta > 1$, I a l'allure suivante :



2) Même si la fonction duale de H n'est pas strictement convexe, elle peut cependant décrire la grande déviation : Modèle d'Ising (Ellis [27], voir aussi section 3.2), on regarde $S_n = \frac{1}{\# \Lambda_n} \sum_{i \in \Lambda_n} x_i \in \mathbb{R}$, sous la probabilité $R_n = Z_n^{-1} \exp\left\{\beta \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ i,j \in \Lambda_n}} x_i x_j\right\} \prod_{i \in \Lambda_n} P(dx_i)$, où $P(dx) = \frac{1}{2}(\delta_{+1} + \delta_{-1})$, et $\Lambda_n = [1,n]^d$, alors Q_n loi de S_n, admet pour fonction de grande déviation I, au rythme n^d, la fonction duale de $H(y)$ (énergie libre) :

$$H(y) = \lim_n \frac{1}{\# \Lambda_n} \operatorname{Log}\left(\int \exp\{y S_n \# \Lambda_n\} dQ_n(y) \right),$$

et pour $\beta > \beta_c$ (valeur critique), son allure est :



Le cas gaussien :

Si μ sur $\mathbb{R}^d$ est gaussienne de covariance inversible Q, la loi image sous $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} x$ est

$$(1.5) \qquad \mu^n(dx) = \left[\frac{n}{2\pi \det Q}\right]^{d/2} . \exp - \frac{n}{2} \|x\|^2 \, dx \text{ , où } \|x\|^2 = {}^t x Q^{-1} x .$$

La méthode de Laplace usuelle dit alors que μ^n admet pour fonctionnelle de grande déviation $\frac{1}{2} \|x\|^2$.

Dans le cas du mouvement Brownien, en temps $[0,1]$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \times$ l'approximation polygonale du Brownien aux points p/k, $0 \le p \le k$, admet comme fonctionnelle de grande déviation

$$I^k(f) = \frac{1}{2} \|f\|^2_{H^1} = \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2_s \, ds \text{ , (} f \text{ polygonale d'ordre } k \text{).}$$

L'idée est que l'approximation de dimension finie du mouvement Brownien par la ligne polygonale peut être rendue aussi fine que l'on veut en termes de taux exponentiels, c'est-à-dire

$$(1.6) \qquad \forall a > 0 \text{ , } R > 0 \text{ , } \exists k \text{ , } n_0 \text{ , } \forall n \ge n_0 \text{ , } P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \|B - B^k\|_\infty \ge a\right] \le \exp - nR \text{ ,}$$

si $B.$, $B^k_.$ désignent respectivement le mouvement Brownien et son approximation polygonale.

Ceci permet d'obtenir (voir par exemple Varadhan [63]) que les lois de $\frac{1}{\sqrt{n}} B$ sur $C([0,1],\mathbb{R})$ admettent pour fonction de grande déviation

(1.7) $$I(f) = \frac{1}{2} \|f\|^2_{H^1} \text{ , si } f \in H^1 \text{ et } f(0) = 0 \text{ ,}$$
$$= +\infty \text{ , sinon.}$$

- On peut utiliser ce résultat pour démontrer la loi de Strassen du logarithme itéré ([59]).

- Ce type de résultat n'est pas spécifique à la mesure de Wiener, et s'étend bien pour des mesures gaussiennes (voir Azencott [1], Bahadur - Zabell [4] ; l'idée est qu'il faut considérer ces mesures gaussiennes comme des mesures cylindriques modelées sur un espace de Hilbert H , la fonctionnelle de grandes déviations qui apparaît est alors $\frac{1}{2} \| \ \|^2_H$, prolongée par $+\infty$, en dehors de H .

2. PHÉNOMÈNES DE GRANDES DÉVIATIONS LIÉS À DE PETITES EXCITATIONS BROWNIENNES

2.1. Grandes déviations pour les diffusions, développements asymptotiques

Dans un premier temps, on obtenait des résultats de grandes déviations sur $C([0,T],\mathbb{R}^d)$, pour les diffusions de générateur

(2.1.1) $$L^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij}\partial^2_{ij} + b_i\partial_i \text{ ,}$$

en les considérant comme des processus localement Browniens (Varadhan [61], Ventsel-Freidlin [66], Friedman [36]), et en utilisant la formule de Cameron - Martin - Girsanov, ceci amenait à imposer une condition d'ellipticité sur a . Azencott [1] (voir aussi Priouret [54]) a pu supprimer ce type d'hypothèse en utilisant un principe de contraction (proposition 1.3) qui consiste à écrire la diffusion Z^ε de générateur L^ε comme solution de

(2.1.2) $$dZ^\varepsilon = \Sigma\, X^i(Z^\varepsilon_s)d(\varepsilon B^i_s) + X^o(Z^\varepsilon_s)ds \text{ , } Z^\varepsilon_o = x \text{ ,}$$

où la matrice σ de vecteurs colonne X^i est telle que $\sigma\sigma^* = a$ et $X^o = b$. Bien sûr la correspondance $(\varepsilon B) \xrightarrow{\Phi} Z^\varepsilon$ n'est pas continue en général, mais l'idée est que le défaut de continuité de cette application a un rythme exponentiel aussi bon que l'on veut (un peu comme (1.6) dans 1). On obtient alors que même en situation dégénérée, Z^ε admet une fonctionnelle de grande déviation sur $C_x([0,T],\mathbb{R}^d)$:

(2.1.3) $$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T a^*_{\varphi_s}(\dot{\varphi}_s - X^o(\varphi_s))ds = \inf\left\{\frac{1}{2}\|h\|^2_{H^1} \text{ , } \Phi(h) = \varphi\right\} \text{ ,}$$

où a^*_x est la forme quadratique duale de a_x , définie par :

(2.1.4) $$\frac{1}{2} a^*_x(v) = \sup_p(\langle p,v\rangle - \frac{1}{2} a_x(p)) \text{ .}$$

On notera au passage que ces idées "s'harmonisent" d'une certaine manière avec la construction du mouvement Brownien sur une variété grâce à une équation différentielle stochastique sur le fibré des repères, (Malliavin, Eells - Elworthy), nous verrons plus bas que Bismut [8], a poussé plus loin cette "rencontre" des sujets.

Développements asymptotiques de certaines intégrales

Ce type de questions remonte à Pincus [53], Schilder [58] où on étudie le comportement de

$$(2.1.5) \qquad A_\varepsilon = E[G(\varepsilon B) \exp\{\frac{1}{\varepsilon^2} F(\varepsilon B)\}] \ , \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \ ,$$

où F, G sont bornées régulières Fréchet sur $C([0,1],\mathbb{R}^d)$, on peut alors voir que si il existe un unique $y_0 \in C([0,1],\mathbb{R}^d)$ maximisant $F(y) - \frac{1}{2}\|y\|^2_{H^1}$, $(y(0)=0)$, alors avec une condition de non dégénérescence :

$$(2.1.6) \qquad A_\varepsilon = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} (F(y_0) - \frac{1}{2} \|y_0\|^2_{H^1})\right\} [\Gamma_0 + \Gamma_1\varepsilon + \ldots + \Gamma_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n)] \ ,$$

avec

$$\Gamma_0 = E[\exp \frac{1}{2} D^2F(y_0)(B,B)] = [\det(I - D^2F(y_0))]^{-1/2} \quad (\text{si } G(y_0) = 1).$$

où D^2F est considéré comme opérateur (à trace) sur H^1.
Les résultats de grandes déviations permettent de localiser le problème au voisinage de y_0, la mesure Gaussienne fait que formellement tout se passe comme si on calculait un développement de (2.1.5) en dimension finie.

