FRANÇOIS LOESER

Déformations de courbes planes

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 679, p. 187-205
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__187_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1987
39ème année, 1986-87, n° 679

DÉFORMATIONS DE COURBES PLANES
[d'après Severi et Harris]

par François LOESER

Introduction

"*La variété* $V^{d,\delta}$ *des courbes planes nodales* irréductibles *de degré* d *ayant* δ *points doubles est irréductible*".

Cette assertion célèbre de Severi a été démontrée par J. Harris en 1985 ([H1]). La démonstration que donnait Severi dans l'Anhang F de son livre [S] (1921) était erronée [1] et des démonstrations n'étaient connues que dans des cas particuliers : $\delta > \frac{d^2}{2} - 2d + 2$ (Popp [P], 1966), $\delta > \frac{d^2}{2} - \frac{9}{4}d + 2$ (Alibert-Maltsiniotis [A-M], 1974), $\delta \geq \frac{d^2}{2} - 3d + \frac{9}{2}$ (Arbarello-Cornalba [A-C 4], 1983). Depuis la démonstration de Harris, d'autres démonstrations ont été données : l'une par Z. Ran [R], l'autre par J. Harris dans [H2]. Cette dernière, qui est celle que nous exposerons à ce Séminaire, est une simplification par Harris de sa preuve originelle et est issue de [H1] et d'une preuve non publiée de M. Nori.

Nous commençons par rappeler la description dûe à Severi des variétés $U^{d,\delta}$ de courbes planes nodales de degré d ayant δ points doubles. Le résultat fondamental concernant les courbes nodales est que δ points doubles ordinaires imposent δ conditions indépendantes aux courbes planes : c'est une conséquence de l'indépendance des conditions d'adjonction. On en déduit non seulement que toutes les composantes irréductibles de $U^{d,\delta}$ sont lisses de dimension $\frac{d(d+3)}{2} - \delta$, mais aussi que l'on peut lissifier les δ points doubles indépendamment, ce qui donne une description de $\overline{U^{d,\delta'}}$ au voisinage de $U^{d,\delta}$ pour $\delta' < \delta$ (Théorème 2.1).

En utilisant cette description et un argument de monodromie, Severi montrait que l'irréductibilité de $V^{d,\delta}$ est une conséquence de l'énoncé suivant : toute courbe plane nodale de degré d admet une spécialisation sur d droites en position générale. Par récurrence, on se ramène donc à montrer que toute courbe plane nodale admet une spécialisation sur une courbe nodale ayant davantage de

[1] Pour une analyse de l'erreur de Severi, voir [Z3], p. 210-211 et [N1], p. 376-377.

points doubles. Nous expliquons ces réductions dans la partie 4. Une des difficultés du problème est que l'on ne sait pas construire de telles déformations directement.

Le résultat démontré par Harris est le suivant : la variété $V_{d,g}$ des courbes planes irréductibles et réduites, de degré d et de genre géométrique g, est irréductible. Cet énoncé est équivalent à celui de Severi parce que toute composante irréductible de $U_{d,g}$ (la variété des courbes planes réduites de degré d et de genre géométrique g) contient comme ouvert dense une composante irréductible de $U^{d,\delta}$ (avec $\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$) d'après un résultat d'Arbarello et Cornalba et de Zariski que nous rappelons dans la 3e partie. Pour démontrer l'assertion de Severi, il suffit donc de démontrer l'énoncé suivant : "si Ω est une composante irréductible de $V_{d,g}$, $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ a une composante irréductible de codimension 1 dans $\bar{\Omega}$", car une telle composante contient toujours une courbe nodale.

Comme on ne sait pas construire directement de déformations des courbes appartenant à Ω sur des points généraux de $\bar{\Omega} \setminus \Omega$, il faut un moyen pour déduire de l'étude de déformations spéciales, obtenues géométriquement, que $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ a une composante de codimension 1. Pour ce faire, Harris utilise l'espace des modules de courbes lisses de genre g, M_g et sa compactification $\overline{M_g}$ par les modules de courbes stables : on a un morphisme $\varphi : \Omega \cap V^{d,\delta} \longrightarrow M_g$ qui à une courbe nodale associe le module de sa normalisée. On note $\bar{\Gamma} \subset \bar{\Omega} \times \overline{M_g}$ l'adhérence du graphe de φ et $\varphi_1 : \bar{\Gamma} \longrightarrow \bar{\Omega}$ la projection. Le critère de Harris est le suivant : s'il existe C de $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ dont la fibre $\varphi_1^{-1}(C)$ admet un point isolé, alors $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ contient une composante de codimension 1. Ceci se déduit essentiellement du fait que $\overline{M_g} \setminus M_g$ est de codimension 1 dans $\overline{M_g}$.

En 6, on construit effectivement une déformation produisant une telle courbe C. Plusieurs choix sont possibles. On considère suivant [H2] des déformations générales de courbes nodales passant par d points fixés d'une droite fixée L [(1)] sur des courbes C contenant L. *A priori* on ne sait même pas si C est réduite. On contrôle la situation en comptant les paramètres : C dépend de $2d + g - 2$ paramètres. En utilisant un résultat analogue à celui d'Arbarello et Cornalba et de Zariski pour des familles spéciales de courbes (exposé en 3.5), on arrive à en déduire que C est réduite, à contrôler le genre géométrique de C, et à décrire la fibre spéciale de la réduction semi-stable de la famille des normalisées d'une famille à un paramètre de courbes de qui se spécialisent sur C. Une fois connue cette fibre spéciale, on voit directement que C vérifie le critère de Harris, ce qui conclut la démonstration.

Dans la première partie, on propose quelques conséquences et compléments : on expose tout d'abord comment Zariski déduisait de l'énoncé de Severi la commu-

---

(1) Dans sa première preuve [H1], J. Harris utilisait des familles de courbes ayant un point de contact d'ordre élevé avec une droite. L'idée de considérer plutôt des courbes passant par d points fixés d'une droite, ce qui simplifie la démonstration, est dûe à M. Nori.

tativité du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe nodale plane (une démonstration indépendante de l'énoncé de Severi a été donnée en 1979 par Fulton et Deligne). On décrit également les espaces $U_{d,g}$ et leur adhérence. Enfin, on décrit la situation pour les familles de courbes ayant des singularités cuspidales ou arbitraires.

Je remercie A. Nobile, C. Sabbah et B. Teissier pour l'aide apportée pendant la préparation de cet exposé.

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

1.0. Une variété algébrique complexe réduite et non vide est irréductible si le complémentaire du lieu singulier est connexe.

1.1. Courbes

1.1.1. Pour nous, une courbe sera une courbe algébrique complexe complète et réduite (sauf mention explicite du contraire).

1.1.2. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur un espace topologique, on note $h^i(V,\mathcal{F})$ la dimension de l'espace vectoriel complexe $H^i(V,\mathcal{F})$ quand celle-ci est finie et $\chi(V,\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i h^i(V,\mathcal{F})$ quand la somme est finie. Si C est une courbe, son genre arithmétique est par définition $p_a(C) = 1-\chi(C,\mathcal{O}_C)$.

1.1.3. Si C est une courbe lisse et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur C de degré d, on a le théorème de Riemann-Roch : $\chi(\mathcal{L}) = d-p_a(C)+1$.

1.1.4. Si C est une courbe et π la normalisation $\tilde{C} \longrightarrow C$ de C, le genre géométrique de C est par définition $g(C) = p_a(\tilde{C})$. Si p est un point de C, on note $\delta(p) = \dim_{\mathbb{C}}(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C)_p$. p est un point lisse de C si et seulement si $\delta(p) = 0$. On pose $\delta(C) = \sum_{p\in C}\delta(p)$. On a $p_a(C) = g(C) + \delta(C)$.

