ADRIEN DOUADY

Disques de Siegel et anneaux de Herman

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 677, p. 151-172
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__151_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1987
39ème année, 1986-87, n° 677

DISQUES DE SIEGEL ET ANNEAUX DE HERMAN

par Adrien DOUADY

Des avancées dans l'analyse (Herman, Yoccoz) et des constructions géométriques (Ghys, Shishikura, Yoccoz) - essentiellement une chirurgie possible grâce au théorème d'intégrabilité des structures presque complexes - ont permis récemment une meilleure compréhension des disques de Siegel, des anneaux de Herman et des relations entre eux. Cependant, beaucoup de questions restent ouvertes.

Nous tentons de faire le point, en mettant l'accent sur les aspects géométriques. Les démonstrations indiquées le sont forcément de façon succincte. Nous remercions J.-C. Yoccoz pour son aide pendant la préparation de cet exposé.

1. POINTS PÉRIODIQUES ET COMPOSANTES DE $\bar{\mathbb{C}} - J(f)$

1.1. Points périodiques linéarisables

Soit f une fraction rationnelle, considérée comme application de la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle-même. Le *degré* d de f est le nombre de points de $f^{-1}(y)$ pour $y \in \bar{\mathbb{C}}$, comptés avec multiplicité ; c'est aussi $\sup(\deg P , \deg Q)$ si $f = P/Q$ (fraction irréductible).

Nous noterons f^n la n-ième itérée de f. On dit que z est un *point périodique* pour f s'il existe un $n > 0$ tel que $f^n(x) = x$; le plus petit n ayant cette propriété est la *période* k de x, et l'ensemble $\{x_0,\ldots,x_{k-1}\}$ où $x_i = f^i(x)$ est le *cycle* de x. Le *multiplicateur* (ou valeur propre) d'un cycle $\xi = \{x_0,\ldots,x_{k-1}\}$ est $\rho = \prod_{i=0}^{k-1} f'(x_i) = (f^k)'(x_i)$ (définition à modifier si $\infty \in \xi$). Un cycle ξ de multiplicateur ρ est dit *attractif* (resp. *répulsif*, resp. *indifférent*, resp. *superattractif*) si $|\rho| < 1$ (resp. $|\rho| > 1$, $|\rho| = 1$, $\rho = 0$). Un cycle est superattractif si et seulement si il contient un point critique. Un point périodique est dit attractif, etc. si son cycle est attractif, etc.

Soit x un point périodique de période k et de multiplicateur ρ. On dit que f est *linéarisable* en x, ou que x est linéarisable, si f^k est holomorphiquement conjuguée au voisinage de x à $z \longmapsto \rho z$. Tout point périodique attractif non superattractif, ou répulsif, est linéarisable. Si x est un point périodique indifférent, ρ se met sous la forme $e^{2i\pi t}$, on dit que x est indifférent rationnel ou *parabolique* si $t \in \mathbb{Q}$, indifférent irrationnel sinon. Un point parabolique n'est jamais linéarisable, sauf si f est de degré 1 : en effet, si $t = p/q$, on devrait avoir $f^{kq} = \mathrm{Id}$. D'après un théorème de Siegel (1942), si t est *diophantien*, i.e. s'il existe un β (exposant) tel que

$$\exists c > 0 \quad \forall p/q \in \mathbb{Q} \quad |t - p/q| \geq c/q^{\beta} ,$$

f est linéarisable en x .

Notons Dioph^{β} l'ensemble des nombres diophantiens d'exposant β . On a $\mathrm{Dioph}^{\beta} \subset \mathrm{Dioph}^{\beta'}$ pour $\beta \leq \beta'$; l'ensemble Dioph^2 est de mesure nulle, mais $\bigcap_{\beta>2} \mathrm{Dioph}^{\beta}$ a un complémentaire de mesure nulle. Le complémentaire de $\mathrm{Dioph} = \bigcup \mathrm{Dioph}^{\beta}$ est gras au sens de Baire, i.e. contient un G_{δ} dense (bien que de mesure nulle). En notant (q_n) la suite des dénominateurs des réduites du développement de t en fraction continue (suite qui tend vers ∞ au moins exponentiellement), t est diophantien si et seulement si

$$\exists \beta \quad \exists C \quad \forall n \quad q_{n+1} \leq C\, q_n^{\beta-1} .$$

Brjuno a montré (1965) qu'on pouvait remplacer dans ce théorème l'hypothèse (Dioph) par l'hypothèse plus faible

(Brju) $$\sum \frac{\mathrm{Log}(q_{n+1})}{q_n} < \infty ,$$

où les q_n sont les dénominateurs des réduites successives du développement de t en fraction continue.

Cremer a montré (1935) qu'il existait des fractions rationnelles ayant des points périodiques indifférents irrationnels non linéarisables. En fait, on peut montrer assez facilement que, si $(f_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille continue de fractions rationnelles de degré $d \geq 2$, telle que f_t ait un point périodique x_t (dépendant continuement de t), de multiplicateur $e^{2i\pi t}$, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles f_t n'est pas linéarisable en x_t est gras au sens de Baire.

On dit que x est un point *périodique* s'il existe un $\ell \geq 0$ tel que $f^{\ell}(x)$ soit périodique.

1.2. Domaines de linéarisation

Soit x un point périodique de f , notons k sa période et ρ le multiplicateur. Supposons d'abord x attractif, i.e. $|\rho| < 1$. Les points z tels que $f^{nk}(z) \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow \infty$ forment un ouvert B_x appelé le *bassin* de x . Le *bassin immédiat* A_x de x est la composante connexe de B_x contenant x . Le bassin (resp. bassin immédiat) d'un cycle attractif est la réunion des bassins (resp. bassins immédiats) de ses points. Fatou et Julia ont montré indépendamment (1917) que si $d \geq 2$, le bassin immédiat d'un cycle attractif contient nécessairement un point critique de f .

Ce résultat n'est pas difficile. En fait, avec les notations ci-dessus, on voit que A_x contient un point critique de f^k . Si x est attractif non super-attractif, il existe une application holomorphe surjective $\varphi : A_x \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(f^k(z)) = \rho\, \varphi(z)$ pour $z \in A_x$. Cette application est unique à multiplication par une constante non nulle près ; si $x = 0$, on peut obtenir φ tangent à l'identité en posant $\varphi(z) = \lim \frac{f^{nk}(z)}{\rho^n}$. Il existe un plus grand ouvert Δ_x contenant x tel que φ induise un isomorphisme de cet ouvert sur un disque. Nous dirons que Δ_x est le *domaine de linéarisation* de f en x (ou de x pour f). L'ouvert Δ_x est relativement compact dans A_x ; son bord $\partial\Delta_x$ est $\mathbb{R}$-analytique, sauf aux points critiques de f^k qu'il contient - et il en contient au moins 1 - où il a des points anguleux.

Supposons maintenant x répulsif, i.e. $|\rho| > 1$. Il existe alors une application $\mathbb{C}$-analytique non constante $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ telle que $\psi(0) = x$ et $\psi(\rho z) = f^k(\psi(z))$. Cette application est unique à composition à droite près par une homothétie, et si $x = 0$, on peut obtenir ψ tangent à l'identité en posant $\psi(z) = \lim f^{nk}\left(\frac{z}{\rho^n}\right)$. Nous appellerons domaine de linéarisation de x l'image Δ_x du plus grand disque sur lequel ψ est injective.

Supposons enfin x indifférent irrationnel linéarisable. Il existe alors un plus grand ouvert Δ_x invariant par f^k et sur lequel f^k soit conjugué à la rotation $z \longmapsto \rho z$ sur un disque. Le domaine de linéarisation Δ_x prend alors le nom de *disque de Siegel*.

1.3. <u>Bassins paraboliques</u>

Soit x un point périodique parabolique de f , de période k et de multiplicateur $\rho = e^{2i\pi p/q}$. Dans une coordonnée centrée en x , l'expression de f^{kq} est de la forme

$$\zeta \longmapsto \zeta(1 + a\zeta^{q\nu} + \dots) \qquad \text{avec } a \neq 0 .$$

Dans le plan tangent $T_x \bar{\mathbb{C}}$, l'ensemble des z tels que $a\zeta^{q\nu} \in \mathbb{R}_-$ (resp. $\mathbb{R}_+$) définit q demi-droites appelées axes d'attraction (resp. de répulsion). Pour chaque axe d'attraction ℓ , les $z \in \bar{\mathbb{C}}$ tels que $f^{nkq}(z)$ tende vers x suivant la direction de ℓ forment un ouvert B_ℓ , et il y a une composante connexe A_ℓ de B_ℓ qui contient, pour chaque $z \in B_\ell$, les $f^{nkq}(z)$ pour n assez grand. On dit que A_ℓ est un des $q\nu$ *bassins paraboliques* attachés à x (on a en effet $x \in \bar{A}_\ell$). L'image de A_ℓ par f est un bassin parabolique attaché à $f(x)$, et $f^k(A_\ell) = A_{\ell'}$, où $\ell' = T_x f^k(\ell) = \rho\ell$, d'où $f^{kq}(A_\ell) = A_\ell$. Les $kq\nu$ bassins paraboliques attachés au cycle $\xi = \{x_0,\dots,x_{k-1}\}$ de x se répartissent en ν cycles de kq bassins paraboliques, et chacun de ces cycles contient au moins un point critique.