Remarque.- Il faut se garder de croire que l'information concernant un possible développement asymptotique est contenu dans la fonction I, dans le cas général des grandes déviations. Ainsi, si X^i sont i.i.d. réelles, centrées de variance 1, à support borné, $S_n = \frac{1}{n^{1/2+a}} (X^1 + \ldots + X^n)$ admet la fonction de grande déviation $I(x) = -\frac{1}{2} x^2$ (comme $S'_n = n^{-a}B_1$), au rythme n^{2a}, si $0 < a < \frac{1}{2}$. Cependant le développement asymptotique de $E[\exp \alpha n^{2a} S_n] = E[\exp \alpha n^{a-1/2} X]^{n}$ est en général distinct de celui de $\exp\{\frac{1}{2} \alpha^2 n^{2a}\}$, correspondant au cas Gaussien ($G = 1$, $F(x) = -\alpha x$, $\varepsilon = n^{-a}$), dans (1.5).

Pour des sommes $S_n = \frac{1}{n} (X_1 + \ldots + X_n)$ de variables i.i.d. à valeurs Banach (+ hypothèses), des résultats de type (2.1.6) à l'ordre Γ_0 ont été obtenus par Bolthausen [9], qui obtient même (seconde partie) des résultats dans le cas d'un maximum dégénéré (le premier préfacteur n'est plus constant mais une puissance positive de n).

(2.1.6) permet par exemple d'étudier, en utilisant la formule de Feynman-Kac, le comportement de

$$(2.1.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\varepsilon^2}{2} \Delta u - \dfrac{1}{\varepsilon^2} V(x) u \ , \\[2ex] U_0 = g(\cdot) \exp - \dfrac{1}{\varepsilon^2} S(\cdot) \ , \end{cases}$$

et y_0, minimum de $S(y_T) + \int_0^T (\frac{1}{2}\dot{y}_s^2 + V(y_s))ds$, $y(t=0) = x$ fixé, correspond au mouvement classique dans le potentiel $-V$:

$$(2.1.8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = x \ , \ y'(T) = \nabla S(y(T)) \\ y'' = \nabla V(y) \ . \end{array} \right.$$

On peut trouver de tels résultats avec εB remplacé par Z^{ε} (voir (2.1.2)) (T pas trop grand) chez Azencott [2], Doss [23], [24], il faut alors de plus disposer de formules de Taylor donnant le développement en ε de Z^{ε}.
En fait, la "tendance", notamment à la suite des travaux de Bismut [8], consiste à revenir à l'application Φ donnée par (2.1.2), non seulement comme moyen d'obtenir une grande déviation sur Z^{ε}, mais surtout pour considérer le problème du comportement de $E[G(Z^{\varepsilon}) \exp - \frac{1}{\varepsilon^2} F(Z^{\varepsilon})]$ comme posé à même l'espace de Wiener. On doit alors regarder le problème variationnel :

$$\max_{H^1} F \circ \Phi(h) - \frac{1}{2} \|h\|^2_{H^1} \ , \quad (h(0) = 0) \ .$$

Bien sûr, la correspondance $B \xrightarrow{\Phi} Z$ n'est plus Fréchet régulière et un mélange d'idées de calcul de Malliavin et de grandes déviations s'introduit naturellement (Voir Ben Arous [7]).

Comportement de la solution fondamentale de la chaleur

Varadhan [61] a démontré et utilisé (2.1.3) dans un cadre uniformément elliptique pour obtenir que la solution fondamentale $p(t,x,y)$ de $L = \frac{1}{2} a^2_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i$ vérifiait

$$(2.1.9) \qquad \lim_{t \downarrow 0} 2t \operatorname{Log} p(t,x,y) = d^2(x,y) \ ,$$

uniformément sur les compacts où d est la distance Riemannienne associée à a^* (voir (2.1.4)). Si $L^{\varepsilon} = \varepsilon^2 L$, alors $p^{\varepsilon}(1,x,y) = p(\varepsilon^2,x,y)$, on écrit avec S petit voisinage de y : $p^{\varepsilon}(1,x,y) \geq \int_S p^{\varepsilon}(1-\delta,x,z)p^{\varepsilon}(\delta,z,y)dz$, pour la minoration, $p^{\varepsilon}(1,x,y) = E[p(1-\tau,Z^{\varepsilon}_{\tau},y)]$, pour la majoration (τ est le premier temps d'entrée dans S).
(2.1.3) permet d'estimer les probabilités des paquets de trajectoires intervenant dans ces intégrales.
Des développements pour la solution fondamentale ont été obtenus par Molcanov [48], Kifer [41] (L^{ε} plus généraux), Azencott [3], dans le cas elliptique. A la suite de Bismut [8], l'attaque du cas d'opérateurs hypoelliptiques avec l'obtention de (2.1.9), où d est la distance de Carnot-Carathéodory, qui peut être trouvée dans les travaux de Léandre et, plus récemment, dans certaines situations des développements asymptotiques, chez Ben Arous [7], Léandre [46].

2.2. Théorie de Ventsel et Freidlin

Ventsel et Freidlin ont appliqué les résultats de grandes déviations pour Z^{ε}, à l'étude de problèmes de perturbations singulières liés à L^{ε} (donné par (2.1.1)), tels que les comportements limites du problème de Dirichlet, de la première valeur propre, de la mesure invariante.

L'exemple fondamental consiste à étudier $\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta + b\,.\,\nabla$ dans un ouvert borné régulier D, contenant un seul point stable supposé attractif pour le système dynamique associé à b. On suppose en outre que $b\,.\,n < 0$, où n est la normale extérieure à ∂D. Le système est gouverné par le quasipotentiel

(2.2.1) $V_D(x,y) = \inf\{I(\varphi)\ ,\ T \geq 0\ ,\ \varphi(0) = x\ ,\ \varphi(T) = x\ ,\ \varphi(u) \in D\ ,\ \forall u \in [0,T]\}$.