1.1.5. L'annulateur $\mathcal{C}$ du faisceau de modules $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur C appelé le conducteur. Par définition, $\mathcal{C}$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_C$ modules et de $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ modules. Il existe donc un diviseur effectif Δ sur $\tilde{C}$ tel que $\mathcal{C}$ s'identifie à $\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\Delta))$.

1.1.6. Un point singulier d'une courbe est un point double ordinaire s'il est analytiquement équivalent à la singularité $xy = 0$ (deux droites transverses). Si p est un point double ordinaire $\delta(p) = 1$. Une courbe est dite nodale si tous ses points singuliers sont des points doubles ordinaires. Si C est une courbe nodale, de points singuliers $p_1,\dots,p_r$, on a $\mathcal{C} = \mathcal{O}_C(-P)$, avec $P = P_1+\dots+P_r$.

1.2. Courbes planes

1.2.1. Si C est une courbe projective plane de degré d, $\omega_{\tilde{C}} = \pi^*(\mathcal{O}_C(d-3))(-\Delta)$ est un faisceau dualisant sur $\tilde{C}$. On en déduit la formule de Plücker $g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta(C)$ et l'égalité de Gorenstein $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C/\mathcal{C} = \delta(C)$.

1.2.2. On en déduit également le résultat important suivant, classiquement connu comme "l'indépendance des conditions d'adjonction" :

PROPOSITION 1.2.2.- *Si* C *est une courbe projective plane de degré* d , $h^1(C, \mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{C}) = 0$.

Démonstration.- On a $h^1(C, \mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{C}) = h^1(\widetilde{C}, \pi^*(\mathcal{O}_C(d))(-\Delta)) = h^0(\widetilde{C}, \pi^*(\mathcal{O}_C(-3)))$, car $\omega_{\widetilde{C}}$ est dualisant. Mais $\pi^*\mathcal{O}_C(-3)$ n'a de section globale non triviale sur aucune composante irréductible de $\widetilde{C}$, d'où le résultat.

1.2.3. Soient (x,y,z) des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Toute courbe plane C de degré d est donnée par une équation homogène de degré d : $\sum_{i+j+k=d} a(i,j,k)x^i y^j z^k = 0$. On peut donc identifier l'ensemble des courbes planes de degré d (non nécessairement réduites) à l'espace projectif $\mathbb{P}^N = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$ avec $N = \frac{d(d+3)}{2}$. On note $U_{d,g}$ le sous-ensemble de $\mathbb{P}^N$ formé des courbes (réduites) de degré d et genre géométrique g , $V_{d,g}$ le sous-ensemble de $U_{d,g}$ formé des courbes *irréductibles*, $U^{d,\delta}$ le sous-ensemble de $U_{d,g}$ formé des courbes nodales ayant $\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ points doubles et $V^{d,\delta}$ l'intersection de $U^{d,\delta}$ avec $V_{d,g}$. Ce sont des sous-variétés localement fermées de $\mathbb{P}^N$.

2. DESCRIPTION DES VARIÉTÉS DE COURBES NODALES PLANES

2.1. Nous allons rappeler la description des variétés $U^{d,\delta}$ et $V^{d,\delta}$ donnée par Severi dans l'Anhang F de son livre [S].

THÉORÈME 2.1 (Severi).- *Si* $0 \leq \delta \leq d\frac{(d-1)}{2}$:

1) $U^{d,\delta}$ *est non vide ;*

2) *toute composante irréductible de* $U^{d,\delta}$ *est lisse de dimension* $\frac{d(d+3)}{2} - \delta = 3d + g - 1$;

3) *si* $\delta' < \delta$, *on a* $U^{d,\delta} \subset \overline{U^{d,\delta'}}$. *Plus précisément, pour toute courbe* C *appartenant à* $U^{d,\delta}$, *pour tout choix de* δ' *points doubles de* C *(les points assignés), il existe une branche analytique locale lisse connexe* W *de* $\overline{U^{d,\delta'}}$ *au voisinage de* C , *dont le germe en* C *est unique, telle que pour tout arc analytique complexe :* $\lambda \begin{cases} D \longrightarrow W \\ t \longrightarrow C_t \end{cases}$ *vérifiant* $\lambda(D \setminus \{0\}) \subset U^{d,\delta'}$ *et* $C_0 = C$, *les* δ' *points doubles de* C_t , $t \in D \setminus \{0\}$, *se spécialisent sur les* δ' *points assignés de* δ ;

4) *avec les notations de 3), le complémentaire dans* C *de l'ensemble des points assignés a* ℓ *composantes connexes si et seulement si les courbes appartenant à* $W \cap U^{d,\delta'}$ *ont exactement* ℓ *composantes irréductibles.*

COROLLAIRE 2.2.- *Si* $0 \leq \delta \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, $V^{d,\delta}$ *(et donc* $V_{d,g}$ *) est non vide.*

Démonstration du corollaire.- Soit C une courbe réunion de d droites en position générale. La courbe C a $\frac{d(d-1)}{2}$ points doubles. Comme $\frac{d(d-1)}{2} - (d-1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, pour $0 \leq k \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, on peut assigner k points doubles de C n'appartenant pas à une droite de C fixée. D'après la partie 4) du théorème, on obtient ainsi une courbe nodale irréductible avec exactement k points doubles.

Démonstration du théorème.- Nous esquissons seulement la démonstration et renvoyons le lecteur à [S] et à [A-M], [N1], [P], [T1], [Z2] pour des démonstrations plus détaillées.

1) est une conséquence de 3) (car d droites en position générale ont $\frac{d(d-1)}{2}$ points doubles).

2) Soit C une courbe nodale appartenant à $U^{d,\delta}$. L'espace tangent de Zariski à $U^{d,\delta}$ en C s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H^0(C,\mathcal{O}_C(d))$ et un calcul facile en coordonnées locales montre que cet espace vectoriel est égal à $H^0(C,\mathcal{O}_C(d)(-P))$. D'après 1.2.2, sa dimension est $3d+g-1$; ceci en tout point C de $U^{d,\delta}$, ce qui prouve que $U^{d,\delta}$ est lisse de dimension $3d+g-1$ ($U^{d,\delta}$ est réduit par définition).

3) La démonstration est similaire à celle de 2) : si on choisit δ' points doubles, ils imposent des conditions indépendantes d'après 1.2.2.

4) On se ramène à démontrer le résultat pour $\ell = 0$. Pour traiter ce cas, on remarque que si une courbe nodale C appartenant à $U^{d,\delta}$ dont δ' points doubles sont assignés s'écrit $C = C_1 \cup C_2$ avec C_1 et C_2 deux courbes sans composantes irréductibles communes, de degré respectivement d_1 et d_2 et possédant respectivement δ_1 et δ_2 points doubles dont δ_1' et δ_2' sont assignés, on a :

$$\dim U^{d,\delta'} = \dim U^{d_1,\delta_1'} + \dim U^{d_2,\delta_2'} + i ,$$

i désignant le nombre de points de $C_1 \cap C_2$ qui ne sont pas assignés.

3. ESTIMATIONS DE DIMENSIONS

3.1. Dans cette partie, nous allons montrer que toute composante irréductible de $U_{d,g}$ contient comme ouvert dense une composante irréductible de $U^{d,\delta}$ ($\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$) et donner des estimations sur la dimension des variétés de courbes spéciales qui seront utilisées en 6.