1.4. Complémentaire de l'ensemble de Julia

Pour tout compact K tel que $f^{n_0}(K)$ soit contenu, pour un certain n_0, dans le bassin d'un point périodique attractif, ou dans un bassin parabolique ou dans un disque de Siegel, les $f^n_{|K}$ forment, quand n varie, une famille équicontinue. On appelle *ensemble de Julia* de f l'ensemble $J(f)$ des z tels que les $f^n_{|V}$ ne forment une famille équicontinue pour aucun voisinage V de z. L'ensemble $J(f)$ est $\bar{\mathbb{C}}$ entier ou un fermé d'intérieur vide. On a $J(f) \neq \emptyset$ dès que f est de degré $d \geq 2$. Fatou et Julia ont montré indépendamment que $J(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Si tous les points critiques de f sont prépériodiques non périodiques, on a $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$. Il y a beaucoup d'autres f ayant cette propriété, comme le montre le résultat suivant :

THÉORÈME (Mary Rees (1983)).- *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille analytique de fractions rationnelles telle que* f_{λ_0} *ait tous ses points critiques prépériodiques non périodiques. On suppose la famille* (f_λ) *transverse à chacune des sous-variétés décrite par une des conditions de prépériodicité satisfaite par* f_{λ_0}. *Alors* λ_0 *est un point de densité de* $\{\lambda \in \Lambda \mid J(f_\lambda) = \bar{\mathbb{C}}\}$.

La démonstration est fort technique. Nous ne l'évoquerons pas ici.

Si U est une composante connexe de $\bar{\mathbb{C}} - J(f)$, $f(U)$ en est aussi une et f induit une application propre de U sur $f(U)$. On définit ainsi une application f_* de $\pi_0(\bar{\mathbb{C}} - J(f))$ (ensemble des composantes connexes) dans lui-même. Sullivan a montré (1981) que toute composante connexe de $\bar{\mathbb{C}} - J(f)$ est prépériodique. Une composante périodique de période k appartient à l'un des types suivants :

(A) *Bassin attractif*, bassin immédiat d'un point périodique attractif. (Nous incluons dans ce type les bassins superattractifs.)

(P) *Bassin parabolique.*

(S) *Disque de Siegel.*

(H) *Anneau de Herman* : ouvert A de $\bar{\mathbb{C}}$ tel qu'il existe, pour un certain R, un isomorphisme de A sur $\{z \mid 1 < z < R\}$ conjuguant $f^k_{|A}$ à une rotation irrationnelle.

1.5. Existence d'anneaux de Herman

Une *fraction de Blaschke* finie est une fraction rationnelle de la forme

$$\text{(Bl)} \qquad z \longmapsto \lambda \prod_{i=1}^{d} \frac{z + a_i}{1 + \bar{a}_i z} .$$

où $|\lambda| = 1$ et $|a_i| \neq 1$. On suppose $a_j \neq 1/\overline{a_i}$ pour tout couple (i,j), faute de quoi l'expression ci-dessus se simplifie. On peut admettre $a_i = \infty$, le terme correspondant est $1/z$. Les fractions de Blaschke finies sont les fractions rationnelles telles que $f(S^1) \subset S^1$, où $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$. Pour f de la forme (B1), f induit une application $S^1 \longrightarrow S^1$ de degré $d_0 - d_1$, où d_0 (resp. d_1) est le nombre d'indices i tels que $|a_i| < 1$ (resp. $|a_i| > 1$) (alors que $d = d_0 + d_1$).

Soit $d = 2s + 1$, avec $s \geq 1$, $a_1, \dots, a_{s+1}$ voisins de 0 et $a_{s+2}, \dots, a_d$ voisins de ∞ ; alors f induit un difféomorphisme de S^1 sur lui-même. Fixons les a_i de façon qu'il en soit ainsi, et prenons $\lambda = e^{2i\pi t}$; quand t varie, le nombre de rotation α de f dépend de façon continue croissante de t, et fait un tour quand t augmente de 1 : la correspondance $t \longmapsto \alpha$ induit donc une application surjective de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans lui-même. On voit facilement que, si $f_{|S^1}$ est $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à la rotation $\mathcal{R}_\alpha$ d'angle α (on prend le tour comme unité !), l'application f a un anneau de Herman qui est un voisinage de S^1. Or Herman a montré (1975) que si α est diophantien d'exposant 2, $f_{|S^1}$ est analytiquement conjugué à $\mathcal{R}_\alpha$. Herman avait, en fait, une hypothèse plus générale, mais par la suite Yoccoz a démontré le résultat pour tout α diophantien (1982) (en simplifiant d'ailleurs la démonstration de Herman).

Herman a également montré qu'il est possible d'avoir des anneaux périodiques de période arbitraire.

2. LES INÉGALITÉS DE SHISHIKURA

2.1. Les nombres en jeu

Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Les points périodiques forment des *cycles de points*, les composantes périodiques de $\bar{\mathbb{C}} - J(f)$ des *cycles de composantes*. On pose

n_a = nombre de cycles de points attractifs
= nombre de cycles de bassins attractifs.

n_p = nombre de cycles de points paraboliques.

n_P = nombre de cycles de bassins paraboliques (on a $n_P \geq n_p$, *cf.* 1.3).

n_{irr} = nombre de cycles de points indifférents irrationnels.

n_H = nombre de cycles d'anneaux de Herman.

On a $n_{irr} = n_S + n_{cr}$, où n_S est le nombre de cycles de disques de Siegel et n_{cr} le nombre de cycles de points indifférents irrationnels non linéarisables.

Au besoin, on écrira $n_a(f)$, etc.

Un jeune Japonais, Mitsuhiro Shishikura, démontre (1986) les inégalités suivantes :

THÉORÈME.- *On a*

(1)
$$n_a + n_P + n_{irr} + 2n_H \leq 2d - 2$$

(2)
$$n_H < d - 1 .$$

Il montre également que ces inégalités sont optimales au sens suivant :

étant donnés quatre nombres n_a , n_P , n_{irr} et n_H vérifiant (1) et (2), il existe une fraction rationnelle f de degré d vérifiant $n_a(f) = n_a$, etc.

Dans cet exposé, nous indiquerons seulement la démonstration de la première inégalité.

2.2. Contexte

La première inégalité du théorème de Shishikura a une longue histoire. Du fait que tout cycle de bassins attractifs ou paraboliques contient au moins un point critique, Fatou et Julia ont déduit

$$n_a + n_P \leq 2d - 2$$

(en effet, $2d - 2$ est le nombre de points critiques, comptés avec multiplicité). Fatou a amélioré cette inégalité par perturbation : Soit (f_λ) une famille de fractions rationnelles telle que $f_0 = f$, et que f_λ ne possède génériquement aucun cycle indifférent. Pour r fixé petit, chaque cycle indifférent de f peut devenir dans f_λ pour $\lambda = re^{2i\pi t}$ attractif ou répulsif (ou rester indifférent) : la proportion des t pour lesquels il devient attractif tend vers $\frac{1}{2}$ quand $r \longrightarrow 0$. Par suite, on peut trouver un λ tel que au moins la moitié des cycles indifférents de f deviennent attractifs. On en déduit pour f :

$$n_a + \frac{1}{2}(n_p + n_{irr}) \leq 2d - 2 .$$

En raffinant, on obtient

$$n_a + n_P + \frac{1}{2} n_{irr} \leq 2d - 2 .$$

D'autre part, Sullivan a obtenu (1981)

$$n_a + n_H \leq 2d - 2 ,$$

en "comptant les modules".