$V_D(x,\cdot)$ est solution lipschitzienne (voir Lions [47]), de l'équation de Hamilton-Jacobi

(2.2.2) $$\frac{1}{2}\,|\nabla V|^2 + b\,.\,\nabla V = 0$$

On va supposer qu'il existe un minimum strict en $y_0 \in \partial D$ de la fonction $V(0,x)$, $x \in \partial D$ et que $V(0,y_0) = I(\varphi)$ pour une unique $\hat{\varphi}$ sur $]-\infty,0]$ telle que $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(0) = y_0$. On est dans la situation où pour $\varepsilon > 0$ le temps de sortie τ^ε de D du processus Z^ε partant de $x \in D$ est fini mais pour $\varepsilon = 0$ τ^0 correspondant au système dynamique est infini. On a alors, en notant $V(0,y_0) = V(0,\partial D)$

THÉORÈME 2.1 (Ventsel-Freidlin [66], [67]).-

– $Z^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ *converge en probabilité vers* y, *et la loi de* $Z^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ *admet la fonctionnelle de grande déviation*

(2.2.3) $$V(x,y) \wedge (V(0,y) - V(0,y_0))\ ,\ y \in \partial D \quad \text{(au rythme } \varepsilon^{-2}\text{)}.$$

– $u^\varepsilon = E[\varphi(Z^{\varepsilon,x}_{\tau^\varepsilon})]$, *la solution du problème de Dirichlet* $L^\varepsilon u^\varepsilon = 0$, $u^\varepsilon_{|\partial D} = \varphi$, *tend vers* $\varphi(y_0)$, $(\varepsilon \to 0)$, *uniformément sur les compacts de* D.

– *Si* S^ε, S *dénotent les derniers instants de sortie d'un voisinage fixé de* 0, *pour* Z^ε, *et* $\hat{\varphi}$ *(on suppose la sortie "transversale" pour* $\hat{\varphi}$ *), alors*

(2.2.4) $$\sup_{S^\varepsilon \leq t \leq \tau^\varepsilon} |X^{\varepsilon,x}(t) - \hat{\varphi}(t - S^\varepsilon + S)| \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$

("le processus sort en suivant $\hat{\varphi}$ ").

THÉORÈME 2.2.-

(2.2.5) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_x[\exp\{\varepsilon^{-2}(V(0,\partial D) - \alpha)\} < \tau^\varepsilon < \exp\{\varepsilon^{-2}(V(0,\partial D) + \alpha)\}] = 1$, pour $\alpha > 0$,

et la solution $E_x[\tau^\varepsilon]$ *du problème* $L^\varepsilon v^\varepsilon = -1$ *sur* D, $v^\varepsilon_{|\partial D} = 0$, *vérifie*

(2.2.6) $$v^\varepsilon(x) = \exp\{-\varepsilon^{-2}(V(0,\partial D) + o(1))\}\ .$$

THÉORÈME 2.3.- *La première valeur propre* λ^ε_1 *du problème de Dirichlet pour* $-L^\varepsilon$ *vérifie*

(2.2.7) $$\lambda^\varepsilon_1 = \exp -\frac{1}{\varepsilon^2}\,(V(0,\partial D) + o(1))\ .$$

THÉORÈME 2.4.- *Dans le cas où* 0 *est attractif dans l'espace et* $b(x)\,.\,x < \mathrm{Const}|x| < 0$, x *grand, l'unique mesure invariante associée à* L^ε *admet* *la fonction de grande déviation* $V(0,x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, *au rythme* ε^{-2} .

La technique fondamentale commune à tous ces résultats est de considérer la chaîne de Markov induite par les visites successives à une petite sphère $S_\delta(0)$ de rayon δ ou à ∂D après avoir atteint la sphère de rayon $S_{2\delta}$. Les grandes déviations donnent le fait que la probabilité d'une transition de S_δ à ∂D est d'ordre $\exp -\varepsilon^{-2}(V(0,\partial D) \pm 0(\delta))$ et correspond à un voisinage tubulaire d'une translatée de $\hat{\varphi}$. Ce même type d'idées de "loi géométrique" gouvernant la sortie permet d'obtenir (2.2.5), (2.2.6) et le comportement de la première valeur propre qui se caractérise comme le seuil d'intégrabilité de $\exp \alpha \tau_\varepsilon$, voir aussi Day [25].

Cas du drift gradient

Si $b(x) = -\nabla U(x)$, $U(0) = 0$, alors dans la région $U(x) \leq \min_{\partial D} U(\cdot)$,

$$V(0,x) = 2\,U(x) \,, \tag{2.2.8}$$

et $\hat{\varphi}$ est la solution de

$$\dot{\varphi}_s = \nabla U(\varphi_s) \;,\; \varphi(-\infty) = 0 \;,\; \varphi(0) = y_0 \,. \tag{2.2.9}$$

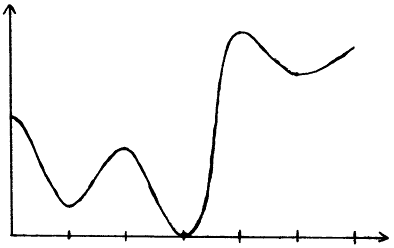
Dans ce cas, le processus "remonte" la "ligne de plus grande pente", lors de sa sortie de D . En ce qui concerne la mesure invariante sous les hypothèses du théorème 2.4, $U(x) \geq \alpha|x| + \beta$ et $\mu_\varepsilon(dx) = Z_\varepsilon^{-1} \exp - 2\varepsilon^{-2} U(x)\,dx$ et le résultat est alors conséquence de la méthode de Laplace classique.

Les résultats s'étendent au cas où on a un nombre fini de compacts $K_1, \ldots, K_\ell \subseteq D$, contenant les ensembles limites inclus dans $\bar{D}$ du système dynamique associé à b , chaque K_i étant une classe d'équivalence pour $x \sim y \iff V_D(x,y) = V_D(y,x) = 0$. Là encore, les estimées de grandes déviations permettent de contrôler les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite sur des petits voisinages des K_i . On est ramené à l'étude d'une chaîne de Markov de probabilités de transition d'ordre exponentiel sur un nombre fini d'états [64]. Il faut cependant préciser que ces résultats ne couvrent pas de manière intéressante toutes les situations. Ainsi, dans le cas d'un point stable hyperbolique, on obtient $\lambda_1^\varepsilon = \exp\{\varepsilon^{-2} o(1)\}$ alors qu'en fait (Kifer [42], [43]), λ_1^ε converge vers la somme des parties réelles positives des valeurs propres de la linéarisation de b au point 0 . On peut voir que $(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\varepsilon})^{-1}\,\tau^\varepsilon$ converge vers $(\mathrm{Re}\,\lambda_1)^{-1}$ (λ_1 valeur propre de partie réelle maximale) si le point initial est dans la variété stable (sinon τ^ε converge vers le temps de sortie du système déterministe).

- Donnons sur un exemple explicitement calculable le type de résultats pouvant être obtenus. On prend $D =]0,1[$,

$$L^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} \;,\quad b = -U' \,, \tag{2.2.10}$$

où U suit le graphe



La théorie de Ventsel-Freidlin permet de voir que, avec une probabilité tendant vers 1, partant strictement à gauche de β, on sort en 0, et partant strictement à droite de β, on sort par 1. Cependant la théorie ne permet pas de voir que, partant de β, la distribution de sortie (U ayant une courbure non dégénérée en β) converge vers $\frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)$.

En ce qui concerne les temps de sortie τ^ε, si l'on part à gauche strictement de β, alors pour $a>0$, $P_x \exp[\varepsilon^{-2}(h-a) < \tau^\varepsilon < \exp \varepsilon^{-2}(h+a)] \longrightarrow 1$, $a>0$, si $h = 2[U(0)-U(b)]$.