3.2. Une minoration

Soit C une courbe propre et lisse de genre g . On note $\mathrm{Pic}^d(C)$ l'ensemble des classes d'équivalence linéaire de fibrés de rang 1 et de degré d sur C , et $G_d^r(C) = \{(L,V) \mid L \in \mathrm{Pic}^d(C)\ ,\ V \subset H^0(C,L)\ \dim V = r+1\}$. (On suppose d et r positifs ou nuls). Dans le livre [A-C-G-H], on trouvera une étude détaillée et approfondie de $G_d^r(C)$. Il est possible de munir $G_d^r(C)$ d'une structure de variété algébrique et on a l'estimation suivante de la dimension de $G_d^r(C)$:

PROPOSITION 3.2.1 ([A-C-G-H], p. 187).- *Si* $G_d^r(C)$ *est non vide, toute composante irréductible de* $G_d^r(C)$ *est de dimension au moins* $\rho = (r+1)(d-r)-rg$.

Nous renvoyons le lecteur à *loc. cit.* pour la démonstration. Notons cependant que l'on déduit la proposition de l'estimation standard de la dimension des variétés déterminantielles associées à un morphisme de fibrés. Pour (L,V) dans $G^r_d(C)$, le choix d'une base de V permet de définir un morphisme non dégénéré $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^r$. On déduit donc de 3.2.1 que toute composante irréductible de la variété paramétrant les couples (C,φ), où C est une courbe propre et lisse de genre g et φ un morphisme non dégénéré $C \longrightarrow \mathbb{P}^r$, est de dimension au moins $3g-3+\dim PGL_{r+1}+\rho = (r+1)d+(3-r)(g-1)$. On a donc, pour $r = 2$, le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.2.2.- *Toutes les composantes irréductibles de* $U_{d,g}$ *sont de dimension au moins* $3d+g-1$.

3.3. Déformations locales de singularités de courbes planes

Soit $f(x,y)$ un polynôme de $\mathbb{C}[x,y]$. On suppose que $f(0,0) = 0$ et que l'origine est un point singulier isolé de la courbe C définie par $f = 0$. Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que C ne contient pas la droite $x = 0$.

On dit que le polynôme $F(x,y,t)$ de $\mathbb{C}[x,y,t]$ induit une déformation à δ constant (resp. équisingulière) de C à l'origine si $F(x,y,0) = f$ et si, pour t petit, la somme des invariants δ des singularités de $F(x,y,t) = 0$ qui se spécialisent sur l'origine est égal à la valeur de l'invariant δ de C à l'origine (resp. si, au voisinage de l'origine, le discriminant déduit de la projection de $F(x,y,t) = 0$ sur le plan des (x,t) est lisse). Toute déformation équisingulière est à δ constant (*cf.* [Te]).

D'après Wahl [W2], $E_0 = \{g \in \mathbb{C}[x,y] \,/\, g = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0}$, F déformation équisingulière de C à l'origine$\}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$. E_0 contient l'idéal J_0 engendré par f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (qui correspond aux déformations analytiquement triviales). On note C' un petit représentant du germe de C à l'origine et $\mathcal{C}_0$ la fibre de $\mathcal{C}$ à l'origine.

On a le résultat suivant, dont la démonstration nous a été communiquée par B. Teissier :

PROPOSITION 3.3.1.- *Soit* $F(x,y,t) = f(x,y) + t^k f_k(x,y) + t^{k+1}\varphi(x,y,t)$ *une équation d'une déformation locale* $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *de la courbe plane* C'. *Si la déformation est à* δ *constant, on a* $f_k \in \mathcal{C}_0$.

Démonstration.- D'après [Te], l'hypothèse implique que le morphisme $\lambda \circ \pi$, où π est la normalisation $\bar{X} \longrightarrow X$ de X, a pour fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{C}$ la normalisation $\bar{X}(0)$ de la fibre $X(0) = C'$ et que le conducteur $\mathcal{C}_X$ de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ est plat au-dessus de la base de la déformation et a pour fibre, au-dessus de l'origine, le conducteur $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{O}_{C,0}$. Comme $\frac{\partial F}{\partial t} = k\, t^{k-1}(f_k + t\,\psi(x,y,t))$ appartient à $\mathcal{C}_X$ (par l'interprétation classique de $\mathcal{C}_X$ comme idéal d'adjonction), on obtient le résultat.

On va en déduire le résultat suivant, démontré par O. Zariski dans [Z3] :

THÉORÈME 3.3.2 [Z3].- a) $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{C}_0$.

b) $\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0$ *si et seulement si* 0 *est un point double ordinaire de* C .

Démonstration.- a) est une conséquence de 3.3.1, car toute déformation équisingulière est à δ constant.

b) Dans la base de la déformation semi-universelle locale de C' dont on identifie l'espace tangent à l'origine avec ${}^{\mathcal{O}}\mathbb{C}^2,0/_{\mathcal{I}_0}$, on considère E (resp. Δ) la sous-variété correspondant aux déformations équisingulières (resp. à δ constant). E est lisse à l'origine d'espace tangent ${}^{\mathcal{E}_0}/_{\mathcal{J}_0}$ d'après [W2], et Δ contient E . Si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0$, alors d'après 3.3.1 le cône tangent réduit à Δ en l'origine est égal à ${}^{\mathcal{E}_0}/_{\mathcal{J}_0}$. Ceci entraîne donc que $E = \Delta$, ce qui n'est possible que si $\delta_0 = 1$, car si $\delta_0 > 1$, d'après [Te] , on a toujours une déformation à δ constant sur une courbe à δ_0 points doubles, qui n'est pas équisingulière puisque le point singulier se sépare. Par ailleurs, les seules singularités isolées de courbes planes avec $\delta = 1$ sont le point cuspidal (analytiquement équivalent à $x^2 - y^3 = 0$) et le point double ordinaire. On en déduit le résultat, car la déformation d'un point cuspidal sur un point double ordinaire est à δ constant et n'est pas équisingulière.

Remarque 3.3.3.- La démonstration de [Z3] utilise une récurrence sur le nombre d'éclatements ponctuels nécessaires pour résoudre C à croisements normaux.

Remarque 3.3.4.- On peut déduire de 3.3.1 et 7.2.2 que le cône tangent réduit à l'origine de Δ s'identifie à ${}^{\mathcal{C}_0}/_{\mathcal{J}_0}$ ([D-H] Th. 4.15). La proposition 3.3.1 est aussi démontrée dans [D-H].

3.4. <u>Toute composante irréductible de</u> $U_{d,g}$ <u>a pour élément général une courbe nodale</u>

On va déduire de 3.2 et 3.3 le résultat suivant, dû à Arbarello et Cornalba [A-C 1] et Zariski [Z3] :

THÉORÈME 3.4.- a) *Si* W *est une sous-variété réduite irréductible de* $U_{d,g}$ *, alors* $\dim W \leq 3d+g-1$.

b) *Toute composante irréductible de* $U_{d,g}$ *est de dimension* $3d+g-1$ *et admet pour élément général une courbe nodale ayant exactement* $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ *points doubles ordinaires.*

Démonstration.- a) Soit C une courbe générale appartenant à W . Soit $\mathcal{E}$ le faisceau inversible sur C qui coïncide avec $\mathcal{O}_C$ aux points lisses de C et a pour fibre l'idéal $\mathcal{E}_p$ en un point singulier p de C . L'espace tangent à W

en C s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H^0(C, \mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{E})$. Rappelons que, d'après l'indépendance des conditions d'adjonction (1.2.2), on a $h^1(C, \mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{C}) = 0$ et donc $h^0(C, \mathcal{O}_C(d) \otimes \mathcal{C}) = 3d+g-1$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, on en déduit l'inégalité demandée. Quand $\dim W = 3d+g-1$, on a nécessairement $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ et donc C est nodale d'après 3.3.2. b) est alors conséquence de a) et 3.2.2.