Si A est un bassin attractif non superattractif, considérons sur A le feuilletage $\mathcal{F}_A$ par les lignes de niveau de $|\varphi|$, où φ est défini comme en (1.2). Si A est un anneau de Herman, notons $\mathcal{F}_A$ le feuilletage par les parallèles de A identifié à un cylindre. Dans les deux cas, notons μ_A la forme de Beltrami $d\bar{\zeta} / d\zeta$ sur A , où ζ est une coordonnée telle que $\mathrm{Ré}(\zeta)$ soit constante sur les feuilles de $\mathcal{F}_A$. Si $\mathcal{A} = (A_i)$ est un cycle de bassins attractifs non superattractifs ou d'anneaux de Herman, il existe une forme de Beltrami $\mu_{\mathcal{A}}$ sur $\bar{\mathbb{C}}$ invariante par f , nulle sur $\bar{\mathbb{C}} - \cup f^{-n}(A_i)$ et induisant μ_{A_i} sur A_i . Notons n_a^* le nombre de cycles attractifs non superattractifs, posons $N = n_a^* + n_H$ et $D = \{z \mid |z| < 1\}$. Pour $\lambda \in D^N$, notons μ_λ la forme de Beltrami $\Sigma\, \lambda_{\mathcal{A}}\, \mu_{\mathcal{A}}$, soit Φ_λ un homéomorphisme quasi-conforme de $\bar{\mathbb{C}}$ tel que $\bar{\partial}\Phi_\lambda / \partial\Phi_\lambda = \mu_\lambda$ et posons $f_\lambda = \Phi_\lambda \circ f \circ \Phi_\lambda$. Si on a fait les choix convenablement, (f_λ) est une famille analytique de fractions rationnelles, avec $f_0 = f$. Les f_λ sont deux à deux non homographiquement conjuguées, ou du moins les classes de conjugaison homographiques sont finies : l'effet de μ_A est de changer le multiplicateur du cycle attractif de A si A est un bassin attractif, de changer le module du cylindre (ou de faire tourner un bord par rapport à l'autre) dans le cas des anneaux de Herman. Mais une fraction rationnelle de degré d définie à conjugaison homographique près dépend de $2d + 1 - 3 = 2d - 2$ paramètres. Par suite, $N = n_a^* + n_H \leq 2d - 2$. Mais on peut déformer f de façon à rendre les cycles superattractifs seulement sans la changer en dehors des bassins correspondants (*cf.* Sém. Bourbaki, exp. 599, Nov. 82, démonstration du th. 4). Il en résulte que $n_a + n_H \leq 2d - 2$.

Il n'est pas absurde de conjecturer que, pour tout disque de Siegel ou anneau de Herman ayant un nombre de rotation diophantien d'exposant 2 , chaque composante connexe du bord (il y en a une pour un disque de Siegel, deux pour un anneau de Herman) est une courbe de Jordan contenant un point critique - donc est l'adhérence de l'orbite dudit point critique. En admettant cette conjecture, on obtiendrait

$$n_a + n_P + n_{S\ \mathrm{Dioph}^2} + 2n_{H\ \mathrm{Dioph}^2} \leq 2d - 2 .$$

La deuxième inégalité de Shishikura entraîne en particulier qu'il ne peut y avoir d'anneau de Herman qu'en degré ≥ 3 , une question qui était ouverte jusque là.

2.3. L'inégalité sans les anneaux de Herman

Commençons par un résultat intermédiaire. Pour un polynôme, notons n'_a le nombre de cycles attractifs à distance finie, soit $n'_a = n_a - 1$.

PROPOSITION 1.- a) *Pour un polynôme de degré* $d \geq 2$ *, on a* $n'_a + n_p + n_{irr} \leq d - 1$.
b) *Pour une fraction rationnelle de degré* $d \geq 2$ *, on a* $n_a + n_p + n_{irr} \leq 2d - 2$.

Indication de la démonstration.- a) Le résultat était connu [DH3], il découle de la notion même d'application à allure polynomiale. Comme chaque bassin attractif ou parabolique contient au moins un point critique, on a $n_a + n_p \leq d - 1$. Il n'est pas évident que l'on peut perturber un polynôme f , sans changer son degré, de façon à rendre les points indifférents irrationnels attractifs et à conserver le nombre des bassins paraboliques. Mais cela est facile dans le cadre des applications à allure polynomiale : soit $f : U' \longrightarrow U$ une application à allure polynomiale de degré d , et choisissons un polynôme h (de degré élevé) tel que :

(i) h s'annule aux points périodiques non répulsifs de f ;

(ii) $\mathrm{Re}(h'(x) / f'(x)) < 0$ si x est un point périodique indifférent irrationnel ;

(iii) si x est un point parabolique, h s'annule en x à un ordre suffisant pour que le nombre de pétales de la fleur de Fatou en x soit le même pour $f + \varepsilon h$ et pour f .

Soit U_1 l'ouvert U légèrement rétréci. Pour ε assez petit, $f + \varepsilon h$ induit une application à allure polynomiale $f_\varepsilon : U'_\varepsilon \longrightarrow U$, vérifiant $n_a(f_\varepsilon) \geq n_a(f) + n_{irr}(f)$, $n_p(f_\varepsilon) \geq n_p(f)$. On a donc $n_a(f) + n_{irr}(f) + n_p(f) \leq n_a(f_\varepsilon) + n_p(f_\varepsilon) \leq d - 1$.

b) Soit f une fraction rationnelle telle que $n_{irr}(f) > 0$. On peut supposer que 0 est un point périodique indifférent irrationnel, que $f(\infty) = 0$, mais que ∞ n'appartient pas au cycle de 0 . Choisissons un polynôme h satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) énoncées plus haut. Pour $\varepsilon > 0$, notons V_ε le bassin immédiat de 0 pour f_ε , et $\rho(\varepsilon)$ la distance de 0 à ∂V_ε . Si 0 est un point de Siegel, $\rho(\varepsilon)$ ne tend pas vers 0 ; sinon, il tend vers 0 , mais plus lentement que ε^β pour tout β .

D'autre part, on peut choisir un disque D_ε , de rayon R_ε tendant vers l'infini comme $1/\varepsilon^\beta$ pour un certain β , de façon que f_ε ressemble à f sur D_ε . Pour ε assez petit, $f_\varepsilon(\partial D_\varepsilon)$ est donc contenu dans V_ε . On peut alors raccorder f_ε à f sur le complémentaire de D_ε . On obtient une application g qui est holomorphe sauf sur $g^{-1}(V_\varepsilon)$, ensemble où les orbites passent au plus une fois. On peut rendre g holomorphe en changeant la structure complexe de la sphère de Riemann sur $\bigcup_{n\geq 1} g^{-n}(V_\varepsilon)$ grâce au théorème d'intégrabilité de Morrey-Ahlfors-Bers. On a alors

$$n_a(g) \geq n_a(f) + n_{irr}(f) \quad \text{et} \quad n_p(g) \geq n_p(f) ,$$

d'où l'égalité cherchée. C.Q.F.D.

2.4. <u>Shishikura et les anneaux de Herman</u>

Pour traiter le cas où il y a des anneaux de Herman, Shishikura utilise en l'affinant une méthode de "*chirurgie holomorphe*" inaugurée par Sullivan, Hubbard et l'auteur.

Indiquons d'abord quelques constructions, pour se faire la main :

(1) *Comment obtenir un anneau de Herman en accouplant des disques de Siegel.*

Soient f_1 et f_2 des applications rationnelles de degré d_1 , d_2 , ayant des disques de Siegel invariants D_1 , D_2 , de nombre de rotation t_1 et $t_2 = -t_1$. Nous allons construire à partir de f_1 et f_2 une application rationnelle f_3 ayant un anneau de Herman de nombre de rotation t_1 ou t_2 suivant l'orientation choisie.

Soient γ_1 et γ_2 des cercles invariants dans D_1 et D_2 et notons D'_1 et D'_2 les sous-disques de D_1 et D_2 limites par γ_1 et γ_2 . On peut construire une surface de Riemann Σ isomorphe à $\bar{\mathbb{C}}$ en recollant des copies disjointes de $\bar{\mathbb{C}} - D'_1$ et $\bar{\mathbb{C}} - D'_2$ par un difféomorphisme de γ_1 sur γ_2 conjuguant f_1 à f_2 . On construit une application $F : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, qui est un revêtement ramifié, qui coïncide avec f_1 sur $\bar{\mathbb{C}} - (D'_1 \cup f_1^{-1}(D'_1))$ et avec f_2 sur

$\bar{\mathbb{C}} - (D_2' \cup f_2^{-1}(D_2'))$.
Toute l'astuce est que l'on peut choisir F holomorphe en dehors de $X = F^{-1}(D_1 - D_1') \cup F^{-1}(D_2 - D_2')$, ensemble où les orbites de F ne passent qu'une fois. On modifie alors la structure complexe de Σ sur $\cup F^{-n}(X)$, de façon à rendre F holomorphe. En conjuguant F par un isomorphisme de Σ (muni de cette nouvelle structure) sur $\bar{\mathbb{C}}$, on obtient f_3 .