Intuitivement, si par exemple on part de a, on va être retardé par des cycles du type $a \longrightarrow b \longrightarrow a$ qui se produisent au niveau des excursions "lancées" de a avec une fréquence d'ordre $\exp(-2\varepsilon^{-2}(U(\alpha)-U(a)))$ et prennent un temps d'ordre $\exp(2\varepsilon^{-2}(U(\alpha)-U(b)))$.

Si l'on part strictement à droite de β, alors pour $a>0$,
$P_x[\exp \varepsilon^{-2}(h'-a) < \tau^\varepsilon < \exp \varepsilon^{-2}(h'+a)] \longrightarrow 1$, si $h' = 2(U(1)-U(c))$.

En ce qui concerne l'équation de Poisson de solution $v^\varepsilon = E_x[\tau^\varepsilon]$, à gauche de β, v_ε se comporte comme $\exp \varepsilon^{-2}(h+o(1))$. Cependant si la cuvette où se trouve c n'est pas trop profonde, au voisinage de c, v_ε se comporte comme $\exp \varepsilon^{-2}(h''+o(1))$ où $h'' \neq h'$, est donnée par $h'' = 2[U(0)-U(b)-(U(\beta)-U(1))]$, c'est-à-dire que les valeurs prépondérantes de $E[\tau^\varepsilon]$ proviennent alors des configurations rares où on a lancé une excursion de c vers β avant d'en lancer une vers 1.

- Un certain nombre de ces idées s'étendent en dimension infinie, voir Farris-Jona-Lasinio [29], Cassandro-Olivieri-Picco [69], Comets [10], Dawson-Gärtner [13]. Elles ont aussi été appliquées à l'étude des valeurs propres en dimension 1 de $-\frac{\varepsilon^4}{2}\Delta+V$, par Jona-Lasinio-Martinelli-Scoppola [40].

Lien avec les problèmes de contrôle (voir Fleming [30], [31], Holland [38])

Pour le problème de sortie, $L^\varepsilon U_\varepsilon = 0$, dans D, $U_\varepsilon|_{\partial D} = \exp\{-\varepsilon^{-2}\Phi(x)\}$, avec les méthodes d'optique géométrique (voir aussi Freidlin [35], [68]), on introduit $v_\varepsilon = -\varepsilon^2 \operatorname{Log} u^\varepsilon$ qui est alors solution de

$$L^\varepsilon v_\varepsilon - \frac{1}{2}\,{}^t\nabla v_\varepsilon\, a \nabla v_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } D, \quad v_\varepsilon|_{\partial D} = \Phi . \tag{2.2.11}$$

On reconnaît alors la fonction de coût optimal pour le problème de contrôle

(2.2.12) $$dZ_t^\varepsilon = V_t dt + \varepsilon\, \sigma(Z_t^\varepsilon) dW_t \ ,$$

où $V(t,\omega)$ est progressivement mesurable et on cherche à minimiser

(2.2.13) $$J_\varepsilon(x,v) = E\left[\int_0^\tau L(Z_t^\varepsilon, V_t)\,dt + \Phi(Z_\tau^\varepsilon)\right] \ ,$$

τ temps de sortie de D pour Z^ε et $L(x,v) = \frac{1}{2}\, a_x^*(v-b(x))$ (a_x^* forme quadratique conjuguée de a_x).
De manière très informelle, on est tenté de regarder la limite du problème de contrôle précédent pour obtenir (en fait, dans le cas où il n'y a pas de points stables dans $\bar{D}$, Fleming [30]), la solution du problème avec $\varepsilon = 0$:

(2.2.14) $$v(x) = \inf_{y\in\partial D} [V_D(x,y) + \Phi(y)] \ ,$$

solution dans un sens à préciser (Lions [47]) de l'équation de Hamilton-Jacobi (2.2.11) pour $\varepsilon = 0$. Il faut en fait des conditions de compatibilités sur Φ pour que v soit vraiment solution de (2.2.11) avec $\varepsilon = 0$, mais en l'absence de points stables dans $\bar{D}$, la convergence de v^ε vers v se produit (Ventsel-Freidlin [66], p. 176) , cependant dans le cas où il y a un point stable attractif 0 dans D , notre passage formel à la limite était naïf, car (2.2.3) nous dit qu'on doit remplacer $V_D(x,y)$ par $V_D(x,y) \wedge (V_D(0,y) - V_D(0,y_0))$ dans (2.2.14) pour avoir $v = \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon$.

3. GRANDES DÉVIATIONS LIÉES À DES PHÉNOMÈNES ERGODIQUES, THÉORIE DE DONSKER-VARADHAN

3.1. Théorème de Sanov

Le premier résultat dans l'esprit de cette partie est le théorème de Sanov [56] (voir aussi [57]), qui en version moderne (Donsker-Varadhan, III [14]) dit que pour $X^1,\dots,X^n$, i.i.d. à valeurs dans E (métrique séparable complet), les mesures empiriques $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(\delta_{X^1} + \dots + \delta_{X^n})$ à valeurs dans $M_1(E)$ (mesures de probabilités sur E , avec la topologie $C_b(E)$ faible), admettent la fonction de grande déviation

(3.1.1) $$I(\nu) = \int_E \operatorname{Log}\frac{d\nu}{d\mu}\, d\nu \ \left(+\infty \text{ si } \log\frac{d\nu}{d\mu} \notin L^1(d\nu)\right) \ , \quad (\mu \text{ loi de } X^i) ,$$

qui coïncide avec

(3.1.2) $$\sup_{u\in C_b(X)} \left(\int u\,d\nu - \operatorname{Log}\int e^u d\mu\right) .$$

Formellement, pour une version précise, voir Azencott [1], Bahadur-Zabell [4], ce résultat correspond au fait que l'on considère des variables indépendantes équidistribuées δ_{X^i} à valeurs dans $M^1(E)$, auxquelles on "applique" le théorème 1.5.

3.2. Grandes variations pour le champ

Nous allons renverser l'ordre historique des résultats et présenter l'extension du théorème de Sanov à la situation où les X^i sont une chaîne de Markov (Donsker-Varadhan I, III, [14]) comme résultant par un principe de contraction d'un théorème de grandes déviations sur un objet plus gros, à savoir le champ empirique d'un processus de Markov (Donsker-Varadhan, IV, [14]).

Si P_x, d'espace d'état E est notre processus de Markov, ω_t désigne la périodisée sur $\mathbb{R}$ de la trajectoire du Markov sur $[0,t[$. Le champ empirique est alors :

$$R_t = \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\vartheta_s \omega_t}\, ds\ , \tag{3.2.1}$$

(pour chaque t, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $M_s(D(\mathbb{R},E))$ = mesures stationnaires sous le shift ϑ, sur l'espace de trajectoires $D(\mathbb{R},E)$). Si E est compact (ou si on a une "bonne" récurrence), si le processus est Feller, avec une mesure de référence α, une densité de transition strictement positive α-ps. avec continuité de E dans $L^1(d\alpha)$, Donsker-Varadhan ont montré que les lois $Q_{x,t}$ des R_t sous P_x admettent une fonction de grande déviation au rythme t, sur $M_s(D(\mathbb{R},E))$:

$$I(Q) = E_Q\left[\left(\int \mathrm{Log}\left(\frac{dQ^{0,1}}{dP^{0,1}_{\omega(0)}}\right) dQ^{0,1}\right)\right]\ , \tag{3.2.2}$$

où $Q^{0,1}$ désigne la loi conditionnelle de Q sur l'intervalle de temps $[0,1]$, donné le passé et $P^{0,1}_{\omega(0)}$ est la loi de notre processus de Markov sur l'intervalle de temps $[0,1]$, partant de la condition initiale $\omega(0)$, aléatoire sous Q (ω est l'élément générique de D).