3.5. Quelques estimations utiles

Soit L une droite de $\mathbb{P}^2$, $a_1, \ldots, a_m$ m points distincts de L , $Z = \{a_1, \ldots, a_m\}$. On note $W_{L,Z,k} \subset U_{d,g}$ la variété des courbes C dans $U_{d,g}$ telles que $C \cap L$ est de la forme $Z \cup Z'$ avec Z' de cardinal au plus k .

J. Harris obtient le résultat suivant, en raisonnant sur une modification de $\mathbb{P}^2$ et en utilisant une généralisation du Théorème 3.4 à des systèmes linéaires sur des surfaces pour lesquelles nous renvoyons à [H1], [N2] :

PROPOSITION 3.5.1 [H2].- *Si* $m+k \le d$, $W_{L,Z,k}$ *est non vide et toute composante irréductible de* $W_{L,Z,k}$ *est de dimension* $2d+g-1+k$ *et a pour élément général une courbe nodale lisse en ses points d'intersection avec* L .

Nous utiliserons la variante suivante, que l'on en déduit sans difficulté :

PROPOSITION 3.5.2 [H2].- *Soit* $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow B$ *une famille de courbes de genre géométrique* g *paramétrées par une base* B *irréductible,* $\eta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ *un morphisme. On note* $\bar{C}$ *une fibre générale de* π *et on suppose que* η *n'est constante sur aucune composante connexe de* $\bar{C}$ *et que le degré de la restriction de* $\eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ *à* $\bar{C}$ *est* d . *On suppose de plus que* $\eta^{-1}(L) \cap \bar{C}$ *contient au plus* k *points qui ne sont pas dans* $\eta^{-1}(Z)$. *On note* W *la sous-variété réduite de* $\mathbb{P}^N$ *associée aux courbes* $C_b = \eta(\pi^{-1}(b))$, $b \in B$. *Alors* $\dim W \le 2d+g-1+k$ *et s'il y a égalité, la restriction de* η *à* $\bar{C}$ *est birationnelle sur son image qui est une courbe nodale lisse en chacun de ses points d'intersection avec* L .

4. RÉDUCTIONS DU PROBLÈME

4.1. Pour démontrer l'irréductibilité de $\overline{V_{d,g}}$, il suffit de démontrer que toute composante irréductible de $V_{d,g}$ contient dans son adhérence une courbe nodale de genre géométrique $g' < g$ (c'est-à-dire ayant $\delta' > \delta$ points doubles). Plus précisément :

PROPOSITION 4.1.- *L'assertion de Severi*

(*) $\overline{V_{d,g}}$ est irréductible pour $d \ge 1$, $g \ge 0$, $g \le \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

est conséquence de chacune des assertions suivantes :

1) *l'adhérence de toute composante irréductible de* $V_{d,g}$ *contient* $V_{d,0}$, *pour tous les* $d, g \ge 1$ *vérifiant* $g \le \frac{(d-1)(d-2)}{2}$;

2) *L'adhérence de toute composante irréductible de* $V_{d,g}$ *contient une courbe nodale de genre géométrique* $g' < g$ *, pour tous les* $d,g \geq 1$ *vérifiant* $g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ *;*

3) *Pour toute composante irréductible* Ω *de* $V_{d,g}$ *, il existe une composante irréductible de* $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ *de codimension* 1 *dans* $\bar{\Omega}$ *, pour tous les* $d,g \geq 1$ *vérifiant* $g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Démonstration.- On va démontrer 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ *).

1) $\Rightarrow$ *) : Remarquons tout d'abord que $\overline{V_{d,0}}$ est irréductible, car image d'un ouvert de la variété des triplets de polynômes homogènes sur $\mathbb{P}^1$.

Pour montrer l'implication, il suffit donc, d'après 2.1 3), de véfifier que si E est une courbe appartenant à $V^{d,(d-1)(d-2)/2}$ la monodromie de $V^{d,(d-1)(d-2)/2}$ agit transitivement sur les δ-uplets de points doubles de E , pour $0 \leq \delta \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Pour cela, on remarque que E s'obtient comme projection générale d'une courbe rationnelle normale C de $\mathbb{P}^d$. Les points doubles de E sont exactement les images par la projection des points d'intersection du centre de la projection (un plan de dimension $d-3$) avec la variété des cordes de C (une variété de dimension 3). Il suffit alors d'appliquer le résultat suivant :

THÉORÈME DE LA POSITION GÉNÉRALE.- *Soit* $X \subset \mathbb{P}^n$ *une variété irréductible réduite de dimension* r *et de degré* $d > 1$ *,* $\mathcal{U}$ *l'ouvert de la grassmannienne* $G(r)$ *des plans de codimension* r *de* $\mathbb{P}^n$ *qui intersectent* X *en des points lisses et transversalement,* H_0 *un élément de* $\mathcal{U}$ *, alors l'image de* $\pi_1(\mathcal{U},H_0)$ *dans le groupe des automorphismes de* $X \cap H_0$ *est le groupe symétrique* S_d .

Démonstration (d'après [A-C-G-H], p. 111-112).- Il est suffisant de démontrer que l'image de $\pi_1(\mathcal{U},H_0)$ agit 2-transitivement et contient une transposition. Remarquons que $\tilde{X} = \{(p_1,p_2,H) \subset X \times X \times G(r) / p_1,p_2 \in H \cap X , p_1 \neq p_2\}$ se projette sur $X \times X \setminus \Delta$ (Δ étant la diagonale), et que le morphisme $\tilde{X} \longrightarrow X \times X \setminus \Delta$ est une fibration de fibre une grassmannienne. $\tilde{X}$ est donc irréductible, ce qui prouve que l'ouvert $\tilde{X} \cap X \times X \times \mathcal{U}$ est connexe, d'où la 2-transitivité de l'image de $\pi_1(U,H_0)$. Soit $H_{t,t\in\mathbb{P}^1}$ un pinceau général de plans de codimension r , et H_{t_0} un plan qui n'est pas transverse à X . H_{t_0} rencontre X en $d-1$ points lisses de X , a un contact quadratique ordinaire avec X en un de ces points et est transverse à X aux autres. Quand t tourne autour de t_0 en étant proche de t_0 , les deux points de $X \cap H_t$ qui se spécialisent sur le point de contact s'échangent, ce qui prouve que l'image de $\pi_1(U,H_0)$ contient une transposition.

2) $\Rightarrow$ 1) : Soit Ω une composante irréductible de $V_{d,g}$ et C une courbe nodale de genre géométrique $g' < g$ qui appartient à $\bar{\Omega}$. D'après 2.1 3), il existe une composante irréductible de $U_{d,g'}$ qui est contenue dans $\bar{\Omega}$. Par récurrence, on en déduit (en décomposant un élément général de $U_{d,g'}$ en composantes

irréductibles) que $\bar{\Omega}$ contient $U_{d,1-d}$ (qui est irréductible : c'est l'adhérence de $U^{d,d(d-1)/2}$, l'espace des d-uplets de droites en position générale). Comme on peut lissifier d'abord $d-1$ points d'une courbe appartenant à $U^{d,d(d-1)/2}$ puis g autres, $\bar{\Omega}$ contient une composante irréductible de $\overline{V_{d,0}}$, d'après 3.1 3), et donc $\overline{V_{d,0}}$ car ce dernier est irréductible.