Remarques.- 1) En comptant les points critiques, on trouve $d_3 - 1 = (d_1 - 1) + (d_2 - 1)$, soit $d_3 = d_1 + d_2 - 1$.

2) L'application f_3 n'est pas déterminée par f_1 et f_2 : un anneau de Herman comporte un module.

(2) *Comment découper un anneau de Herman invariant en disques de Siegel*

Soit f une application rationnelle de degré d avec un anneau de Herman A . On suppose que $f(A) = A$, et que f opère sur A avec un angle de rotation t (ou $-t$ suivant l'orientation choisie). Choisissons un cercle invariant γ dans A , qui coupe $\bar{\mathbb{C}}$ en deux pièces B_1 et B_2 , et un difféomorphisme φ de γ sur S' qui conjugue f_γ à la rotation d'angle t . En recollant à B_1 et B_2 des disques au moyen de φ et $\bar{\varphi}$, on obtient des surfaces de Riemann Σ_1 et Σ_2 isomorphes à $\bar{\mathbb{C}}$. On construit $F_1 : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_1$ qui coïncide avec f sur $B_1 - f^{-1}(B_2)$ et $F_2 : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ qui coïncide avec f sur $B_2 - f^{-1}(B_1)$. On modifie la structure de Σ_1 sur $B_1 \cap \bigcup_{n\geq 1} f^{-n}(B_2)$ de façon à rendre F_1 holomorphe, on conjugue par un isomorphisme de Σ_1 (muni de cette nouvelle structure) sur $\bar{\mathbb{C}}$ et on obtient f_1 ; on obtient f_2 de même. Par construction, f_1 et f_2 ont des disques de Siegel d'angle de rotation t et $-t$ respectivement, et on peut obtenir f à partir de f_1 et f_2 par la construction décrite en (1).

(3) *Et s'il y a plusieurs anneaux de Herman ?*

Soit f une fraction rationnelle de degré d avec des anneaux de Herman périodiques $(A_i)_{i\ I}$. Choisissons dans chaque A_i une courbe périodique γ_i de façon que $f(\gamma_i) = \gamma_{f_*(i)}$. Chaque anneau A_i est coupé par γ_i en deux demi-anneaux A_i' et A_i'' , avec $f(A_i') = A'_{f_*(i)}$. Appelons n-pièces les composantes connexes de $\bar{\mathbb{C}} - f^{-n}(\Gamma)$. Appelons objets les demi-anneaux ou les points périodiques non répulsifs. Nous dirons que deux objets sont séparés au niveau n s'ils sont dans deux n-pièces différentes. On peut trouver un niveau N qui sépare tout ce qui est destiné à être séparé. Soit $(B_j)_{j\in J}$ la famille des N-pièces. On peut écrire $J = J' \cup J''$; les pièces B_j , $j \in J'$ sont celles qui contiennent un objet. Pour $j \in J'$, notons $B_{f_*(j)}$ la N-pièce qui contient les images des objets de B_j . On prend la réunion disjointe des B_j pour $j \in J'$, et on colle à chacun d'eux le nombre de disques nécessaires pour en faire une sphère topologique S_j . On peut définir des applications $g_j : S_j \longrightarrow S_{f_*(j)}$ de façon à ce que g_j coïncide avec f sur $F_j \cap f^{-1}(B_{f_*(j)})$. En changeant la structure complexe des S_i comme on l'a fait plus haut, on transforme les g_j en des applications rationnelles f_j .

Les B_j pour $j \in J''$, on les oublie froidement. On se retrouve finalement avec un système dynamique holomorphe où l'espace sous-jacent est une réunion disjointe de sphères de Riemann indexée par J' .

2.5. Systèmes dynamiques holomorphes de sphères de Riemann

Soit $F : X \longrightarrow X$ un système dynamique holomorphe où $X = \bar{\mathbb{C}} \times J$, avec J un ensemble fini, de sorte que $X = \cup X_j$, et on peut écrire $F = (f_j)$, avec $f_j : X_j \longrightarrow X_{F_*(j)}$.

Pour de tels objets, on peut parler de cycles attractifs, indifférents ou répulsifs, des ensembles de Julia, des composantes du complémentaire d'iceux. Il n'y a pas de bonne définition du degré, le nombre à considérer est le nombre de points critiques (comptés avec multiplicité), soit

$$\chi = 2\,\Sigma\,(d_j - 1) \quad \text{où} \quad d_j = \deg(f_j)\ .$$

J'ai envie de l'appeler nombre critique. Il compte les paramètres dont le système dépend essentiellement.

Le théorème de Fatou et Julia suivant lequel l'ensemble de Julia est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs s'étend à condition que chaque $j \in J$ soit périodique pour F_* . Le théorème de non-errance de Sullivan (toute composante du complémentaire de l'ensemble de Julia est prépériodique) s'étend également. On peut recopier les démonstrations ou se ramener au cas $\# J = 1$.

On peut également étendre le théorème de perturbation de Shishikura (Prop. 1) : on peut modifier F de façon à rendre tous les cycles indifférents irrationnels attractifs.

2.6. Démonstration de l'inégalité de Shishikura

Soit f une application rationnelle de degré d , et soit F le système dynamique construit à partir de f . Chaque anneau de Herman est remplacé par deux disques de Siegel, les points périodiques et les bassins paraboliques sont conservés, de sorte que l'on a

$$n_a(F) \geq n_a(f)\ ,\ n_p(F) \geq n_p(f)\ ,\ n_{irr}(F) \geq n_{irr}(f) + 2\,n_H(F)\ .$$

On peut perturber F en un système dynamique d'applications rationnelles F_ε de façon que les cycles indifférents irrationnels deviennent attractifs sans perturber les bassins paraboliques. On a alors $n_a(F_\varepsilon) \geq n_a(F) + n_{irr}(F)$. D'où
$n_a(f) + n_p(f) + n_{irr}(f) + 2\,n_H(f) \leq n_a(F) + n_p(F) + n_{irr}(F) \leq n_a(F_\varepsilon) + n_p(F_\varepsilon) \leq \chi(F_\varepsilon)$
$= \chi(F) \leq \chi(f) = 2d - 2$.

Ceci achève la démonstration de la première inégalité de Shishikura.

3. NOMBRES ET FONCTIONS

(Propriétés de théorie des nombres et propriétés dynamiques)

3.1. Domaine de validité du théorème de Siegel

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que tout germe d'application $\mathbb{C}$-analytique $z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z + O(z^2)$ soit linéarisable, i.e. holomorphiquement conjugué à $z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z$. Le théorème de Siegel, amélioré par Brjuno, affirme que $\mathcal{S}$ contient l'ensemble des α vérifiant la condition

$$\text{(Brju)} \qquad \Sigma \frac{\operatorname{Log} q_{n+1}}{q_n} < \infty$$

où les q_n sont les dénominateurs des réduites de α.

Cremer a montré (1938) que $\mathcal{S}$ est contenu dans l'ensemble des α tels que

$$\sup \frac{\operatorname{Log} q_{n+1}}{q_n} < \infty .$$

On peut conjecturer que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des α vérifiant (Brju). En tout état de cause, l'appartenance à $\mathcal{S}$ ne dépend que de la "queue" du développement de α en fraction continue. Ce fait a été remarqué indépendamment par Ghys et l'auteur. Plus précisément :

PROPOSITION 2.- *En notant* π *l'application canonique* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$ *l'ensemble* $\tilde{\mathcal{S}} = \pi^{-1}(\mathcal{S})$ *est invariant par l'action de* $GL(2,\mathbb{Z})$.

Démonstration.- Comme $\tilde{\mathcal{S}}$ est évidemment invariant par $t \longmapsto t+1$, il suffit de vérifier qu'il l'est aussi par $t \longmapsto 1/t$. Appelons *germe à gauche* holomorphe une fonction holomorphe définie sur un ouvert de la forme $\{z \mid \operatorname{Re} z < -h(\operatorname{Im} z)\}$, où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, à restriction près à un ouvert de la même forme. Nous dirons qu'un germe à gauche F est tangent à $z \longmapsto z+\lambda$ si $F(z) - z - \lambda$ tend vers 0 quand $\operatorname{Ré} z \longrightarrow -\infty$, $\operatorname{Im} z$ restant borné.