Pour obtenir la minoration dans ce théorème, $\exp\{-\psi(\omega,t)\}\ Q^{0,\infty}$ intervient naturellement, si $\psi(\omega,t) = \log\left(\frac{dQ^{0,t}}{dP^{0,t}_{\omega(0)}}\right)$, pour minorer une probabilité relative à $P_{\omega(0)}$ d'un évènement, sur l'intervalle $[0,t]$, en fonction de $Q^{[0,\infty]}$. La propriété d'hélice de ψ $(\psi(\omega,t+s) = \psi(\omega,t) + \psi(\vartheta_t\omega,s))$ et le théorème ergodique sous Q nous donnent que $\frac{1}{t}\psi(\omega,t) \longrightarrow E^Q[\psi(\omega,1)] = I(Q)$, ce qui motive le fait que (3.2.2) intervienne, via le théorème de Shannon-Mc Millan-Breiman conditionnel (voir Orey [51]). La partie majoration utilise les transformées de Laplace de $Q_{x,t}$ ainsi qu'une formulation variationnelle de (3.2.2) (un peu comme (3.1.2) relativement à (3.1.1)).

La question qui vient naturellement face à un tel résultat est alors : est-on dans un espace tellement gros qu'une formule variationnelle

$$\sup_{Q\in M_s(D)} (F(Q) - I(Q)) \tag{3.2.3}$$

est aussi compliquée que le calcul de la limite de $t^{-1}\,\mathrm{Log}\,E^{P_x}[e^{tF(R_t)}]$? Un grand succès de Donsker-Varadhan a été de montrer que ces résultats s'appliquaient au

Polaron [21], et permettaient de montrer que pour $\alpha > 0$, B pont Brownien dans $\mathbb{R}^3$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E^t_{o,o} \left[\exp\left\{\alpha \int_0^t \int_0^t \frac{e^{-|u-v|}}{|B_u - B_v|}\, dudv\right\}\right] = g(\alpha) \quad , \tag{3.2.4}$$

existait, était donné par (3.2.3) avec

$$F(Q) = E^Q \left[2\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|B_t - B_o|}\, dt\right] \quad , \tag{3.2.5}$$

et de montrer la conjecture de Pekar

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} = \sup_{\substack{\Phi\in L_2(\mathbb{R}^3)\\ |\Phi|=1}} \left[2 \iint \frac{\Phi^2(x)\Phi^2(y)}{|x-y|}\, dxdy - \frac{1}{2} \int |\nabla\Phi|^2\, dx \right] .$$

Remarquons que F est linéaire dans notre cas et qu'on a "juste affaire à à un calcul de transformée de Laplace de R_t " (au passage, on voit qu'un énoncé de type 1.5 en dimension infinie doit prudemment utiliser des hypothèses sur la transformée de Laplace pour garder son contenu).

Cas des mesures stationnaires

Orey [51] s'est intéressé au cas où P n'est plus Markovien, mais stationnaire (sur un espace abstrait (Ω,ϑ,P) cela concerne alors $R_n(\omega) = \frac{1}{n} (\delta_\omega + \delta_{\vartheta\omega} + \ldots + \delta_{\vartheta^{n-1}\omega})$). L'équivalent de la formule (3.2.2) exige alors d'avoir des hypothèses de bonne version de l'espérance conditionnelle sous P , étant donné le passé, car ce noyau doit être intégré sous Q . La minoration chez Orey est donnée sous deux approches différentes, l'une utilisant un résultat de type Shannon - Mc Millan - Breiman (comportement de $\frac{1}{n} \operatorname{Log} \left(\frac{dQ^{-n,n}}{dP^{-n,n}}\right)$ dans $L^1(Q)$), l'autre une version conditionnelle, comme chez Donsker - Varadhan, IV [14]. Sur ces thèmes, on pourra aussi voir Takahashi [60], et pour le cas Gaussien stationnaire Donsker - Varadhan [22].

Mesures de Gibbs sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$

Ces résultats sont dus indépendamment à Comets [11], Olla [50], Föllmer - Orey [32]. Les deux premiers auteurs ont développé la grande déviation du champ pour une mesure de Gibbs, comme conséquence du résultat dans le cas où les sites sont indépendants, en ayant en tête que R_n sous une mesure de Gibbs Q_G , a approximativement la même loi que sous $Z_n^{-1} . \exp\{|V_n| \langle R_n,U\rangle\} . \prod_{i\in V_n} d\rho(\omega_i)$, pour un U convenable. Föllmer-Orey ont utilisé un théorème de Shannon - Mc Millan - Breiman directement sous Q_G . Il est à noter qu'en cas de transition de phase, la fonction de grande déviation ne différencie pas les différentes mesures de Gibbs. Ellis [27] a donné une jolie application citée dans la section 1, à l'étude de la magnétisation dans le cas ferromagnétique, les situations critiques et sur-critiques n'étant pas exclues.

Dans le cas des champs aléatoires Gaussiens sur $\mathbb{R}^d$ de covariance $(I - \Delta)^m$, $m \geq 0$, Kusuoka obtient une formule varationnelle pour la transformée de Laplace du champ (F linéaire dans (3.2.3)), en partant du champ libre ($m = 0$, cas indépendant) comme outil de construction de l'entropie [44].

3.3. Grandes déviations pour le temps d'occupation (mesure empirique dans le cas discret)

Sous les conditions du début de 3.2, on obtient par contraction que le temps d'occupation du processus de Markov (X_t, P_x)

$$L_t = \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s}\, ds \tag{3.3.1}$$

(variable aléatoire à valeur $M_1(E)$, qui est la marginale au temps 0 de R_t) admet la fonction de grande déviation

$$I(\mu) = -\inf_{u \in \mathcal{D}_+} \int \frac{Lu}{u}(x)\mu(dx) \quad , \quad \mu \in M_1(E) \ , \tag{3.3.2}$$

où $\mathcal{D}_+$ est l'ensemble des fonctions bornées positives du domaine du générateur. Dans le cas discret, on trouve, pour $L_N = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \delta_{X^i}$,

$$I(\mu) = -\inf_{u \geq 0} \int \operatorname{Log} \frac{\Pi u}{u}\, d\mu \ . \tag{3.3.3}$$

Nous allons donner un argument heuristique "justifiant" (3.3.2). Le résultat de grande déviation appliqué à la transformée de Laplace de L_t nous dit que si $V \in C_b(E)$:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E_x \left[\exp\left\{\int_0^t V(X_s)\, ds\right\}\right] = \sup_\mu (\langle\mu, V\rangle - I(\mu)) \ . \tag{3.3.4}$$