3) $\Rightarrow$ 2) : Si Ω est une composante irréductible de $V_{d,g}$ et Z une composante irréductible de dimension $3d+g-2$ de $\bar{\Omega} \setminus \Omega$, on déduit de 3.4, tout d'abord qu'un point général de Z est une courbe réduite, puis que c'est une courbe nodale de genre géométrique $g-1$.

5. UTILISATION DE $\overline{M_g}$

5.1. Compactification de M_g par les courbes stables

Soit M_g l'espace des modules des courbes lisses complètes et connexes de genre g. Les points de M_g correspondent aux classes d'isomorphisme de telles courbes. Une courbe stable de genre g est une courbe connexe de genre arithmétique g dont toutes les singularités sont des points doubles ordinaires et dont les composantes rationnelles lisses contiennent au moins 3 points singuliers. D'après Knudsen [Kn], il existe une variété projective $\overline{M_g}$ dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de courbes stables de genre g. M_g s'identifie à un ouvert de Zariski de $\overline{M_g}$ et son complémentaire $\Delta = \overline{M_g} \setminus M_g$ est de codimension 1 dans $\overline{M_g}$ (c'est le support d'un diviseur de Cartier). Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [D-M], [Kn], [M] et aux références qui s'y trouvent.

5.2. Une nouvelle réduction

Soit Ω une composante irréductible de $V_{d,g}$. $\Omega^o = \Omega \cap V^{d,\delta}$ est un ouvert de Zariski non vide de Ω d'après 3.4 ($\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$). Les courbes de Ω^o admettent une normalisation simultanée, c'est-à-dire un morphisme $\pi : X \longrightarrow \Omega^o$, avec X lisse tel que, pour C dans X^o, $\pi^{-1}(C)$ soit la normalisée de C. On a donc un morphisme $\varphi : \Omega^o \longrightarrow M_g$ qui, à C dans Ω^o, associe la classe de $\pi^{-1}(C)$. On note Γ le graphe de ce morphisme, $\bar{\Gamma} \subset \bar{\Omega} \times \overline{M_g}$ son adhérence et φ_1 (resp. φ_2) la projection sur $\bar{\Omega}$ (resp. $\overline{M_g}$). Comme Δ est le support d'un diviseur de Cartier, $\varphi_2^{-1}(\Delta)$ est de codimension 1, mais φ_1 peut avoir des fibres de dimension strictement positive.

Ainsi regardons l'exemple des quartiques planes lisses : $\Omega = V_{4,3}$. Soit $\mathcal{C} \subset \bar{\Omega}$ le lieu des coniques doubles. La fibre de φ_1 au-dessus d'une conique double $2C$ est constituée de l'ensemble des courbes hyperelliptiques de genre 3 qui ont pour image $2C$ par un revêtement double ramifié au-dessus de 8 points. On voit facilement que, au voisinage de $\mathcal{C}$, φ_1 est l'éclatement de centre $\mathcal{C}$.

On peut également construire des exemples de courbes réduites de $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ en lesquelles la fibre de φ_1 n'est pas finie.

On a cependant l'énoncé crucial suivant :

PROPOSITION 5.3.- *Soit* Ω *une composante irréductible de* $V_{d,g}$. *Supposons qu'il existe une courbe réduite* C_0 *appartenant à* $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ *dont la fibre* $\varphi_2^{-1}(C_0)$ *contient un point isolé. Alors* $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ *a une composante irréductible de codimension* 1 *dans* $\bar{\Omega}$.

Démonstration.- Soit $(C_0, [\overline{X_0}])$ un point isolé de $\varphi_1^{-1}(C_0)$.

<u>1er cas</u> : $[\overline{X_0}]$ appartient à $\Delta = \overline{M_g} \setminus M_g$: comme Δ est le support d'un diviseur de Cartier, il existe alors une composante irréductible de $\varphi_1(\varphi_2^{-1}(\Delta))$ qui est de codimension 1 dans $\bar{\Omega}$.

<u>2ème cas</u> : $[\overline{X_0}]$ appartient à M_g . On utilise alors la remarque suivante : pour une famille de courbes munies de pinceaux linéaires, l'ensemble des paramètres pour lesquels il existe des points de base est vide ou de codimension au plus 1 .

6. FIN DE LA PREUVE

6.1. <u>Construction d'une déformation</u>

Soit Ω une composante irréductible de $V_{d,g}$. On va construire des déformations générales sur des courbes réductibles contenant une droite. Pour cela, on choisit une courbe nodale C appartenant à Ω et L une droite transverse à C . On appelle $p_1,\dots,p_d$ les points d'intersection de L avec C , et Ω_D l'ensemble des courbes de Ω passant par les p_i . D'après 3.5.1, Ω_D est purement de dimension $2d+g-1$ et chacune de ses composantes irréductibles a pour élément général une courbe nodale passant par les p_i et transverse à L . Soit $\Omega_L \subset \overline{\Omega_D}$ l'ensemble des courbes de $\overline{\Omega_D}$ qui contiennent L . Ω_L est purement de dimension $2d+g-2$: en effet, toutes les composantes de Ω_L sont de dimension $\geq 2d+g-2$ car passer par $d+1$ points fixés impose $d+1$ conditions et Ω_L ne contient aucune composante de $\overline{\Omega_D}$. On choisit un plan général H de codimension $2d+g-2$ dans $\mathbb{P}^N$ et C_0 un point d'intersection de Ω_L avec H : on obtient ainsi un point général d'une composante irréductible de Ω_L . H et C_0 étant fixés, on a une application analytique ψ d'un disque D centré en zéro dans $\overline{\Omega_D} \cap H$ vérifiant $\psi(0) = C_0$ et pour $\lambda \in D \setminus \{0\}$, $\psi(\lambda) = C_\lambda$ appartient à Ω_D .

Comme les C_λ pour λ dans $D \setminus \{0\}$ sont équisingulières, il existe un morphisme propre $\pi : X \longrightarrow D \setminus \{0\}$ avec X lisse tel que $X_\lambda := \pi^{-1}(\lambda)$ soit la normalisée de C_λ et une application $\eta : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ qui induit le morphisme de normalisation : $X_\lambda \longrightarrow C_\lambda$.

D'après le théorème de réduction semi-stable, tel qu'il est énoncé dans [K-Kn-M-S], on peut, après éventuellement un changement de base fini, prolonger $\pi : X \longrightarrow D \setminus \{0\}$ en $\bar{\pi} : \bar{X} \longrightarrow D$, avec $\bar{X}$ lisse, $\bar{\pi}$ propre tels que :

a) η se prolonge en un morphisme

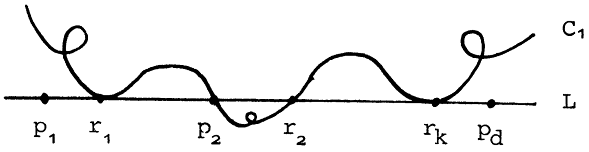
$$\bar{\eta} : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \ ;$$

b) $X_0 := \bar{\pi}^{-1}(0)$ est une courbe nodale (réduite) et aucune des composantes rationnelles lisses de X_0 sur laquelle $\bar{\eta}$ est constante ne rencontre la réunion des autres composantes en un seul point.