Soient F et Φ deux germes à gauche holomorphes, tangents à $z \longmapsto z+u$ et $z \longmapsto z+\lambda$ respectivement ; nous dirons que Φ *linéarise* F si $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = (z \longmapsto z+u)$. Pour $u \in \mathbb{R}^*$, tout germe à gauche holomorphe $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tangent à $z \longmapsto z+iu$ est linéarisable. En effet, quitte à rétrécir U , on peut supposer que $\mathbb{R} \cap U$ et $F(R \cap U)$ sont disjoints et délimitent dans U une bande V que nous prendrons fermée ; le quotient X de V par la relation d'équivalence identifiant t à $F(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \cap U$ est isomorphe à D^* et si $\varphi : X \longrightarrow D^*$ est un isomorphisme, l'application $\Phi = \frac{u}{2\pi} \operatorname{Log} \varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en un germe à gauche holomorphe qui linéarise F . En traduisant dans ce contexte la condition $\alpha \in \tilde{\mathcal{S}}$, on obtient la condition suivante :

(*) *Soient* F *et* G *deux germes à gauche holomorphes, tangents à* $z \longmapsto z+iu$ *et* $z \longmapsto z+iv$ *respectivement, avec* u *et* $v \in \mathbb{R}^*$, *et tels que* $F \circ G = G \circ F$.

Si $u/v = \alpha$, *il existe un germe à gauche holomorphe qui linéarise à la fois* F *et* G .

En effet, linéariser un germe f holomorphe en 0 équivaut à linéariser simultanément un relèvement $\tilde{f}$ de f et la translation par $2\pi i$. Et dans la condition (*), on peut toujours supposer que G est une translation verticale.

Uv les rôles symétriques joués par u et v dans cette formulation, $t \in \tilde{S} \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in \tilde{S}$.

C.Q.F.D.

3.2. Le rôle des polynômes quadratiques

Dans toute la suite, nous notons P_α le polynôme $z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z + z^2$.

PROPOSITION 3 (Yoccoz, 1987, partant d'une idée d'Il'yashenko).- *Pour que* $\alpha \in S$, *il suffit que* P_α *soit linéarisable en* 0 .

Démonstration.- On peut supposer α irrationnel. Soit $f : z \longmapsto az + b_0 z^2 + u(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 , avec $a = e^{2i\pi\alpha}$ et u d'ordre ≥ 3 . Pour chaque $b \in \mathbb{C}$, l'application $f_b : z \longmapsto az + bz^2 + u(z)$ est formellement conjuguée à $z \longmapsto az$, et les coefficients de la conjugante h_b dépendent polynômialement de b_0 . Par $z \longmapsto z/b$, f_b est conjuguée à $g_b : z \longmapsto az + z^2 + bu(z/b)$. Quand $|b| \longrightarrow \infty$, le domaine de définition de g_b mange tout compact et g_b tend vers P_α . Pour b assez grand, g_b est à allure polynomiale de degré 2 sur D_4 , donc quasi-conformément conjuguée à un polynôme quadratique Q_b . On peut supposer Q_b monique avec un point périodique indifférent en 0 , donc de la forme $P_{\alpha'(b)}$. D'après un résultat de Naïshul, le multiplicateur d'un point périodique indifférent est un invariant topologique (pour les homéomorphismes préservant l'orientation). Par suite, $\alpha'(b) = \alpha$, donc g_b est linéarisable. Le domaine de linéarisation de g_b dépend de façon continue de b pour b grand, donc h_b est bornée par une quantité fixe sur un disque fixe pour b variant dans un cercle de rayon R grand. Il en résulte par le principe du maximum que h_b est convergente pour tout $b \in D_R$, en particulier pour $b = b_0$.

C.Q.F.D.

Remarques.- 1) Le fait que le multiplicateur d'un point indifférent est un invariant quasi-conforme (ce qu'on utilise ici) est plus facile à démontrer que le résultat de Naïshul.

2) On conjecture que, si une fraction rationnelle f de degré $d \geq 2$ a un disque de Siegel d'angle de rotation α , on a $\alpha \in S$.

3) Yoccoz a une démonstration très simple, indépendante du théorème de Siegel, du fait que, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{T}$, le polynôme P_α est linéarisable en 0 . Nous l'indiquons ici :

Pour $\lambda \in D^*$, le polynôme $\tilde{P}_\lambda : z \longmapsto \lambda z + z^2$ a en 0 un point fixe attractif, et la linéarisante φ_λ définie en (1.2) induit un isomorphisme du domaine de linéarisation Δ_λ sur $D_{|\eta(\lambda)|}$, où $\eta(\lambda)$ est l'image par φ du point critique $-\frac{\lambda}{2}$. L'application $\psi_\lambda : z \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(\eta(\lambda) . z)$ est un isomorphisme de D sur Δ_λ, qui est contenu dans l'ensemble de Julia rempli, donc dans D_2.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, de toute suite dans D tendant vers $a = e^{2i\pi\alpha}$, on peut extraire une suite (λ_n) telle que les ψ_{λ_n} aient une limite ψ_a injective ou nulle. Si $\psi_a \neq 0$, la fonction ψ_a^{-1} linéarise $\tilde{P}_a = P_\alpha$. Mais $\psi_a'(0) = \lim \psi_n'(0) = \lim \eta(\lambda_n) \neq 0$ pour presque tout α car η est harmonique non identiquement nulle, d'où C.Q.F.D.

Notons SF (resp. HF) l'ensemble des α qui peuvent apparaître comme angle de rotation d'un disque de Siegel (resp. d'un anneau de Herman) pour une fraction rationnelle. Il résulte de la chirurgie de Shishikura (2.4) que $SF = HF$.

3.3. Domaine de validité des théorèmes d'Arnold et de Herman

Notons H l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}$ tels que tout difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique $f : S^1 \longrightarrow S^1$ de nombre de rotation α soit $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à la rotation $\mathcal{R}_\alpha$. Le théorème de Herman, amélioré par Yoccoz, affirme que H contient l'ensemble des α diophantiens.

Ce théorème avait été conjecturé par Arnold, qui avait obtenu un résultat "local" (en $\mathbb{R}$-analytique).

Notons A (resp. $\hat{A}$) l'ensemble des α tels que, pour tout $\delta > 0$ (resp. $\exists\delta > 0$), il existe un $\varepsilon > 0$ tel que tout difféomorphisme $f : S' \longrightarrow S'$ d'angle de rotation α, qui s'étend en une application holomorphe sur la couronne

$$Q_\delta = \{z \mid \mathrm{Log}\,|z| \in]-\delta,\delta[\},$$

avec $|\mathrm{Log}\, f(z)/e^{2i\pi\alpha} z| < \varepsilon$ sur Q_δ, soit $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à $\mathcal{R}_\delta$ sur S^1.

Le théorème d'Arnold, complété par une démonstration adaptée de Rüssmann (*cf.* thèse Herman), affirme que A contient l'ensemble des α vérifiant une condition qui s'écrit (Yoccoz, Debarre) :

$$(\mathcal{R}) : \Sigma \frac{\mathrm{Log}\, q_{n+1} . \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

où les q_n sont les dénominateurs des réduites de α. On a évidemment $H \subset A \subset \hat{A}$.

PROPOSITION 4.- *On a* $\hat{A} \subset S$.

Démonstration.- Pour $a \in]3,+\infty[$, la fraction de Blaschke

$$f_a = z \longmapsto z^2 \frac{z-a}{1-az}$$

induit un difféomorphisme de S^1. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$ irrationnel, notons $f_{a,\alpha}$ la fonction $e^{2i\pi t} f_a$, où t est choisi de façon que le nombre de rotation soit α.

Pour α fixé, quand a tend vers $+\infty$, $f_{a,\alpha}$ tend vers la rotation $\mathcal{R}_\alpha : z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z$ uniformément sur toute couronne. Donc si $\alpha \in \hat{A}$, l'application $f_{a,\alpha}$ admet autour de S^1 un anneau de Herman pour a assez grand. En découpant cet anneau, comme en 2.4.2, on obtient deux fractions rationnelles de degré 2 avec des disques de Siegel, qui sont en fait les polynômes P_α et $P_{-\alpha}$. Il résulte alors de la Prop. 3 que $\alpha \in S$. C.Q.F.D.

3.4. Point critique sur le bord d'un disque de Siegel

PROPOSITION 5.- *Soit* Δ *un disque de Siegel de nombre de rotation* α *pour une fraction rationnelle* f *. On suppose* $\alpha \in H$ *.*

a) (Ghys, 1983) *Si* $\partial\Delta$ *est une courbe de Jordan, il existe un point critique de* f *sur* $\partial\Delta$ *;*

b) (Herman, 1983) *Si* $f_{|\partial\Delta}$ *est injective, il existe un point critique de* f *sur* $\partial\Delta$ *.*

La partie (b) contient la partie (a), mais sa démonstration est plus technique, aussi nous ne l'évoquerons pas ici.