D'autre part, la formule de Feynman-Kac nous dit que le membre de gauche de (3.3.4) est $\lim\limits_{t \to \infty} \operatorname{Log}\, ([e^{t(L+V)} 1](x))$, qui converge "par la théorie de Frobenius", vers $\lambda(V)$ la valeur principale de $L+V$; ceci donne alors par dualité des fonctions convexes (on suppose I convexe)

$$I(\mu) = \sup_V (\langle\mu, V\rangle - \lambda(V)) = \sup_V (\langle\mu, V - \lambda(V)\rangle) \ . \tag{3.3.5}$$

Toujours, "suivant la théorie de Frobenius", on a u_V positif, tel que $(L+V)u_V = \lambda(V)u_V$, d'où $V - \lambda(V) = -\frac{Lu_V}{u_V}$. Pour réconcilier (3.3.5) avec (3.3.2), il suffit de remarquer que lorsque V varie, u_V parcourt $\mathcal{D}_+$, car si $u \in \mathcal{D}_+$ et $V = -\frac{Lu}{u}$, on a $(L+V)u = 0$, d'où l'on déduit que $u = u_V$ (et $\lambda(V) = 0$). La situation, en fait, n'est pas aussi idyllique que ces quelques lignes pourraient porter à le croire, si l'on veut utiliser ces idées pour démontrer un résultat de grande déviation. Outre les hypothèses nécessaires à une bonne théorie de Frobenius-Krein-Rutman, la dualité convexe s'applique agréablement pour des topologies mettant $M(E)$ et $C_b(E)$ en dualité et pour lesquelles $\lambda(\cdot)$ et $I(\cdot)$ doivent être s.c.i., ce qui bien sûr crée d'autres difficultés. Sur ces questions, on pourra voir Stroock [59], et aussi Gärtner [37] qui utilise l'approche du théorème 1.5, de la section 1.

Cas auto-adjoint

Avec un peu de régularité si le semigroupe P_t est auto-adjoint par rapport à une mesure γ, on a

(3.3.6) $$I(\mu) = \langle\sqrt{-L}\, f\, ,\, \sqrt{-L}\, f\rangle_{L^2(\gamma)}\ ,\ \text{si}\ \ f^2 d\gamma = \mu\ \ \text{et}\ \ f \in \mathcal{D}_+(\sqrt{-L})\ ,$$
$$= +\infty \ \ \text{sinon.}$$

(Oubliant les questions de domaine, $I(\mu)$ correspond dans (3.3.2) au choix de $u = f$, et dans (3.2.2) au processus de Markov stationnaire de mesure invariante μ et de semigroupe $P_t^\mu = f^{-1}\, e^{t(L+V)} f$, $V = -\frac{Lf}{f}$.)

- Pour les opérateurs elliptiques sur $\mathbb{R}^d$, à coefficients C^∞

(3.3.7) $$L = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}(a\,.\,\mathrm{grad}) + b\,.\,\mathrm{grad}\ ,$$

Donsker - Varadhan [17] ont montré que si G est un ouvert borné régulier, et $\lambda_G(V)$ désigne la valeur propre principale de $L+V$ $(V \in C^\infty(\mathbb{R}^d))$, pour le problème de Dirichlet sur G, on a

(3.3.8) $$\lambda_G(V) = \sup_{\mu,\mu(\bar G)=1} [\langle\mu,V\rangle - I(\mu)]\ ,$$

(3.3.9) $$I(\mu) = \sup_V[\langle\mu,V\rangle - \lambda_G(V)]\ ,\ \mu(\bar G) = 1\ .$$

Ces formules confortent la morale que l'on peut tirer de l'explication heuristique précédente. Dans le cas auto-adjoint, grâce à (3.3.6), on retrouve la formulation variationnelle habituelle.

- Des applications de ces résultats de grandes déviations à différents types de lois du logarithme itéré ont été données par Donsker - Varadhan dans [18], [20].
- Dans un cadre "fortement récurrent", Iscoe - Numelin - Ney [39] ont obtenu que pour $f\ E \longrightarrow \mathbb{R}^d$, et B convexe, on avait une estimée

$$c_1\, t^{-d/2} \exp\{-\bar\Lambda(B)t\} \le P_x\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \in B\right] \le c_2 \exp\{-\bar\Lambda(B)t\}\ ,$$

où c_1, c_2 sont des constantes et $\bar\Lambda(B) = \inf\{I(\mu)\ ,\ \langle f,\mu\rangle \in B\}$

3.4. Une application à la saucisse de Wiener

Donsker - Varadhan ont étudié dans [16] le comportement asymptotique $(t \to \infty)$ de

(3.4.1) $$E[\exp\{-\nu|W_t(\beta)|\}]$$

où $W_t(\beta) = \bigcup_{0\le s\le t} B(\beta_s, 1)$ est le voisinage de rayon 1 de la trajectoire du Brownien β dans $\mathbb{R}^d$. L'asymptotique de (3.4.1) est intimement liée à la question des exposants de Lifschitz, de la densité d'état pour certains opérateurs de Schrödinger à potentiels aléatoires, dont nous parlerons plus bas. On peut interpréter (3.4.1) comme la probabilité de survie à l'instant t, d'un Brownien issu de 0, évoluant au milieu d'une répartition indépendante Poissonienne d'intensité ν, de sphères de rayon 1, constituant des pièges (mortels !) pour β.

Le calcul asymptotique de (3.4.1) est *a priori* susceptible de se prêter aux méthodes des sections 3.2 ou 3.3. On obtient ainsi deux formulations variationnelles.

- La première utilise le point de vue du champ et dit que

$$(3.4.2) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E[\exp - \nu |W_t(B)|] = \sup_R (-\nu C(R) - H(R|\dot{P})) ,$$

où R décrit les lois des distributions stationnaires sur $\mathbb{R}$ (à valeur $\mathbb{R}^d$), $H(R|\dot{P})$ désigne l'entropie de R par rapport au bruit blanc $\dot{P}$ sur $\mathbb{R}$ et

$$(3.4.3) \qquad C(R) = \lim_{t\to\infty} E^R[|W_{-t,1}| - |W_{-t,0}|] ,$$

$W_{a,b}$ est la saucisse de Wiener construite sur une primitive quelconque (R est supposé d'entropie finie par rapport à $\dot{P}$) de notre distribution aléatoire. On peut voir que $C(\dot{P})$ permet de retrouver la capacité usuelle $(d \geq 3)$, et $C(R)$ est une sorte de capacité généralisée. La formule (3.4.2) résulte de Eisele - Lang [28]. L'idée est que, quand N est grand, $|W_{0,N}(\beta)|$ peut être remplacé par une somme d'accroissements $\sum_{n=0}^{N-1} F_T \circ \vartheta_n$ où $F = |W_{-T+n,n+1}| - |W_{-T+n,n}|$, qui permet d'obtenir (3.4.2), en faisant tendre $T \longrightarrow \infty$.