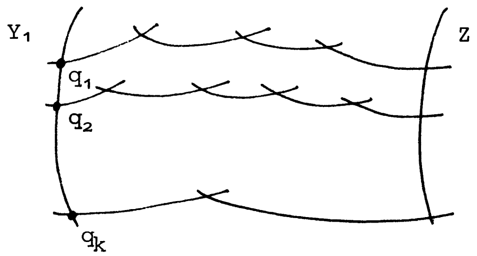
6.2. Analyse de la déformation

On va démontrer que la famille C_λ vérifie la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2.- a) C_0 *est réduite : c'est la réunion de la droite* L *et d'une courbe nodale* C_1 *de degré* $d-1$ *et de genre arithmétique* $g+1-k$. *L'intersection de* C_1 *avec* L *aux points* p_i *est soit vide, soit transverse.* C_1 *rencontre* L *en* k *points* $r_1,\dots,r_k$ *distincts des* p_i *; les points* r_i *sont des points lisses de* C_1 *et* $k \geq 1$.



b) X_0 *est la réunion de la normalisée* Y_1 *de* C_1 , *d'une courbe rationnelle lisse* Z *qui a pour image* L *et de* k *chaînes de courbes rationnelles lisses qui les joignent. De plus, les points d'intersection* q_i *de* Y_1 *avec les chaînes ont pour image les* r_i .



Démonstration de la proposition.- Soit $Y_0 \subset X_0$ la réunion des composantes irréductibles de X_0 d'image contenue dans L , Y_1 la réunion des autres composantes irréductibles de X_0 . On note $\{q_1,\dots,q_k\} = Y_0 \cap Y_1$. On note $C_0 = \alpha L + C_1$ avec $C_1 = \bar{\eta}(Y_1)$ (un des points importants de la démonstration sera de prouver que $\alpha = 1$ et que C_1 est nodale). On note $\Gamma_i = \eta^{-1}(p_i)$ et $\overline{\Gamma_i}$ l'adhérence de Γ_i dans $\bar{X}$. On a donc $\bar{\eta}^*L = \sum_{i\leq i\leq d} \overline{\Gamma_i} + M$ avec M un diviseur de support exactement Y_0 .

Lemme 6.2.1.- $\overline{\Gamma_i}$ *et* X_0 *s'intersectent transversalement en des points lisses.*

Démonstration.- $\bar{X}$ est lisse et le nombre d'intersection de X_λ avec $\overline{\Gamma_i}$ est égal à 1 .

Lemme 6.2.2.- *Soit* β *le nombre de points* q_j *qui appartiennent à une composante connexe de* Y_0 *sur laquelle* $\bar{\eta}$ *est non constante :* C_1 *contient au plus* β *points de* L *distincts des* p_i .

Démonstration.- Remarquons tout d'abord que tout point de Y_1 dont l'image par $\bar{\eta}$ appartient à $L \setminus \{p_i\}_{1\leq i\leq d}$ est un point de $Y_0 \cap Y_1$ car $\bar{\eta}^*L = \sum_{1\leq i\leq d} \overline{\Gamma_i} + M$. Il nous suffit donc de montrer que toute composante connexe Y de Y_0 sur laquelle $\bar{\eta}$ est constante a pour image l'un des p_i . Mais sinon, on aurait (en notant $(.,.)$ la forme d'intersection sur $\bar{X}$) $(M_{|Y}, \sum_{1\leq i\leq d} \overline{\Gamma_i}) = 0$ et $(M_{|Y}, \bar{\eta}^*L) = 0$ (car $\bar{\eta}(Y)$ est un point), d'où $(M_{|Y}, M_{|Y}) = 0$ car $\bar{\eta}^*L = \sum_{1\leq i\leq d} \overline{\Gamma_i} + M$ et Y est une composante connexe de Y_0 . Ceci est impossible car la forme d'intersection sur X_0 est négative et les seuls cycles d'autointersection nulle sont les multiples de X_0 ([A-W], [D-M]).

Lemme 6.2.3.- $g(Y_1) \leq g+\alpha-\beta$.

Démonstration.- On remarque que Y_0 a au plus $\alpha+k-\beta$ composantes connexes, car $\bar{\eta}$ est constante (resp. non constante) sur au plus $k-\beta$ (resp. α) composantes connexes de Y_0 . On a donc $p_a(Y_1) = 1-h^0(Y_0)+h^1(Y_0) \geq 1-(\alpha+k-\beta)$. Comme $g = p_a(X_0) = p_a(Y_0)+p_a(Y_1)+k-1$, on obtient $p_a(Y_1) \leq g+\alpha-\beta$, d'où le résultat car $g(Y_1) \leq p_a(Y_1)$.

Remarque 6.2.4.- Comme toute composante connexe de Y_1 intersecte Y_0 , $\bar{\eta}$ n'est constante sur aucune composante connexe de Y_1 .

Maintenant que l'on a une majoration sur le genre de Y_1 , on va pouvoir appliquer l'estimation de dimensions gardée en réserve depuis 3.5.2. D'après 6.2.2, 6.2.3 et 6.2.4, C_1 est l'image de la courbe nodale Y_1 de genre géométrique $g_1 \leq g+\alpha-\beta$ par un morphisme de degré $d_1 = d-\alpha$ qui n'est constant sur aucune composante connexe de Y_1 , et de plus C_1 ne rencontre $L \setminus \{p_i\}_{1\leq i\leq d}$ qu'en au plus β points distincts. Comme C_1 est général dans une famille de courbes planes de dimension $2d+g-2$, on a donc, d'après 3.5.2. (en prenant pour Z l'ensemble des p_i qui appartiennent à C_1) :

$$(*) \qquad 2d+g-2 \leq 2d_1+g_1+\beta-1 ,$$

d'où $2d+g-2 \leq 2d+g-\alpha-1$, ce qui donne $\alpha = 1$. On a donc $g(Y_1) = g-\beta+1$ et égalité dans $(*)$, ce qui, d'après 3.5.2, nous assure que C_1 est une courbe nodale, que ses points d'intersection avec L sont lisses, qu'elle rencontre $L \setminus \{p_i\}_{1\leq i\leq d}$ en exactement β points et que $\bar{\eta}_{|Y_1} : Y_1 \longrightarrow C_1$ est birationnelle.

Lemme 6.2.5.- Y_1 *est lisse et toutes les composantes connexes de* Y_0 *sont de genre arithmétique nul.*

Démonstration.- D'après la démonstration de 6.2.2, on a $p_a(Y_1) \leq g+\alpha-\beta$. Comme $\alpha = 1$ et $g(Y_1) = g-\beta+1$, on a $g(Y_1) = p_a(Y_1)$ et Y_1 est lisse. On a de même

$p_a(Y_o) = \beta - k$ et $h^o(Y_o) = 1 + k - \beta$, ce qui prouve que toutes les composantes connexes de Y_0 sont de genre arithmétique nul.

Lemme 6.2.6.- $\beta = k$ *et* Y_0 *(ou plutôt son graphe dual) est un arbre connexe formé d'une composante irréductible* Z *qui a* L *pour image isomorphe et de* k *chaînes de courbes rationnelles lisses qui joignent* Z *aux points* $q_1, \dots, q_k$ *de* Y_1 .

Démonstration.- Comme C_1 intersecte L en des points lisses r_i qui sont les images, distinctes, des q_i par $\bar{\eta}$, chaque composante connexe de Y_0 sur laquelle $\bar{\eta}$ est constante rencontre donc Y_1 en un unique point. Une telle composante connexe étant de genre arithmétique nul d'après 6.2.5, c'est donc un arbre de courbes rationnelles lisses, ce qui est impossible d'après la condition b). On a donc $\beta = k$, ce qui prouve que Y_0 est connexe. Comme $p_a(Y_o)$ est nul, la condition b) impose à Y_0 de vérifier la conclusion du lemme.