Démonstration de (a) : Soit W un anneau ouvert limité par $\partial\Delta$ et une autre courbe de Jordan, située à l'extérieur de Δ, et soit φ un isomorphisme de W sur $U^+ = \{z \mid 1 < |z| < R\}$ pour un R convenable, le bout $\partial\Delta$ de W correspondant à S^1. En supposant qu'il n'y ait pas de point critique sur $\partial\Delta$, f est injective sur un voisinage de $\partial\Delta$, donc on peut trouver deux anneaux W_1 et W_2 dans W, ayant $\partial\Delta$ dans leur bord, et tels que f induise un isomorphisme de W_1 sur W_2. Posons $U_i^+ = \varphi(W_i)$ pour $i = 1,2$, et $g^+ = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1^+ \longrightarrow U_2^+$. Par le principe de réflexion de Schwarz, g^+ se prolonge en une application holomorphe $g : U_1 \longrightarrow U_2$, où $U_i = U_i^+ \cup U_i^- \cup S^1$, l'ouvert U_i^- étant l'image de U_i^+ par $z \longmapsto 1/\bar{z}$. L'application g est un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique de S^1 et a pour nombre de rotation α. Comme $\alpha \in H$, l'application g est $\mathbb{R}$-analytiquement conjuguée à la rotation $\mathcal{R}_\alpha$, donc il existe un anneau U_3 voisinage de S' tel que $g(U_3) = U_3$. Posons $U_3^+ = U_3 \cap U^+$ et $W_3 = \varphi^{-1}(U_3)$. Alors $\hat{\Delta} = \bar{\Delta} \cup W_3$ est un disque tel que f induise un isomorphisme de $\hat{\Delta}$ sur lui-même, ce qui contredit la maximalité de Δ. C.Q.F.D.

Remarques.- 1) On n'utilise pas le fait que f est une fraction rationnelle, mais seulement que c'est une transformation holomorphe au voisinage d'une courbe de Jordan (c'est d'ailleurs le titre de la note de Ghys), ou du bord d'un anneau.

2) La démonstration ci-dessus et celle de Herman s'appliquent directement aux anneaux de Herman. D'ailleurs la chirurgie de Shishikura montre que, pour ce genre de résultats, il est indifférent de travailler sur les disques de Siegel ou les anneaux de Herman.

3) La partie (a) a peu d'applications, car on ne connaît aucun exemple où on sache que $\partial\Delta$ est une courbe de Jordan, sauf des exemples pathologiques où $\alpha \notin H$ (*cf.* n° 6).

La partie (b) de la Prop. 5 entraîne :

COROLLAIRE (Herman).- *Pour* $\alpha \in H$, *le point critique de* P_α *est sur le bord du disque de Siegel.*

Ce corollaire résulte de ladite partie (b) et du lemme suivant :

Lemme.- Notons ω *le point critique de* P_α *et* Δ *le disque de Siegel. Si* $\omega \notin \partial\Delta$, *la restriction de* P_α *à* $\partial\Delta$ *est injective.*

Démonstration du lemme.- Notons τ la symétrie par rapport à ω . On a $P_\alpha^{-1}(\bar\Delta) = \bar\Delta \cup \tau(\bar\Delta)$. Si $P_\alpha|\partial\Delta$ n'est pas injective, $\bar\Delta \cap \tau(\bar\Delta)$ contient deux points x et $\tau(x)$, donc $\bar\Delta \cup \tau(\bar\Delta)$ entoure ω . En d'autres termes, la composante U de $\mathbb{C} - (\bar\Delta \cup \tau(\bar\Delta))$ qui contient ω est bornée. Par suite U est contenu dans l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli $K(P_\alpha)$, donc dans $\mathbb{C} - J(P_\alpha)$. On obtient alors une contradiction entre la classification des composantes de $C - J(P_\alpha)$ (1.4) et un théorème de Fatou qui exige que l'adhérence de $\{P_\alpha^n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ contienne $\partial\Delta$.

C.Q.F.D.

Remarque.- Dans le prolongement d'une idée de Yoccoz, mentionnée plus haut, P. Jones et Carleson ont une démonstration simple et directe du fait que, pour presque tout α , le point critique de P_α est sur le bord du disque de Siegel. Ce résultat est moins fort que le corollaire ci-dessus, car il ne précise pas de quels α il s'agit. Néanmoins, nous indiquons brièvement cette démonstration.

Avec les notations de (3.2, remarque 3), $\psi_\lambda(z)$ se met sous la forme $-\frac{\lambda}{2}\Psi(\lambda,z)$, où Ψ est une fonction holomorphe sur $D \times D$ bornée par 4 . Pour tout $\lambda \in D$, l'application $\Psi_\lambda : z \longrightarrow \Psi(\lambda,z)$ est univalente (i.e. injective), et se prolonge au bord avec $\Psi_\lambda(1) = 1$. Son image a un point anguleux d'angle $\frac{1}{4}$ tour au point 1 , donc $|\Psi_\lambda(1-w) - 1|$ tend vers 0 comme $\sqrt{|w|}$ quand $w \longrightarrow 0$. Pour presque tout $a \in S^1$, Ψ_λ a une limite $\Psi_a : D \longrightarrow D$ quand $\lambda \longrightarrow a$ radialement. Notons $A_\varepsilon = \{a \in S^1 \mid \exists r \ |\psi_a(r) - 1| < \varepsilon\}$ et $A = \bigcap_\varepsilon A_\varepsilon$. Il s'agit de montrer que A est de mesure 1 pour $d\alpha = \frac{1}{2\pi}|da|$.

Posons $H(r,\lambda) = -\mathrm{Log}\,\frac{|1-\Psi(\lambda,r)|}{5}$: c'est une fonction positive harmonique en λ . Et posons $H(r) = \sup_\lambda H(r,\lambda)$: on a $H(r) \leq -2\,\mathrm{Log}\,|1-r| + C_0$, où C_0 est une constante, en vertu des propriétés des fonctions univalentes. Pour λ fixé, $H(r,\lambda) \geq -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\ 1-r\ + C_1$, donc pour tout $G < \infty$ on peut trouver $r \in]0,1[$ tel que $H(r,\lambda) \geq G$ et $H(r) < 5\,H(r,\lambda)$. Notons m_λ la mesure harmonique de λ . Comme $H(r,\lambda) = \int H(r,a)\,m_\lambda(da)$ et $H(r) = \sup \mathrm{ess}\, H(r,a)$, on a $m_\lambda(\{a \mid H(r,a) \geq G/2\}) \geq \frac{1}{10}$, autrement dit, si on prend $G = 2\,\mathrm{Log}\,\frac{\varepsilon}{5}$, $(\forall\lambda)\,(\forall\varepsilon)\ m_\lambda(A_\varepsilon) \geq \frac{1}{10}$. Par suite, $(\forall\lambda)\ m_\lambda(A) \geq \frac{1}{10}$. Ainsi, la fonction caractéristique de $S^1 - A$, limite radiale presque partout de $\lambda \longmapsto 1 - m_\lambda(A)$, est majorée par $\frac{9}{10}$ p.p., donc nulle p.p.

C.Q.F.D.

3.5. Le bord d'un disque de Siegel est-il un quasi-cercle ?

Conjecture.- *Pour* α *diophantien d'exposant* 2 , *le polynôme* P_α *possède les propriétés suivantes :*

(i) *le bord du disque de Siegel est un quasi-cercle* (image d'un cercle par une application quasi-conforme) ;

(ii) *l'ensemble de Julia rempli* $K(P_\alpha)$ *est localement connexe.*

La conjecture (ii) entraînerait que le bord du disque de Siegel est une courbe de Jordan. Ces conjectures sont appuyées par des observations numériques de Manton-Nauenberg-Widom et de Peitgen pour "l'angle d'or" $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, assorties de considérations dans le cadre du "groupe de renormalisation".

La proposition 6 qui suit constitue une approche, tentée par Herman et l'auteur, mais malheureusement infructueuse[1], car on ne sait démontrer l'hypothèse pour aucune valeur de α . Nous la trouvons cependant instructive.

La fraction de Blaschke

$$f_3 : z \longmapsto z^2 \frac{z-3}{1-3z}$$

induit un homéomorphisme de S^1 sur lui-même qui est analytique, mais n'est pas un difféomorphisme car $f_3'(1) = 0$ (le graphe de $\operatorname{Arg} z \longmapsto \operatorname{Arg} f_3(z)$ a une inflexion horizontale). Pour $\alpha \in \mathbb{T}$ irrationnel, notons $f_{3,\alpha}$ l'application $z \longmapsto e^{2\pi i t} f_3(z)$, où t est tel que le nombre de rotation soit α (ceci détermine t de façon unique). L'application $f_{3,\alpha} : S^1 \longrightarrow S^1$ est topologiquement conjuguée à la rotation d'angle α (Yoccoz) ; notons h_α la conjugante (unique à rotation près).