- La seconde formule est

$$(3.4.4) \quad \lim t^{-d/d+2} \operatorname{Log} E[\exp \{-\nu |W_t(B)|\}] = \sup_{f\in L^1_+(\mathbb{R})} (-\nu |\{y : f(y) > 0\}| - I(f)) ,$$

où $\int f\, dy = 1$, et $I(f) = \frac{1}{2} \int [\nabla(\sqrt{f})]^2 dy$.

Nous allons expliquer plus bas d'où vient (3.4.4). Apparemment, (3.4.2) et (3.4.4) sont contradictoires. En fait, le membre droit (et gauche) de (3.4.2) est nul, et (3.4.4) donne l'asymptotique. Il faudrait cependant se garder de penser que le point de vue permettant d'obtenir (3.4.2) est inutile car Eisele et Lang [28] ont montré que, pour $|h|$ suffisamment grand, une formule du type (3.4.2) régissait l'asymptotique de $E \exp[h . B_t - \nu |W_t(B)|]$. On observe donc une rupture de régime.

- Donnons quelques indications sur la formule (3.4.4) de Donsker - Varadhan [16]. En utilisant le fait que $\lambda\beta./\lambda^2$ a même loi que $\beta.$, pour $\lambda > 0$, (3.4.1) vaut

$$(3.4.5) \qquad E[\exp\{-\nu\, \lambda^d\, |W^{\lambda^{-1}}_{t/\lambda^2}(\beta)|\}] ,$$

où $W^{\lambda^{-1}}_u(\beta)$ est la saucisse de Wiener de rayon λ^{-1} en temps u .

Si l'on a présent à l'esprit que :

$$|W^{\lambda^{-1}}_u(\beta)| = |\{y : L_u * \Phi_{\lambda^d} > 0\}| ,$$

où $\Phi_{\lambda^d} = \lambda^d \Phi(\lambda.)$ est une approximation de la masse de Dirac, on voit qu'en prenant $\lambda = t^{1/d+2}$, (3.4.5) devient

$$(3.4.6) \qquad E[\exp - \nu \lambda^d |W^{1/\lambda}_{\lambda^d}(\beta)|] ,$$

qui a le mérite de faire intervenir λ^d comme facteur d'intensité et de temps, si

bien qu'on peut chercher à appliquer une méthode de Laplace grâce au résultat de grande déviation sur le temps d'occupation. En fait, on a besoin d'un résultat de grande déviation pour $L_\tau * \Phi_\tau$ (on a posé $\lambda^d = \tau = t^{d/d+2}$), en topologie forte L^1, pour pouvoir traiter le cas de la fonction $F(f) = |\{y : f(y) > 0\}|$. De manière remarquable, ce rythme de régularisation est critique pour ce résultat (Donsker - Varadhan, II [14]). Le calcul du membre droit de (3.4.4) peut s'exprimer explicitement en fonction de la plus petite valeur propre γ_d de $\frac{1}{2}\Delta$ pour le problème de Dirichlet dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$.
La minoration dans (3.4.4) peut se voir aisément en imposant qu'il n'y ait pas d'obstacle dans un ouvert $t^{1/d+2}G$ contenant 0, et que le Brownien ne sorte pas de $t^{1/d+2}G$, ce qui donne la minoration du type

$$\text{Const.}\ \exp\{-\nu\,|\,\mathrm{vois}(t^{1/d+2}G,1)\,|\}\ \exp\{-t\,\lambda_1\,(t^{1/d+2}G)\}\ ,$$

comme $\lambda_1(t^{1/d+2}G) = t^{-2/d+2}\,\lambda_1\,(G)$, ceci donne un comportement logarithmique de l'expression précédente en $-\,t^{d/d+2}[\nu|G| + \lambda_1(G)]$, qui par optimisation (voir [16]) donne le membre droit de (3.4.4). Le point délicat est qu'il n'y a pas de "meilleure" configuration, et qu'on a aussi la majoration.
Si l'on considère le potentiel aléatoire V formé de la somme des translatés d'une fonction $\Phi \geq 0$, en chacun des points du processus ponctuel de Poisson (Φ supposée à support compact, non identiquement nulle pour simplifier), alors les résultats de Donsker - Varadhan permettent d'obtenir que si ρ est la densité d'état de $-\Delta + V$ sur $\mathbb{R}^d$,

(3.4.7) $$\rho([0,\lambda]) = \exp\ \{-\ \gamma_d^{d/2}\ \lambda^{-d/2}(1 + o(1))\}\ ,$$

on pourra voir sur ces questions Okura [49], Pastur [52].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT - *Grandes déviations et applications*, Lect. Notes in Math. 774, Springer (1980).

[2] R. AZENCOTT - *Formule de Taylor stochastique...*, Lect. Notes in Math. 921, 237-284, Springer (1982).

[3] R. AZENCOTT - *Densité des diffusions en temps petit...*, Lect. Notes in Math. 1059, 402-498, Springer (1984).

[4] R.R. BAHADUR, S.L. ZABELL - *Large deviations of the sample mean in general vector space*, Ann. Probab. 7, 587-621 (1979).

[5] P. BALDI - *Large deviation and stochastic homogeneisation*, à paraître Ann. Math. Pura Appl.

[6] P. BALDI, M. CHALEYAT-MAUREL - *Sur l'équivalent du module de continuité des diffusions*, Séminaire de Probabilités XXI, Lect. Notes in Math., Springer (1987).

[7] G. BEN AROUS - *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hors du cut-locus*, à paraître.

[8] J.-M. BISMUT - *Large deviations and Malliavin calculus*, Progress in Maths. n° 45, Birkhäuser, Basel (1984).

[9] E. BOLTHAUSEN - *Laplace approximations for sums of independant random vectors*, Probab. Th. Rel. Fields, part II (preprint), 72, 2, 305-318 (1986).

[10] F. COMETS - *Tunnelling and nucleation for a local mean field model*, à paraître.

[11] F. COMETS - *Grandes déviations pour les champs de Gibbs sur* $\mathbb{Z}^d$, C.R. Acad. Sci., t. 303, série I, n° 11, 511-513 (1986).

[12] H. CRAMER - *Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités*, Hermann, Paris (1937).

[13] D.A. DAWSON, J. GÄRTNER - *Long time fluctuations of weakly interacting diffusions*, preprint.

[14] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time*, Proc. conf. London, April 1974, A.M. Arthurs Ed., Clarendon, Oxford (1975).

[15] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time*, I, Comm. Pure Appl. Math., 28, 1-47 (1975) ; II, 28, 279-301 (1975) ; III, 29, 389-461 (1977), IV, 36, 183-212 (1983).

[16] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Asymptotics for the Wiener sausage*, Comm. Pure Appl. Math., 28, 525-565 (1975).

[17] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *On the principal eigenvalue of second-order elliptic differential operator*, Comm. Pure Appl. Math., 29, 595-621 (1976).

[18] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *On laws of the iterated lagorithm for local times*, Comm. Pure Appl. Math., 30, 707-753 (1977).

[19] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *On the number of distinct sites visited by a random walk*, Comm. Pure Appl. Math., 32, 721-747 (1979).

[20] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN _ *A law of the iterated logarithm for total occupation times of transient Brownian motion*, Comm. Pure Appl. Math., 33, 365-393 (1980).

[21] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Asymptotics for the Polaron*, Comm. Pure Appl. Math., 36, 505-528 (1983).

[22] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Large deviations for stationary Gaussian processes*, Commun. Math. Phys., 97, 187-210 (1985).

[23] H. DOSS - *Quelques formules asymptotiques pour les perturbations de systèmes dynamiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré, série B, 16, 1, 17-28 (1980).

[24] H. DOSS - *Démonstration probabiliste de certains développements asymptotiques quasi-classiques*, Bull. Sc. Math., 2e série, 109, 179-208 (1985).

[25] M.V. DAY - *On the asymptotic relation between equilibrium density and exit measure in the exit problem*, Stochastics, 12, 303-330 (1984).

[26] R.S. ELLIS - *Entropy, large deviations and statistical mechanics*, Springer, New York (1986).

[27] R.S. ELLIS - *Large deviation for the spin per site in Ferromagnetic models*, Preprint (1986).

[28] Th. EISELE, R. LANG - *Asymptotics for the Wiener sausage with drift*, preprint.

[29] W.G. FARRIS, G. JONA-LASINIO - *Large fluctuations for a non-linear heat equation with noise*, J. Phys. A : Math. Gen., 15, 3025-3055 (1982).

[30] W.H. FLEMING - *Exit probabilities and optimal stochastic control*, Appl. Math. Optim., 4, 329-346 (1978).

[31] W.H. FLEMING - *A stochastic control approach to some large deviation problems*, Proc. Rome conf., Lect. Notes in Math., 1119, New York (1984).

[32] H. FÖLLMER, S. OREY - *Large deviations for the empirical field of a Gibbs measure*, preprint (1986).

[33] M.I. FREIDLIN - *Sublimiting distributions and stabilization of solutions of parabolic equations with a small parameter*, Soviet Math. Dokl., 18, 4, 1114-1118 (1977).

[34] M.I. FREIDLIN - *The averaging principle and theorems on large deviations*, Russian Math. Surveys, 33, 5, 117-176 (1978).

[35] M.I. FREIDLIN - *Functional integration and partial differential equations*, Annals of Math. Studies 109, Princeton Univ. Press, Princeton (1985).

[36] A. FRIEDMAN - *Stochastic differential equations and applications*, Vol. 2, Academic Press, New York (1976).

[37] J. GÄRTNER - *On large deviations from the invariant measure*, Theory Probab. Appl., 22, 1, 24-39 (1977).

[38] C.J. HOLLAND - *A new energy characterization of the smallest eigenvalue of the Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math., 30, 755-765 (1977).

[39] I. ISCOE, P. NEY, E. NUMMELIN - *Large deviations of uniformly recurrent Markov additive process*, Adv. in Appl. Math., 6, 4, 373-412 (1985).

[40] G. JONA-LASINIO, F. MARTINELLI, E. SCOPPOLA - *New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics*, Commun. Math. Phys., 80, 223-254 (1981).

[41] Y.I. KIFER - *On the asymptotics of the transition density of processes with small diffusion*, Theory Probab. Appl., 21, 3, 513-522 (1976).

[42] Y.I. KIFER - *On the principal eigenvalue in a singular perturbation problem with hyperbolic limit points and circles*, J. Diff. Equations, 37, 108-139 (1980).

[43] Y.I. KIFER - *The exit problem for small random perturbation of dynamical systems with a hyperbolic fixed point*, Israel J. Math., 40, 1, 74-96 (1981).

[44] S. KUSUOKA - *The variational principle for stationary Gaussian Markov fields*, Lect. Notes in Control 49, 179-187, Springer (1983).

[45] O.E. LANFORD - *Entropy and Equilibrium states in classical statistical Mechanics*, Lect. Notes in Physics, 20, 1-113, Springer (1973).

[46] R. LÉANDRE - *Développement asymptotique de la densité des diffusions dégénérées*, preprint.

[47] P.L. LIONS - *Grandes déviations, calcul des variations et solutions de viscosité*, preprint.

[48] S.A. MOLCANOV - *Diffusion processes and Riemannian geometry*, Russian Math. Survey, 30, 1-53 (1975).

[49] H. OKURA - *On the spectral distribution of certain integro-differential operators with random potential*, Osaka, J. Math., 16, 633-666 (1979).

[50] S. OLLA - *Large deviations for Gibbs random fields*, preprint (1986).

[51] S. OREY - *Large deviation in ergodic theory*, Sem. on Stoch. Proc. 84, Cinlar Ed. Birkhäuser, Boston (1986).

[52] L.A. PASTUR - *Behaviour of some Wiener integrals as* $t \longrightarrow \infty$ *and the density of states* ..., Teor. Mat. Fiz, 32, 88-95 (1977) (en Russe).

[53] M. PINCUS - *Gaussian Processes and Hammerstein integral equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 134, 193-216 (1968).

[54] P. PRIOURET - *Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques*, Lect. Notes in Math., 921, 184-200, Springer (1982).

[55] T. ROCKAFELLAR - *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1980).

[56] I. SANOV - *On the probability of large deviations of random variables*, Selected Trans. Math. Stat. Prob., 1, 213-244 (1961).

[57] SÉMINAIRE ORSAY - *Grandes déviations et applications statistiques*, Astérisque 68, S.M.F., Paris (1979).

[58] M. SCHILDER - *Some asymptotic formulae for Wiener integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 125, 63-85 (1966).

[59] D.W. STROOCK - *An introduction to the theory of large deviations*, Springer, New York (1984).

[60] Y. TAKAHASHI - *Entropy function for dynamical systems and their random perturbation*, Proc. Int. Symp. on S.D.E., Kyoto (1982).

[61] S.R.S. VARADHAN - *Asymptotic probabilities and differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 19, 261-296 (1966).

[62] S.R.S. VARADHAN - *Diffusion processes in a small time interval*, Comm. Pure Appl. Math., 20, 659-685 (1967).

[63] S.R.S. VARADHAN - *Large deviations and applications*, SIAM, Philadelphia (1984).

[64] A.D. VENTSEL - *On the asymptotics of matrices with elements...*, Soviet Math. Dokl., 13, 1, 65-68 (1972).

[65] A.D. VENTSEL - *Formulae for eigenfunctions and eigenmeasures associated with a Markov process*, Theory Probab. Appl., 18, 1, 1-26 (1973).

[66] A.D. VENTSEL, M.I. FREIDLIN - *On small random perturbations of dynamical systems*, Russian Math. Surveys, 25, 1, 1-55 (1970).

[67] A.D. VENTSEL, M.I. FREIDLIN - *Random perturbations of dynamical systems*, Springer, New York (1984).

[68] M.I. FREIDLIN - *Limit theorems for large deviations and reaction-diffusion equations*, Ann. Prob., 13, 3, 639-675 (1985).

[69] M. CASSANDRO, E. OLIVIERI, P. PICCO - *Small random perturbations of infinite dimensional dynamical systems and nucleation theory*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. th., 44, 4, 343-396 (1986).

Alain-Sol SZNITMAN

Université de Paris 6
L.A. 224 du CNRS
Laboratoire de Probabilités
Tour 56, 3e étage
4 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05