La proposition est une conséquence des lemmes.

6.3. Conclusion

Soit $\overline{X_0}$ la courbe obtenue en contractant les composantes rationnelles lisses de X_0 qui intersectent les autres composantes irréductibles de X_0 en au plus deux points. On a maintenant la description suivante de $\overline{X_0}$:

i) si $k = 1$: $\overline{X_0}$ coïncide avec la normalisée Y_1 de C_1 .

ii) si $k = 2$: $\overline{X_0}$ est la courbe nodale obtenue en identifiant les deux points q_1 et q_2 de Y_1 .

iii) si $k \geq 3$: $\overline{X_0}$ est la courbe nodale ayant pour composantes irréductibles Y_1 et Z et les points q_i comme points doubles.

Si $[\overline{X_0}]$ est le point de $\overline{M}_g$ associé à $\overline{X_0}$, d'après cette description, on voit que $(C_0, [\overline{X_0}])$ est un point isolé de la fibre $\varphi_1^{-1}(C_0)$, ce qui, d'après 5.2 et 4.1, termine la démonstration du théorème de Harris.

THÉORÈME.- $\overline{V_{d,g}}$ *est irréductible, pour* $d \geq 1$, $g \geq 0$, $g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

7. CONSÉQUENCES ET COMPLÉMENTS

7.1. Groupe fondamental du complémentaire d'une courbe nodale plane

Le résultat suivant est équivalent à l'irréductibilité de $\overline{V_{d,g}}$:

THÉORÈME 7.1.1.- *Toute courbe nodale de degré* d *se spécialise sur* d *droites en position générale (autrement dit, l'adhérence de toute composante irréductible de* $U_{d,g}$ *contient* $U^{d,d(d-1)/2}$).

Démonstration.- Toute composante irréductible de $V_{d,g}$ contient dans son adhérence une courbe nodale de genre géométrique $g' < g$, d'où le résultat par récurrence.

En 1929, dans son article [Z1], O. Zariski déduisait de ce résultat la commutativité du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe nodale plane :

THÉORÈME 7.1.2.- *Le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe nodale plane est abélien.*

La démonstration de Zariski procédait ainsi :

a) on montre tout d'abord que si C_0 est réunion de d droites en position générale, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_0)$ est abélien ;

b) si C est une courbe nodale plane de degré d, d'après 7.1.1, il existe une spécialisation de C sur une courbe C_0 réunion de d droites en position générale. On a alors un morphisme surjectif de groupes fondamentaux pointés : $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ et on applique a).

Une démonstration du théorème 7.1.2, indépendante de l'assertion de Severi, a été donnée en 1979 par W. Fulton (dans le cadre algébrique) et par P. Deligne ([F1], [D]).

7.2. Géométrie de $U_{d,g}$ et de son adhérence

7.2.1. *Composantes irréductibles de* $U_{d,g}$

On déduit facilement de l'assertion de Severi la description suivante des composantes irréductibles de $U_{d,g}$: pour tous les q-uplets non ordonnés de couples d'entiers positifs ou nuls $((d_i,g_i))_{1\leq i\leq q}$ vérifiant :

$$g_i \leq \frac{(d_i-1)(d_i-2)}{2} \qquad d = \sum_{i=1}^{q} d_i \qquad g = \sum_{i=1}^{q} g_i + (1-q) \qquad d_i \geq 1 ,$$

il existe une unique composante irréductible de $U_{d,g}$ dont l'élément général est une courbe nodale dont les composantes irréductibles C_i , $1 \leq i \leq q$ appartiennent à V_{d_i,g_i} .

7.2.2. *Singularités de* $U_{d,g}$

a) Points lisses : on a vu que les courbes nodales sont des points lisses de $U_{d,g}$. Arbarello et Cornalba ont montré dans [A-C 4] que les points lisses de $U_{d,g}$ sont exactement les courbes dont toutes les singularités sont des unions de branches lisses.

b) Points singuliers : tous les points singuliers de $U_{d,g}$ ont comme cône tangent réduit un espace vectoriel de dimension $3d+g-1$: en effet, d'après 3.3.1, le cône tangent d'un point C de $U_{d,g}$ est contenu dans $H^0(C,\mathcal{O}_C(d)\otimes C)$. On déduit d'ailleurs de ceci la remarque 2.3.4 (*cf.* [D-H]).

7.2.3. *La frontière de* $V_{d,g}$

Soit C une courbe plane non nécessairement réduite de degré d . Soit $C = \sum_{1\leq i\leq s} n_i C_i$ la décomposition de C en composantes irréductibles.

On note g_i le genre géométrique de C_i et on choisit les indices et $r \leq s$ pour avoir $g_i = 0$ si et seulement si $i > r$. On fixe $g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

En 1928, Albanese a donné une condition nécessaire et suffisante pour que C appartienne à $\overline{V_{d,g}}$, dont A. Nobile a récemment donné une démonstration [N4] :

7.3.4. : C appartient à $\overline{V_{d,g}}$ si et seulement si $g \geq \sum_{i=1}^{r} (n_i g_i - n_i + 1)$.

A propos de la preuve d'Albanese, Zariski faisait en 1935 le commentaire suivant ([Z2], 2e édition, p. 216) : "the conclusions ... cannot be regarded as final in view of the extreme delicacy of the arguments involved".

7.3. Courbes planes cuspidales

Les courbes planes cuspidales sont les courbes planes réduites n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires ou cuspidaux (c'est-à-dire analytiquement équivalents à $x^2 - y^3 = 0$). De telles courbes apparaissent comme discriminants de projections de surfaces. On peut se demander si certaines propriétés des familles de courbes planes nodales s'étendent aux courbes cuspidales. La réponse est généralement négative comme le montrent les exemples qui suivent.

On note $U^{d,\delta,\varkappa}$ (resp. $V^{d,\delta,\varkappa}$) $\subset \mathbb{P}^N$ le lieu des courbes planes réduites (resp. réduites et irréductibles) de degré d ayant exactement δ points doubles ordinaires et $\varkappa$ points cuspidaux.

a) $\overline{V^{d,\delta,\varkappa}}$ n'est pas nécessairement irréductible : en effet, d'après Zariski [Z1], la variété $V^{6,0,6}$ des sextiques irréductibles ayant exactement 6 points cuspidaux a deux composantes irréductibles A et B de dimension 15 ; A (resp. B) est composée des sextiques dont les points cuspidaux appartiennent (resp. n'appartiennent pas) à une même conique. Le groupe fondamental du complémentaire des courbes appartenant à A (resp. B) est le produit libre $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} * \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$).

b) Des composantes irréductibles de $V^{d,\delta,\varkappa}$ peuvent ne pas avoir la bonne dimension $\frac{d(d+3)}{2} - \delta - 2\varkappa$, d'après l'exemple suivant dû à B. Segre [Se] : les courbes de $V^{6k,0,6k^2}$ définies par une équation $(f_{2k})^3 + (f_{3k})^2 = 0$ avec f_{2k} (resp. f_{3k}) homogènes de degré $2k$ (resp. $3k$) forment une variété irréductible de dimension strictement supérieure à la bonne dimension, dès que $k > 2$. (Pour $k = 1$, on retrouve la variété A de a), qui est aussi la variété des discriminants des projections générales des surfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}^3$.)

c) La théorie des déformations permet de munir $U^{d,\delta}$ et $U^{d,\delta,\varkappa}$ d'une structure de schéma. $U^{d,\delta}$ est toujours réduit (cf. [T1]), ce qui n'est pas nécessairement le cas pour $U^{d,\delta,\varkappa}$ comme l'a montré Wahl dans [W1] en considérant le discriminant de la projection d'une surface obstruée. En langage classique : il existe des courbes planes cuspidales dont la série linéaire caractéristique est incomplète.