On dit qu'un homéomorphisme h de S^1 est *quasi-symétrique* s'il se prolonge en un homéomorphisme H de $\bar{D}$ induisant un homéomorphisme quasi-conforme de D . D'après un théorème d'Ahlfors-Beurling, il faut et il suffit pour cela que f transforme des quadruplets à birapports bornés en quadruplets à birapports bornés.

PROPOSITION 6.- *Si la conjugante* h_α *de* $f_{3,\alpha}$ *est quasi-symétrique, le bord du disque de Siegel de* P_α *est un quasi-cercle passant par le point critique.*

Démonstration.- Soit $H : \bar{D} \longrightarrow \bar{D}$ un homéomorphisme prolongeant h_α et quasi-conforme sur D . Définissons $g : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ par $g = f$ sur $\mathbb{C} - D$ et $g = H^{-1} \circ \mathcal{R}_\alpha \circ H$ sur $\bar{D}$ (ces deux définitions coïncident sur S^1). Notons σ_0 la structure presque complexe standard sur D . Il existe sur $\bar{\mathbb{C}}$ une structure presque complexe σ qui coïncide avec $H^*\sigma_0$ sur D et est g-invariante. Cette structure est mesurable et d'ellipticité bornée ; on peut donc trouver un homéomorphisme quasi-conforme $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tel que $\varphi^*\sigma_0 = \sigma$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\infty) = \infty$. L'application $P = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ est holomorphe de degré 2 , avec $P^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, c'est donc un polynôme quadratique ; il a en 0 un point fixe

[1] À partir d'un calcul de Świątek, Herman a montré (Mai 87) que h_α est quasi-symétrique pour $\alpha \in \mathrm{Dioph}^2$, d'où la conjecture (i).

au voisinage duquel il est quasi-conformément conjugué à $\mathcal{R}_\alpha$, c'est donc P_α . Le bord du disque de Siegel est $\varphi(S^1)$, c'est donc un quasi-cercle. Le point 1 est point critique double (donc de degré local 3) de $f_{3,\alpha}$, mais c'est un point de ramification de degré local 2 de g , donc $\varphi(1)$ est le point critique de P ; il appartient au bord du disque de Siegel. C.Q.F.D.

3.6. Un exemple pathologique

La proposition ci-dessous donne des exemples qui changent la vision que l'on avait du problème.

PROPOSITION 7 (Herman, 1986).- *Il existe un* α *tel que* P_α *ait un disque de Siegel dont le bord est un quasi-cercle ne passant pas par le point critique.*

Pour $a > 3$, la fraction de Blaschke $f_a : z \longmapsto z^2 \frac{z-a}{1-az}$ induit un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique de S^1 . Pour $\alpha \in \mathbb{T}$ irrationnel, notons $f_{a,\alpha}$ l'application $e^{2\pi it} f_a$, où t est choisi de façon que l'angle de rotation soit α . D'après Denjoy, $f_{a,\alpha}$ est topologiquement conjugué à la rotation $\mathcal{R}_\alpha$; notons $h_{a,\alpha}$ la conjugante (qui est unique à rotation près). La proposition 7 résulte alors des lemmes suivants :

Lemme 1 (Ghys).- *On suppose que* $h_{a,\alpha}$ *est quasi-symétrique, mais non* $\mathbb{R}$*-analytique. Alors* P_α *a un disque de Siegel dont le bord est un quasi-cercle ne passant pas par le point critique.*

La démonstration de ce lemme est tout à fait semblable à celle de la Prop. 6, sauf que ici les points critiques de f autres que 0 et ∞ sont l'un dans D , l'autre dans $\mathbb{C} - \bar{D}$. Alors g a un point critique en ∞ et un dans $\bar{\mathbb{C}} - \bar{D}$, et le point critique de P est en dehors de $\varphi(\bar{D})$. La condition que $f_{a,\alpha}$ n'est pas $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à $\mathcal{R}_\alpha$ garantit que $\varphi(\bar{D})$ est bien le disque de Siegel de P_α .

Lemme 2 (Herman).- *Pour tout* $a > 3$, *on peut trouver* α *tel que* $h_{a,\alpha}$ *soit quasi-symétrique, mais non* C^2 .

La démonstration de ce lemme est très technique ; on construit α par son développement en fraction continue

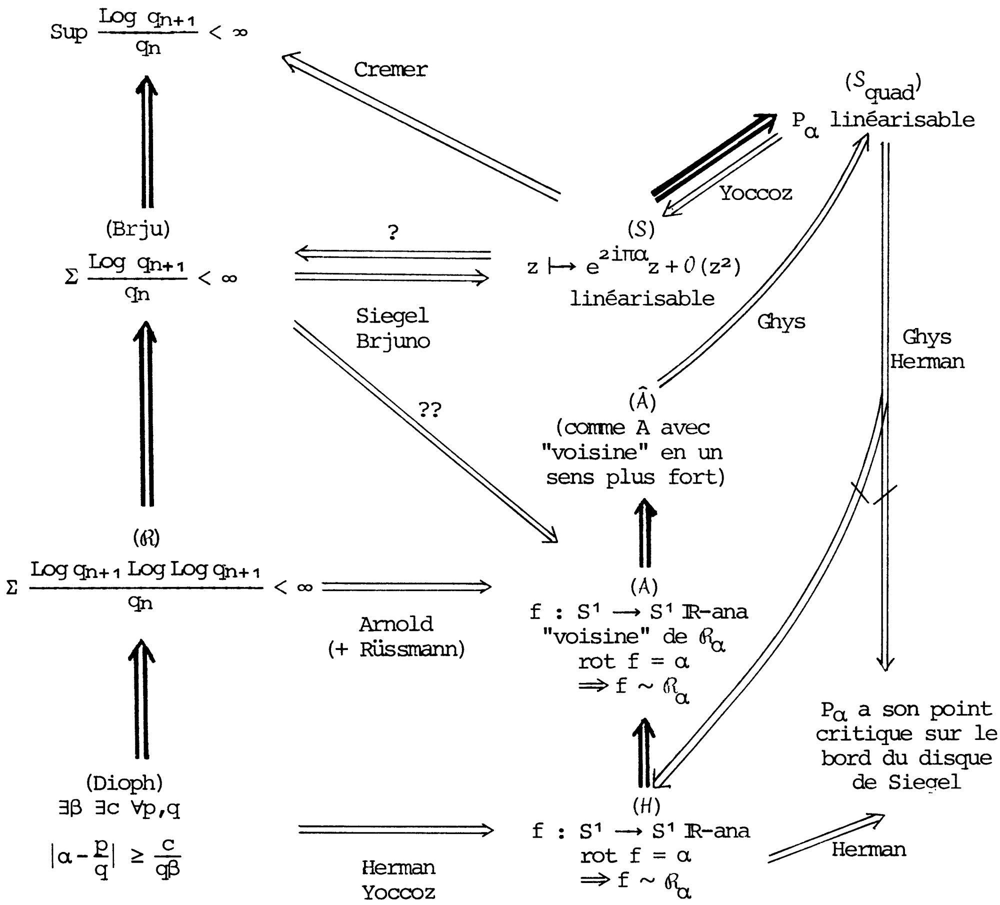
$$\alpha = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\cdots}}} ;$$

tous les c_i sont pris égaux à 1 sauf pour une suite (i_n) pour laquelle $c_{i_n} = c_n$. Une fois $i_1,\ldots,i_n,c_1,\ldots,c_n$ choisis, pour i_{n+1} assez grand, on peut choisir c_{n+1} assez grand pour avoir des inégalités qui font tendre la norme C^2 vers l'infini, mais pas trop de façon à ne pas laisser échapper la norme quasi-symétrique.

Remarques.- 1) Cette proposition donne à ce jour les seuls exemples où l'on sache démontrer que le bord d'un disque de Siegel est un quasi-cercle, ou même seulement une courbe de Jordan. Ces exemples sont cependant assez pathologiques : il s'agit de valeurs de α n'appartenant pas à H (*cf.* Prop. 5), et l'ensemble de Julia n'est pas localement connexe (*cf.* Sém. Bourbaki, exp. 559, Nov. 1982, II, 5).

2) La Prop. 7 montre que l'inclusion $H \subset S$ est stricte. Mais on ignore parmi les inclusions $H \subset A \subset \hat{A} \subset S$ lesquelles sont strictes. On ignore également si les α construits pour le lemme 2 satisfont (Brju), donc s'ils donnent un contre-exemple à l'implication conjecturale $(S) \Rightarrow$ (Brju).

3.7. Tableau récapitulatif



. $\not\Rightarrow$ signifie "n'implique pas"

. $P_\alpha : z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z + z^2$

. Les flèches appuyées représentent des implications triviales.

BIBLIOGRAPHIE

L'article [H7] est un survey qui contient une bibliographie très complète, d'où la présente est extraite pour une large part.

[A-B] L.V. AHLFORS and L. BERS - *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. 72 (1960), 385-404.

[A-Beu] L.V. AHLFORS and A. BEURLING - *The boundary correspondence under quasi-conformal mappings*, Acta Math. 96 (1956), 125-142.

[Ar] V.I. ARNOLD - *Small denominators I ; on the mappings of a circumference onto itself*, Amer. Math. Soc. Translations, 2nd series, 46 (1961), 213-284.

[Bl] P. BLANCHARD - *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 85-141.

[Brju1] A.D. BRJUNO - *Convergence of transformations of differential equations to normal forms*, Dokl. Akad. Nauk. URSS 165 (1965), 987-989.

[Brju2] A.D. BRJUNO - *Analytic form of differential equations*, Transactions Moscow Math. Soc. 25 (1971), 131-288 ; 26 (1972), 199-239.

[Bro] H. BROLIN - *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark Math. 6 (1966), 103-144.

[Ca] C. CAMACHO - *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields*, Astérisque 59-60 (1978), 83-84.

[C-J] L. CARLESON and P. JONES - *Lettre à Herman*, 1984.

[Cr1] H. CREMER - *Über die Iteration rationaler Funktionen, Jahresber*, Deutsch. Math. Verein 33 (1925), 185-210.

[Cr2] H. CREMER - *Zum Zentrumproblem*, Math. Ann. 98 (1928), 151-163.

[Cr3] H. CREMER - *Über Konvergenz und Zentrumproblem*, Math. Ann. 110 (1935), 739-744.

[Cr4] H. CREMER - *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*, ibid. 115 (1938), 573-580.

[D1] A. DOUADY - *Systèmes dynamiques holomorphes*, Sém. Bourbaki, exp. 599, Astérisque 105-106 (1983), 39-63.

[D2] A. DOUADY - *Chirurgie sur les applications holomorphes*, ICM 86, Berkeley. Version anglaise : preprint MSRI, 1986.

[DH1] A. DOUADY et J.H. HUBBARD - *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294 (18 Janvier 1982), Série 1, 123-126.

[DH2] A. DOUADY et J.H. HUBBARD - *Systèmes dynamiques holomorphes I, II : Itération des polynômes complexes* (Cours 83-84), Publ. Math. Orsay, 84.02 et 85.04.

[DH3] A. DOUADY and J.H. HUBBARD - *On the dynamics of polynomial like mappings*, Ann. Sc. E.N.S., 4ème série, 18 (1985), 287-343.

[D-E] A. DOUADY and C. EARLE - *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math., Vol. 157 (1986) 23-48.

[F] P. FATOU - *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. S.M.F. 47 (1919), 161-271 (1920), 33-94 ; 48 (1920), 208-304.

[G] E. GHYS - *Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289 (1984), 385-388.

[Gu] J. GUCKENHEIMER - *Endomorphisms of the Riemann sphere*, Proceedings of the Symposium of Pure Mathematics, v. 14, edited by S. Chern and S. Smale, AMS, Providence, R.I. (1970), 95-123.

[H1] M. HERMAN - *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. IHES 49 (1979), 5-233.

[H2] M. HERMAN - *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphere de Riemann*, Bull. S.M.F. 112 (1984), 93-142.

[H3] M.R. HERMAN - *Construction of some curious diffeomorphisms of the Riemann sphere*, to appear in J. London Math. Soc.

[H4] M.R. HERMAN - *Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number*, Bol. Soc. Bras. Mat. 16 (1985), 45-83.

[H5] M.R. HERMAN - *Are the critical points on the boundaries of singular domains ?*, Comm. Math. Phys. 99 (1985), 593-612.

[H6] M. HERMAN - *Conjugaison quasi-symétrique des difféomorphismes du cercle et applications aux disques singuliers de Siegel*, manuscrit (1986).

[H7] M.R. HERMAN - *Recent results and some open questions on Siegel linearization theorem of germs of complex-analytic diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^n$ *near a fixed point*, 8th International Congress on Mathematical Physics, World Scientific Publishers, 1986.

[Il] Y.S. IL'YASHENKO - *Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear normal form at a singular point*, Funct. Analysis and Appl. 13 (1979), 227-229.

[J] G. JULIA - *Oeuvres*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris.

[L-V] O. LEHTO and K.I. VIRTANEN - *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, 1973.

[Lju] M. LJUBICH - *The investigation of the stability of rational functions*, in Theory of Functions, Kharkov (1981), 42, 72-91 (en russe).

[M-S-S] R. MAÑÉ, P. SAD and D. SULLIVAN - *On the dynamics of rational maps*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e Série, t. 16 (1982), 193-217.

[M-N] N.S. MANTON and M. NAUENBERG - *Universal scaling behavior for iterated maps in the complex plane*, Comm. in Mathematical Physics ?

[Mar] J. MARTINET - *Normalisation des champs de vecteurs, d'après A.D. Brjuno*, Sém. Bourbaki, exp. 564, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag 901 (1981), 55-70.

[Mo] J. MOSER - *A rapidly convergent iteration method, II*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Ser. III, 20 (1966), 499-535.

[N] V.I. NAÏSHUL - *Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their applications to analytic differential equations in* $\mathbb{C}^2$ *and* $\mathbb{C}P^2$, Trans. Moscow Math. Soc. 42 (1983), 239-250.

[P] J. PÖSCHEL - *On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points*, Exp. Math. 4 (1986), 97-109 ; Addendum p. 1 to 4.

[Re1] M. REES - *Ergodic rational maps with dense critical point forward orbit*, University of Minnesota Math. Report, 82-140.

[Re2] M. REES - *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sc. E.N.S., t. 19, fasc. 3 (1986), 383-407.

[R1] H. RÜSSMANN - *Über die Iteration analytischer Funktionen*, J. Math. Mech. 17 (1967), 523-532.

[R2] H. RÜSSMANN - *Kleine Nenne, II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1970), 1-10.

[R3] H. RÜSSMANN - *On the convergence of power series transformations of analytic mapping near a fixed point into normal form*, preprint, I.H.E.S. (1977).

[Sch] W.M. SCHMIDT - *Diophantine approximation*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag 785 (1980).

[Sh1] M. SHISHIKURA - *On the quasi-conformal surgery of rational functions*, Ann. Sc. E.N.S., t. 20, fasc. 1 (1987).

[Sh2] M. SHISHIKURA - *Configurations of Herman rings and dynamical systems on trees*, preprint, Kyoto University (1986).

[Sie] C.L. SIEGEL - *Iteration of analytic functions*, Ann. Math. 43 (1942), 807-812 (voir aussi SIEGEL, *Oeuvres*, Springer-Verlag (1966)).

[Su1] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms, I, Solutions of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of Math. 122 (1985), 401-418.

[Su2] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics, II, III : topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, preprint IHES (1983).

[Su-T] D. SULLIVAN and W. THURSTON - *Extending holomorphic motions*, preprint.

[Y1] J.-C. YOCCOZ - *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sc. E.N.S., 4ème série, 17 (1984), 333-359.

[Y2] J.-C. YOCCOZ - C^1-*conjugaison des difféomorphismes du cercle*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1007 (1983), 814-827.

[Y3] J.-C. YOCCOZ- *Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique*, Note C.R.A.S., t. 298, Série I, n° 7 (1984), 141-144.

[Y4] J.-C. YOCCOZ - *Théorème de Siegel pour les polynômes quadratiques*, manuscrit (1985).

[Y5] J.-C. YOCCOZ - *Centralisateur et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*, Thèse Université de Paris-Sud (contient [Y1] et [Y3]).

[Y6] J.-C. YOCCOZ - *Une remarque sur la condition de Brjuno*, manuscrit (1985).

[Z1] E. ZEHNDER - *A simple proof of a generalization of a theorem by C.L. Siegel*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag 597 (1977), 855-866.

[Z2] E. ZEHNDER - *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems*, I, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 91-140 ; II, ibid. 29 (1976), 49-111.

Adrien DOUADY

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY

et

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05