Nous renvoyons le lecteur à [E], [T2], [W1], [Z2] pour d'autres résultats sur les courbes planes cuspidales.

7.4. Courbes planes ayant des singularités arbitraires

Deux singularités de courbes planes sont dites équivalentes si elles sont équisingulières au sens de Zariski. On appelle type et on note [T] une classe d'équivalence de singularités de courbes planes. On note $U^{d,[T_1],\ldots,[T_r]} \subset \mathbb{P}^N$ le lieu des courbes planes réduites ayant exactement r points singuliers de types respectifs $[T_1],\ldots,[T_r]$.

Dans le cas de points multiples ordinaires (c'est-à-dire équivalents à $x^k+y^k = 0$), les variétés $U^{d,[T_1],\ldots,[T_r]}$ ont été étudiées par C. Giacinti-Diebolt dans [G]. Dans [L1], I. Luengo considère le cas des T_i arbitraires et donne plusieurs exemples pour lesquels la variété $U^{d,[T_1],\ldots,[T_r]}$ est *singulière* (le contraire était donné comme probable par Zariski dans [Z3]). En particulier, il donne l'exemple de courbes ayant une seule singularité (qui est équivalente à $x^2+y^{51} = 0$) et pour lesquelles la variété $U^{d,[T]}$ correspondante est singulière. Ces exemples lui permettent de montrer dans [L2] qu'il existe des germes d'hypersurface à singularité isolée dans $\mathbb{C}^3$ dont la strate à μ-constant n'est pas lisse.

BIBLIOGRAPHIE

[A] G. ALBANESE - *Sulle condizioni perche una curva algebraica riducible si possa considerare come limite di una curva irredicibile*, Rend. Circ. Mat. Palermo 52 (1928), 105-150.

[A-M] D. ALIBERT, G. MALTSINIOTIS - *Groupe fondamental du complémentaire d'une courbe à points doubles ordinaires*, Bull. Soc. Math. France, 102 (1974), 335-351.

[A-C 1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA - *Su una proprieta notevole dei morphismi di una curva a moduli generali in uno spazio proiettivo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, vol. 38, n° 2 (1980), 87-99.

[A-C 2] E. ARBARELLO - M. CORNALBA - *Su una congettura di Petri*, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 1-38.

[A-C 3] E. ARBARELLO, M. CORNALBA - *Footnotes to a paper of Beniamino Segre*, Math. Ann. 256 (1982), 341-362.

[A-C 4] E. ARBARELLO, M. CORNALBA - *A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., t. 16 (1983), 467-488.

[A-C-G-H] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS, J. HARRIS - *Geometry of algebraic curves*, Berlin - Heidelberg - New-York - Tokyo, Springer-Verlag (1984).

[A-W] M. ARTIN, G. WINTERS - *Degenerate fibers and reduction of curves*, Topology, 10 (1971), 373-383.

[D] P. DELIGNE - *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien*, Sém. Bourbaki, exp. 543 (Nov. 1979), Lecture Notes in Math., 842, Springer-Verlag (1981), 1-10.

[D-M] P. DELIGNE, D. MUMFORD - *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications IHES 15 (1972), 75-110.

[D-H] S. DIAZ, J. HARRIS - *Ideals associated to deformations of singular plane curves*, preprint.

[E] D. EISENBUD - *Rational curves with cusps*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 40, part 1 (1983), 337-344.

[F1] W. FULTON - *On the fundamental group of the complement of a node curve*, Ann. of Math. 111 (1980), 407-409.

[F2] W. FULTON - *On nodal curves*, in Algebraic geometry : open problems, Lect. Notes 997, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[G] G. GIACINTI-DIEBOLT - *Variétés des courbes projectives planes de degré et lieu singulier donnés*, Math. Annalen 266 (1984), 321-350.

[H1] J. HARRIS - *On the Severi problem*, Invent. Math. 84 (1986), 445-461.

[H2] J. HARRIS - *Curves and their moduli*, Notes of lectures given at the AMS Summer Institute in Algebraic Geometry, June 1985 (Sept. 1986).

[K-Kn-M-S] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, B. SAINT-DONAT - *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag (1973).

[Kn] F. KNUDSEN - *The projectivity of the moduli space of stable curves III*, Math. Scand. 52 (1983), 200-212.

[L1] I. LUENGO - *On the existence of complete families of projective plane curves which are obstructed* (1985), Journal of the London Mathematical Society 36 (1987), 33-43.

[L2] I. LUENGO - *The μ-constant stratum is not smooth for surface singularities* (1985), à paraître aux Inventiones Mathematicae.

[M] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, L'Enseignement Mathématique 23 (1977), 39-110.

[N1] A. NOBILE - *On families of singular plane projective curves*, Annali di matematica pura ed applicata 138 (1984), 341-378.

[N2] A. NOBILE - *Families of curves on surfaces*, Math. Z, 187 (1984), 453-470.

[N3] A. NOBILE - *On specializations of curves I*, Transactions of the American Mathematical Society 282 (1984), 739-748.

[N4] A. NOBILE - *Genera of curves varying in a family* (1987), à paraître aux Annales de l'E.N.S.

[P] H. POPP - *Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1*, Archiv. der Math., Basel 17 (1966), 510-522.

[R] Z. RAN - *On nodal plane curves*, Invent. Math. 86 (1986), 529-534.

[Se] B. SEGRE - *Existenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebrische con dati caraterri*, Atti Acad. Naz. Lincei Rendicontini, Serie 6, Vol. 10 (1929), 31-38.

[S] F. SEVERI - *Vorlesungen über Algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig (1921).

[T1] A. TANNENBAUM - *Families of algebraic curves with nodes*, Compositio Mathematica, Vol. 41, Fasc. 1 (1980), 107-126.

[T2] A. TANNENBAUM - *On the classical characteristic linear series of plane curves with nodes and cuspidal points : two examples of Beniamino Segre*, Compositio Mathematica, Vol. 51 (1984), 169-183.

[Te] B. TEISSIER - *Résolution simultanée*, Séminaire sur les singularités des surfaces, Palaiseau (1976-77), Lectures Notes in Math., 777, Springer-Verlag (1980), 71-146.

[W1] J. WAHL - *Deformations of plane curves with nodes and cusps*, American Journal of Mathematics, Vol. 96, n° 4 (1974), 529-577.

[W2] J. WAHL - *Equisingular deformations of plane algebroid curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), 143-170.

[Z1] O. ZARISKI - *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, American J. Math. 51 (1929), 305-328.

[Z2] O. ZARISKI - *Algebraic surfaces*, 2nd edition, Springer-Verlag, Heidelberg (1971).

[Z3] O. ZARISKI - *Dimension theoretic - characterization of maximal irreducible algebraic systems of plane nodal curves of a given order* n *and with a given number* d *of nodes*, American J. of Math. 104 (1982), 209-226.

[Z4] O. ZARISKI - *On the problem of irreducibility of the algebraic system of irreducible plane curves of a given order and having a given number of nodes*, in Arithmetic and Geometry, Vol. II, Papers dedicated to I.R. Shafarevich, Progress in Mathematics 36 (1983), Birkhäuser, 465-481.

François LOESER

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX