Astérisque

JEAN-BENOÎT BOST

Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. nº 676, p. 113-149

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__113_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 676

Février 1987

FIBRÉS DÉTERMINANTS, DÉTERMINANTS RÉGULARISÉS ET MESURES SUR LES ESPACES DE MODULES DES COURBES COMPLEXES

par Jean-Benoît BOST

Une relation remarquable entre "théorie de cordes à la Polyakov" et géométrie algébrique des espaces de modules de courbes complexes a été récemment établie, grâce aux travaux de Quillen ([44]) et Belavin et Knizhnik ([7], [8]) sur le déterminant de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur une surface de Riemann. Nous nous proposons de la décrire dans cet exposé.

0.1. Les théories de cordes sont des théories quantiques d'objets étendus, développées depuis une vingtaine d'années. Elles décrivent, non pas des particules ponctuelles, comme le fait la théorie quantique des champs usuelle, mais des "cordes", c'est-à-dire des objets à une dimension d'espace.

Les modèles de cordes ont été introduits au début des années soixante-dix comme modèles phénoménologiques des interactions fortes entre hadrons (i.e. des forces nucléaires, de portée $\sim 10^{-13}$ cm). Malheureusement, ces modèles ne reproduisent que très grossièrement la réalité et présentent des aspects non physiques ; notamment, on ne sait les construire mathématiquement que pour des dimensions D de l'espace-temps différentes de 4 : $D = 26$ pour le modèle usuel (bosonique), $D = 10$ pour les modèles possédant des degrés de liberté fermioniques. Puis les modèles de cordes ont été proposés comme théories des particules élémentaires, incluant les champs de Yang - Mills et le champ gravitationnel (l'échelle naturelle de ces modèles serait alors la longueur de Planck, $\sim 10^{-32}$ cm).

En 1981, Polyakov a présenté une reformulation des théories de cordes, qui fournit une nouvelle compréhension des dimensions critiques 26 et 10 . Cette reformulation met en évidence de nouveaux degrés de liberté de la corde, dont la prise en compte permettrait une construction éventuelle de modèles de cordes en dimensions strictement inférieures aux dimensions critiques (4 , par exemple...). Toutefois, la procédure communément suivie aujourd'hui pour éliminer les dimensions excédentaires consiste à "compactifier" $D - 4$ dimensions, à la Kaluza - Klein. Cette construction fait intervenir les variétés complexes de dimension 3 dites de Calabi - Yau.

Enfin, en 1984, la découverte de propriétés remarquables (absence "d'anomalies") de certains modèles de cordes supersymétriques, de groupes de jauge $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$, a suscité un regain d'intérêt considérable pour ces théories, que d'aucuns considèrent comme devant apporter une description unifiée des diverses forces d'interaction fondamentales...

Par ailleurs, les théories de cordes suggèrent d'intéressants problèmes de mécanique statistique, et seraient reliées à la chromodynamique, dans la limite "d'une infinité de couleurs" (i.e., les théories de jauge de groupe $SU(N), N \longrightarrow \infty$).

Pour plus d'informations et une perspective historique sur les théories de cordes, on pourra se reporter aux recueils d'articles [50] et [52], ainsi qu'à [40]. Sur la "corde de Polyakov", on pourra consulter, outre les articles originaux de Polyakov ([42], [43]), les références [21] et [1].

Ajoutons que les modèles de cordes peuvent être considérés comme des modèles de théorie des champs en dimension 2. De fait, les outils mathématiques présentés plus loin s'appliquent aussi à la quantification de ces derniers (*cf.* [22], [3], [30]).

0.2. Il nous faut insister sur le fait que n'est abordé dans cet exposé qu'un domaine très particulier des mathématiques en liaison avec les théories de cordes. Ces dernières sont en effet en relation, non seulement avec la géométrie des courbes algébriques, mais aussi avec la théorie des algèbres d'opérateurs, les "supermathématiques", l'étude des algèbres de Lie de dimension infinie et de leurs représentations, la théorie des formes modulaires, des formes quadratiques entières et des groupes finis, la géométrie des variétés complexes de dimension 2 et 3 ... Bien plus, les théories de cordes, et la théorie quantique des champs en dimension 2, ont permis de découvrir des relations souvent inattendues entre ces divers domaines (voir par exemple [51], [32] et [22]).

En particulier, nous ne présentons que des résultats concernant la corde bosonique et n'évoquons pas les questions de "supergéométrie" posées par leurs extensions aux modèles de cordes supersymétriques (*cf.* [34]).

0.3. Dans la première partie de l'exposé, on introduit, très sommairement, quelques notions de théorie de cordes "à la Polyakov", afin de justifier la définition de la "mesure de Polyakov", sur l'espace des modules des courbes algébriques complexes de genre donné. Pour arriver à cette définition, on manipule formellement des intégrales fonctionnelles et des mesures sur des variétés de dimension infinie, dont la signification mathématique précise reste obscure (§ 1.1 et § 1.4). Néanmoins, on arrive à donner un sens rigoureux à la "mesure de Polyakov" ; celle-ci s'exprime au moyen des "déterminants" de certains opérateurs différentiels elliptiques sur les surfaces compactes, que l'on peut définir par régularisation zêta.

La seconde partie, indépendante de la première, est de nature purement mathématique. Elle décrit quelques résultats sur les fibrés déterminants des familles propres et lisses de courbes holomorphes, leurs métriques et leurs courbures, issus des travaux de Quillen, Bismut et Freed.

Dans la troisième partie, nous utilisons ces résultats pour identifier la mesure de Polyakov à une mesure définie de manière "purement algébrique" (théorème de Belavin et Knizhnik,...). On présente ensuite quelques propriétés de la mesure de Polyakov, conséquences de cette identification (formules explicites en petit genre ; comportement asymptotique au voisinage de $\overline{M_p} - M_p$).

1. LA MESURE DE POLYAKOV SUR M_p (cf. [1], [36] et [16])

1.1. Quelques mots sur les théories de cordes bosoniques

1.1.1. Une corde, objet à une dimension d'espace, décrit dans l'espace-temps une surface, qui possède en tout point une direction tangente du genre temps et une direction tangente du genre espace. Cette surface est paramétrée par les variables (σ,τ) décrivant la bande $[0,1] \times \mathbb{R}$. Les points de la surface sont donnés par leurs coordonnées $x(\sigma,\tau) = (x_i(\sigma,\tau))_{0\leq i\leq D-1}$ dans l'espace-temps minkowskien à D dimensions, c'est-à-dire $\mathbb{R}^D$ muni de la forme bilinéaire symétrique $x \cdot y = - x_0 \cdot y_0 + \sum_{i=1}^{D-1} x_i y_i$; les vecteurs $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tau}$ et $x' = \frac{\partial x}{\partial \sigma}$ sont respectivement du genre temps et du genre espace. La dynamique de la corde est spécifiée par l'action de Nambu-Goto, proportionnelle à l'aire de cette surface dans l'espace-temps :

$$S_{NG} = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma\, d\tau \sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - (\dot{x} \cdot \dot{x})(x' \cdot x')} \ .$$

Cette action est la généralisation naturelle pour un objet à une dimension de l'action d'une particule libre de masse m , proportionnelle à la longueur de sa trajectoire dans l'espace-temps :

$$S_0 = - m \int \sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}\, d\tau \ .$$

1.1.2. L'action S_N est par construction indépendante du choix des paramètres (σ,τ) . Il s'agit là d'une invariance comparable à l'invariance de jauge en électrodynamique, qui joue un rôle crucial lors de la quantification de la théorie. Cette dernière peut être réalisée dans un formalisme hamiltonien au moyen de l'une des procédures suivantes :

- "fixation de la jauge" : on impose aux variables des conditions supplémentaires, conduisant à des variables dynamiques indépendantes, sur lesquelles la quantification hamiltonienne ne pose plus de difficultés (quantification dans la jauge orthogonale du cône de lumière) ;
- quantification "à la Gupta-Bleuler" : on introduit un espace H d'états quantiques, correspondant à l'espace des phases classiques tout entier, sur lequel

la norme n'est plus définie positive. L'espace des états physiques est le sous-espace de H intersection des noyaux des "contraintes", comme opérateurs quantiques. Ces derniers constituent une représentation d'une algèbre de Lie de dimension infinie, l'algèbre de Virasoro.

La covariance de Lorentz pour la première procédure, et la suppression des états physiques de normes négatives pour la seconde, conduisent à imposer des caractéristiques non physiques à la théorie quantique des cordes bosoniques : la dimension $D = 26$ et un état fondamental tachyonique (i.e. de masse imaginaire).

1.1.3. Décrivons maintenant la quantification "à la Polyakov" de la corde bosonique. Celui-ci travaille dans un espace-temps euclidien et utilise les intégrales fonctionnelles introduites par Feynman.

La version euclidienne de l'action de Nambu - Goto est la fonctionnelle qui associe à une application (suffisamment régulière) x d'une surface M dans l'espace euclidien à D dimensions (c'est-à-dire $\mathbb{R}^D$ muni du produit scalaire usuel " . ") :

$$S_{NG}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d\,A_x \;;$$

ici $d\,A_x$ désigne l'élément d'aire sur M déduit de l'application x de M dans $\mathbb{R}^D$, i.e. la mesure sur M qui s'écrit localement dans un système de coordonnées (x_1,x_2) :

$$d\,A_x = [\|\partial_1 x\|^2 \, \|\partial_2 x\|^2 - (\partial_1 x \,.\, \partial_2 x)^2]^{1/2} \, dx_1 \, dx_2 \;.$$

Polyakov part de l'observation suivante, dûe initialement à Brink, Di Vecchia et Howe, et Deser et Zumino.

Posons, si x est une application (suffisamment régulière) de M dans $\mathbb{R}^D$ et g une métrique riemannienne sur X :

$$(1.1.1) \qquad S(g,x) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M \left[\sum_{i=1}^{D} \|\nabla x_i\|^2\right] d\,A \;,$$

où ∇, $\|.\|$ et dA désignent le gradient, la norme et l'élément d'aire associés à la métrique g. Au facteur multiplicatif $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ près, $S(g,x)$ n'est autre que l'énergie de l'application x de la variété riemannienne (M,g) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$. On vérifie alors que *la fonctionnelle d'action* $S(g,x)$ *est "classiquement équivalente"* à l'action de Nambu - Goto $S_{NG}(x)$: si la différentielle en g de $S(g,x)$ est nulle, alors $S(g,x) = S_{NG}(x)$.

L'action $S(g,x)$ admet trois types de symétries :

1) *L'invariance par déplacement dans l'espace-temps euclidien.* Si T appartient au groupe $\mathbb{R}^D \rtimes O(D)$, produit semi-direct des groupes des rotations et des translations dans $\mathbb{R}^D$, alors

$$S(g,x) = S(g,Tx) \;.$$

2) *L'invariance par reparamétrisation.* Pour tout difféomorphisme f de M :

$$S(g,x) = S(f^*g, f^*x) \ .$$

3) *L'invariance de Weyl ou invariance conforme.* Pour toute $\varphi \in C^\infty(M;\mathbb{R})$:

$$S(g,x) = S(e^\varphi g, x) \ .$$

Pour quantifier la théorie classique décrite par l'action $S(g,x)$, Polyakov considère l'intégrale fonctionnelle :

$$\int \mathcal{D}g\,\mathcal{D}x\; e^{-S(g,x)} \ . \tag{1.1.2}$$

Dans cette expression "naïve", le domaine d'intégration est le produit de l'espace $\mathcal{Met}$ de toutes les métriques g sur M et de l'espace $\mathcal{E}$ des applications de M dans $\mathbb{R}^D$; et $\mathcal{D}g\,\mathcal{D}x$ désigne une mesure sur cet espace.

Désormais, nous supposons que M est une surface compacte connexe orientée, de genre p . L'intégrale fonctionnelle (1.1.2) représente alors la contribution d'ordre p dans la fonction de partition de la corde de Polyakov. Celle-ci décrit les interactions "vide-vide" dues à la création et à l'annihilation des cordes fermées. De plus, nous faisons : $\frac{1}{2\pi\alpha'} = 1$.

En fait, comme l'action S est invariante par les symétries 2) et 3), et que les degrés de liberté classiques de la corde sont représentés par le quotient de $\mathcal{Met} \times \mathcal{E}$ par ces symétries, il faut, pour quantifier cette théorie classique, construire une "mesure naturelle" sur ce quotient, grâce à laquelle on intégrera e^{-S} . Par ailleurs, si $\mathcal{D}x$ est une "mesure invariante par translation" sur $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int \mathcal{D}x\, e^{-S(g,x)}$ s'évalue facilement : c'est une intégrale gaussienne, car S est quadratique en x .

Il s'agit donc de construire une mesure naturelle $\mathcal{D}g\,\mathcal{D}x$ sur $\mathcal{Met} \times \mathcal{E}$, à partir de laquelle, par intégration en x de $\mathcal{D}g\,\mathcal{D}x\, e^{-S(g,x)}$, on obtienne une mesure sur $\mathcal{Met}$ compatible à l'action du groupe des difféomorphismes et des transformations de Weyl. A partir de cette mesure, on doit obtenir, par passage au quotient, une mesure sur le quotient de $\mathcal{Met}$ par l'action de ces groupes. Ce dernier s'identifie à l'espace des modules $\mathcal{M}_p$ des surfaces de Riemann de genre p (*cf.* 1.3).

On ne sait réaliser ce programme de façon naturelle que lorsque D est la dimension critique 26 (*cf.* 1.6). De plus, la mesure sur $\mathcal{M}_p$ que l'on obtient par cette construction - la mesure de Polyakov - est de masse totale infinie (*cf.* § 3.5). Cette propriété reflète la présence de tachyons dans la théorie des cordes bosoniques.

1.2. Un modèle de dimension finie

Dans cette section, nous décrivons un modèle de dimension finie du problème, en dimension infinie, que nous venons de considérer ; et nous effectuons sur ce modèle une construction (rigoureuse) de "mesure quotient".

Ce type de construction est connu en théorie quantique des champs sous le nom de procédure de Faddeev et Popov.

1.2.1. *Conventions et notations*

Dans cette section, variétés et groupes de Lie seront séparés, paracompacts et de dimension finie.

Si F est un vectoriel réel de dimension finie m, on notera $|\Lambda|(F^*)$ le vectoriel réel de dimension 1 des densités sur F, i.e. l'espace des fonctions σ à valeurs réelles sur l'ensemble $\mathcal{B}(F)$ des bases de F telles que, si $B \in \mathcal{B}(F)$ et $T \in GL(F)$, alors $\sigma(TB) = |\det T|\sigma(B)$. Si $(v_1,\ldots,v_m)$ est une base de F, on notera par $|v_1 \wedge \ldots \wedge v_m|^{-1}$ la densité σ telle que $\sigma(v_1,\ldots,v_m) = 1$.

Toute suite exacte $0 \longrightarrow F_o \xrightarrow{T_o} \ldots \longrightarrow F_i \xrightarrow{T_i} F_{i+1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{T_{N-1}} F_N \longrightarrow 0$ de vectoriels réel de dimension finie détermine un isomorphisme canonique

$$I : \bigotimes_{j=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} |\Lambda|(F_{2j}) \simeq \bigotimes_{j=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} |\Lambda|(F_{2j+1}) , \tag{1.2.1}$$

défini comme suit ; si, pour chaque i, B_i' est une base d'un supplémentaire de $\ker T_i$ dans F_i, et si $(v_{i,1},\ldots,v_{i,k_i})$ est la base de F_i obtenue par réunion de B_i' et de $T_{i-1}(B_{i-1}')$, alors

$$I\left(\bigotimes_{j=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} |v_{2j,1} \wedge \ldots \wedge v_{2j,k_{2j}}|^{-1}\right) = \bigotimes_{j=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} |v_{2j+1,1} \wedge \ldots \wedge v_{2j+1;k_{2j+1}}|^{-1} .$$

Si $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel réel de classe C^∞ sur une variété M, C^∞, on peut naturellement définir un fibré en droites réelles (trivialisable) $|\Lambda|\mathbb{E}_x^*$. Une section positive de $|\Lambda|T^*M$ détermine une mesure sur M.

1.2.2. Soient V une variété de classe C^∞, G un groupe de Lie réel, et

$$V \times G \longrightarrow V$$

$$(v,g) \longmapsto v \cdot g$$

une action propre de classe C^∞ de G sur V, telle que l'espace quotient V/G admette une structure de variété faisant de l'application canonique $V \longrightarrow V/G$ une submersion (cela a lieu si et seulement si $\{(v,v\cdot h) , v \in V , h \in G\}$ est une sous-variété de $V \times V$, et la structure de variété sur V/G est uniquement déterminée par cette condition).

Soit de plus E un vectoriel réel de dimension finie, sur lequel G agit à droite, par une représentation linéaire

$$E \times G \longrightarrow E$$
$$(x,h) \longmapsto x \cdot h \ ,$$

et soit Q une application de classe C^∞ de V dans l'ouvert des formes quadratiques définies positives sur E . (On notera $Q(v,x)$ pour $Q(v)(x)$.)

Soient enfin λ et H des applications C^∞ à valeurs > 0 :

$$\lambda : V \longrightarrow |\Lambda|E^*$$
$$v \longmapsto \lambda_v$$
$$H : V \longrightarrow |\Lambda|(\mathrm{Lie}\ G)^*$$

et μ une section C^∞ , partout > 0 , de $|\Lambda|(TV)^*$.

On supposera que Q , λ et H satisfont aux conditions de comptabilité suivantes avec les actions de G sur V et E :

(i) Pour tout $(v,x,h) \in V \times E \times G$, $Q(v \cdot h\ ,\ x \cdot h) = Q(v,x)$.

(ii) Pour tout $v \in V$, $\lambda(v)$ est invariante sous l'action sur E de

$$K_v = \{h \in G \mid v \cdot h = v\} \ .$$

1.2.3. On peut définir canoniquement au moyen de ces données une densité $C^\infty > 0$ sur V/G , par "intégration suivant E , puis passage au quotient par l'action du groupe G " à partir de la densité sur $E \times V$:

$$\sigma(x,v) = e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x)\ \mu(v) \ ,$$

au moins lorsque λ_v et $H(v)$ sont G-équivariantes et $\mu(v)$ G-invariante, c'est-à-dire lorsque l'action de $g \in G$ sur V transforme λ_v en λ_{vg} , l'action adjointe $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ de g sur $\mathrm{Lie}\ G$ transforme $H(v)$ en $H(vg)$, et l'action de g sur TV , qui envoie T_vV sur $T_{vg}V$, transforme $\mu(v)$ en $\mu(vg)$.

Explicitons cette construction.

Soit $\tau \in V/G$, et soit $v \in V$ tel que $\tau = vG$. L'image réciproque de τ par l'application $((E \times V)/G \longrightarrow V/G,\ [(x,v)] \longmapsto [v])$ s'identifie au quotient E/K_v . Chaque élément $|\omega|$ de $|\Lambda|(\mathrm{Lie}\ K_v)^*$ définit une mesure invariante sur le groupe compact K_v - que l'on notera encore $|\omega|$ - puis, comme λ_v est K_v-invariante, une "mesure-transverse" $\lambda_v/|\omega|$ sur E/K_v . On peut ainsi définir $\int_{E/K_v} e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x)$ comme un élément de $|\Lambda|(\mathrm{Lie}\ K_v)^*$ par la formule :

$$\int_{E/K_v} e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x) = \left[\int_{E/K_v} e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ (\lambda_v/|\omega|)([x])\right] |\omega| \ .$$

Autrement dit :

$$\int_{E/K_v} e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x) = \left[\int_E e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x)\right]\left[\int_K |\omega|\right]^{-1} |\omega| \ . \qquad (1.2.1)$$

Par ailleurs, on dispose de la suite exacte :

$$(1.2.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Lie}\, K_v \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\alpha_v} T_v V \xrightarrow{\beta_v} T_\tau V/G \longrightarrow 0 \ ,$$

où α_v est la différentielle en l'élément neutre de $g \longmapsto v\,.\,g$, et β_v la différentielle en v de l'application canonique $V \longrightarrow V/G$. Cette suite exacte détermine canoniquement un isomorphisme d'espaces de densités (*cf.* (1.2.1)) :

$$I_v : |\Lambda|\,(T_\tau V/G)^* \xrightarrow{\ \sim\ } |\Lambda|\,(\mathrm{Lie}\, K_v)^* \otimes |\Lambda|\,(T_v V)^* \otimes [\,|\Lambda|\,(\mathrm{Lie}\, G)^*]^* \ .$$

Posons alors :

$$(1.2.3) \qquad \nu(v) = I_v \left[\int_{E/K_v} e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x) \otimes \mu(v) \otimes H(v)^{-1}\right] .$$

C'est un élément de $|\Lambda|\,(T_\tau V/G)^*$, qui lorsque λ_v et $H(v)$ sont G-équivariantes et $\mu(v)$ G-invariante, ne dépend que de la classe τ de v dans M , et définit, comme fonction de v , une section $C^\infty > 0$ de $|\Lambda|\,(TV/G)^*$.

Plus généralement, si $\nu(v)$ ne dépend que de τ , nous dirons que la densité σ descend sur V/G .

1.2.4 *Remarques* (triviales).- Si le groupe G est engendré par une partie P , alors σ descend sur V/G si et seulement si, pour tout $(v,h) \in V \times P$:

$$\nu(v\,.\,h) = \nu(v) \ .$$

Par ailleurs, si G est un sous-groupe distingué fermé d'un groupe de Lie G' , et si G' admet une action C^∞ sur V qui prolonge l'action de G et est telle que, pour tout $(v,g') \in V \times G'$, $\nu(v\,.\,g') = \nu(v)$, alors σ descend sur V/G en une densité invariante sous l'action à droite de G'/G .

1.2.5. On s'intéressera plus particulièrement au cas où λ , H et μ proviennent de métriques sur E , $\mathrm{Lie}\, G$ et TV .

Supposons donc donnés, pour tout $v \in V$, un produit scalaire $<.,.>_v$ sur E , et un produit scalaire $<.,.>_v$ sur $\mathrm{Lie}\, G$, fonctions C^∞ de v , ainsi qu'une métrique riemannienne $<.,.>$ sur TV .

On déduit de ces métriques des densités $\lambda(v)$, $H(v)$ et $\mu(v)$ par les formules :

$$(1.2.4) \quad \lambda(v)\,(x_1,\dots,x_m) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\,[\det(<x_i,x_j>_v)_{1\le i,j\le m}]^{1/2} \qquad (m = \dim E)$$

$$(1.2.5) \quad H(v)\,(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_g) = (2\pi)^{-\frac{g}{2}}\,[\det(<\varepsilon_i,\varepsilon_j>_v)_{1\le i,j\le g}]^{1/2} \qquad (g = \dim G)$$

$$(1.2.6) \quad \mu(v)\,(V_1,\dots,V_\ell) = (2\pi)^{-\frac{\ell}{2}}\,[\det(<V_i,V_j>)_{1\le i,j\le \ell}]^{1/2} \qquad (\ell = \dim V)$$

Il vient alors (intégrale gaussienne) :

$$(1.2.7) \qquad \int_E e^{-\frac{1}{2}Q(v,x)}\ \lambda_v(x) = (\det T_v)^{-1/2} \ ,$$

où T_v désigne l'endomorphisme de E symétrique relativement à $<.,.>_v$ tel que $Q(v,x) = <T_v x,x>_v$.

Par ailleurs, si l'on choisit une base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ de Lie K_v et une base $(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ de $T_\tau(V/G)$, et si l'on note $\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_n$ les images réciproques des ψ_i dans $\alpha_v(\text{Lie } G)^\perp$ (= ker α_v^*) , alors :

$$I_v(|\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k|^{-1} \otimes \mu(v) \otimes H(v)^{-1})$$

$$= (2\pi)^{\frac{k-n}{2}} [\det{}' \alpha_v^* \alpha_v \,.\, \det(<\tilde{\psi}_i,\tilde{\psi}_j>_v)_{1\le i,j\le n} \,.\, \det(<\varphi_r,\varphi_s>_v)^{-1}_{i\le r,s\le k}]^{1/2} \, |\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n|^{-1} .$$

où det' désigne le déterminant de la restriction à l'orthogonal du noyau.

Par conséquent,

$$\nu(v) = (2\pi)^{\frac{k-n}{2}} (\det S_v)^{-1/2} \left[\int_{K_v} |\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k|^{-1}\right]^{-1}$$

(1.2.8)

$$[\det{}' \alpha_v^* \alpha_v \,.\, \det(<\tilde{\psi}_i,\tilde{\psi}_j>_v) \,.\, \det(<\varphi_r,\varphi_s>_v)^{-1}]^{1/2} \, |\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n|^{-1} .$$

1.3. Rappels sur les surfaces de Riemann compactes

Nous rassemblons dans cette section quelques résultats classiques sur les surfaces de Riemann compactes. Pour plus de détails sur les espaces de modules T_p et M_p , on pourra consulter l'article [10] et ses références.

1.3.1. *Notations et définitions*. Dans toute la suite, M désigne une surface orientée connexe, de genre $p \ge 1$, donnée une fois pour toutes. De plus :

- . Diff^+ désigne le groupe des difféomorphismes de M préservant l'orientation ;
- . Diff_0 désigne le sous-groupe de $\text{Diff}^+(M)$ formé des difféomorphismes homotopes à l'identité ;
- . $W = C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Le groupe Diff^+ agit naturellement (à droite) sur W :

(1.3.1) $$\varphi \cdot f := f^*\varphi = \varphi \circ f \quad , \quad \varphi \in W \, , \, f \in \text{Diff}^+ .$$

Cette action préserve la structure de groupe additif de W , et permet de définir le produit semi-direct $W \rtimes \text{Diff}^+$ et son sous-groupe $G = W \rtimes \text{Diff}_0$.

. *Met* désigne l'espace des métriques riemanniennes C^∞ sur M . Le produit semi-direct $W \rtimes \text{Diff}^+$ – et donc ses sous-groupes W et Diff^+ – agit à droite sur *Met* :

(1.3.2) $$g \,.\, (\varphi,f) := f^*(e^\varphi g) .$$

Par ailleurs, pour toute surface de Riemann X , nous notons ω_X , ou plus simplement ω , le fibré en droites holomorphe des formes de type (1,0) .

Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X , on définit "l'opérateur $\bar\partial$ à coefficients dans E " :

$$\bar\partial_E : C^\infty(M;E) \longrightarrow C^\infty(M;E \otimes \bar\omega)$$

par la formule locale suivante, sur le domaine d'une carte $(\mathcal{U},z)$ où E est trivialisé :

$$\bar{\partial}_E s = \frac{\partial s}{\partial \bar{z}} \otimes d\bar{z} .$$

Si S est une variété $\mathbb{C}$-analytique, et si $\pi : X \longrightarrow S$ est "une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes paramétrée par S ", c'est-à-dire si X est une variété $\mathbb{C}$-analytique et π une application holomorphe submersive et propre[1] de fibres de dimension 1 , nous notons par $T\,X|S$ le sous-fibré tangent holomorphe $T\,X$ formé des vecteurs tangents aux fibres de π . C'est un fibré en droites ; son inverse est le fibré des "formes différentielles holomorphes verticales", que nous notons $\omega_{X|S}$.

1.3.2. Rappelons la relation entre métriques riemanniennes et structures complexes sur M .

Soit g une métrique riemannienne C^∞ sur M . D'après le "théorème des coordonnées isothermes", tout point de M admet un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ sur lequel sont définies des coordonnées locales C^∞ , (x,y) , orientées positivement, et une fonction C^∞ réelle ψ , telle que, sur $\mathcal{U}$:

(1.3.4) $$g = e^\psi (dx \otimes dx + dy \otimes dy) .$$

Les changements de cartes entre les cartes complexes sur M de la forme $(\mathcal{U},x+iy)$ sont holomorphes. Ces cartes définissent donc une structure de courbe holomorphe sur M .

En d'autres termes, toute structure presque-complexe de dimension complexe 1 est intégrable.

Inversement, un raisonnement simple (partition de l'unité...) montre que toute structure complexe sur M , compatible avec son orientation et sa structure C^∞ , provient par cette construction d'une métrique riemannienne C^∞ sur M . De plus, deux telles métriques g et g' définissent la même structure complexe si et seulement s'il existe $\varphi \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ telle que $g' = e^\varphi g$.

Ainsi, l'ensemble des structures complexes sur M , compatibles à son orientation et à sa structure C^∞ , s'identifie au quotient $\mathcal{M}et/\mathcal{W}$.

Dès que M est muni d'une telle structure complexe, on peut définir un produit scalaire L^2 sur $C^\infty(M;\omega_M)$ (resp. $C^\infty(M;\bar{\omega}_M)$) par les formules :

(1.3.5) $$(\omega_1,\omega_2) = \frac{i}{2}\int_M \omega_2 \wedge \bar{\omega}_1$$

$$(\text{resp.} \quad (\omega_1,\omega_2) = \frac{i}{2}\int_M \bar{\omega}_1 \wedge \omega_2).$$

[1] i.e. un morphisme propre et lisse, au sens de la géométrie analytique.

Si g est une métrique riemannienne sur M compatible avec cette structure complexe, et si ∇ , $\|.\|$ et dA désignent le gradient, la norme et l'élément d'aire associés à g , alors, pour toute $f \in C^1(M;\mathbb{R})$:

$$\int_M \|\nabla f\|^2 \, dA = 4\,(\partial f, \partial f) \; , \tag{1.3.6}$$

où ∂ désigne la composante de type $(1,0)$ de l'opérateur d .
Cette égalité établit en particulier la propriété d'invariance de Weyl de l'action de Polyakov.

1.3.3. Dans ce paragraphe, on suppose $p > 1$.

On appelle *surface de Teichmüller* de genre p une surface de Riemann compacte connexe X de genre p muni d'un difféomorphisme préservant l'orientation $\varphi : M \xrightarrow{\sim} X$, donné à homotopie près. L'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Teichmüller s'identifie au quotient $\mathit{Met}/\mathit{W} \rtimes \mathrm{Diff}_0$, et peut être muni d'une structure naturelle de variété $\mathbb{C}$-analytique ; c'est l'*espace de Teichmüller* $\mathcal{T}_p$. Il est isomorphe à un domaine d'holomorphie borné et contractile dans $\mathbb{C}^{3p-3}$.

L'action de Diff^+ sur Met détermine par passage au quotient une action du *groupe modulaire de Teichmüller* $\Gamma_p := \mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_0$ sur $\mathcal{T}_p$. De plus, cette action est holomorphe et propre (Γ_p étant muni de la topologie discrète).

Le quotient $\mathcal{T}_p/\Gamma_p$ s'identifie à $\mathit{Met}/\mathit{W} \rtimes \mathrm{Diff}^+$, donc à l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann compactes connexes de genre p ; c'est l'*espace de modules* des surfaces de Riemann compactes connexes de genre p , noté $\mathcal{M}_p$. Comme quotient de $\mathcal{T}_p$ par l'action propre de Γ_p , c'est un espace $\mathbb{C}$-analytique normal ; c'est en fait une variété quasiprojective complexe.

On peut construire une *courbe de Teichmüller universelle*, c'est-à-dire une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes :

$$\pi : \mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{T}_p$$

et un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{T}_p \times S \longrightarrow \mathcal{C}_p$ tels que :

i) le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_p \times S \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \mathcal{C}_p \arrow[dl, "\pi"] \\
& \mathcal{T}_p \; ; &
\end{tikzcd}$$

(ceci implique que, pour tout $s \in \mathcal{T}_p$, $\pi^{-1}(s)$ est une surface de Riemann compacte connexe de genre p .)

ii) pour tout $s \in \mathcal{T}_p$, $\pi^{-1}(s)$ muni du difféomorphisme $\Phi(s,.) : S \longrightarrow \pi^{-1}(s)$ est une surface de Teichmüller dont s est la classe d'isomorphisme.

Le groupe Γ_p agit sur $\mathcal{C}_p$, et fait de π une application Γ_p-équivariante. On dispose de la suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes :

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p) \hookrightarrow T\,\mathcal{C}_p \xrightarrow{T\pi} \pi^* T\,\mathcal{T}_p \longrightarrow 0 \ .$$

Par image directe par π , on déduit de cette suite exacte un morphisme de faisceaux :

$$R^0\pi_*\pi^* T\,\mathcal{T}_p \longrightarrow R^1\pi_* T\,(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p) \ .$$

Le faisceau $R^0\pi_*\pi^* T\,\mathcal{T}_p$ s'identifie au faisceau des sections de $T\mathcal{T}_p$, et le faisceau $R^1\pi_* T\,(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p)$ est localement libre, de fibre en s l'espace de cohomologie $H^1(\pi^{-1}(s)\ , T\,\pi^{-1}(s))$.

L'*application de Kodaira - Spencer* ainsi définie

(1.3.7) $$KS : T\mathcal{T}_p \longrightarrow R^1\pi_* T\,(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p)$$

(1.3.8) $$KS_s : T_s\,\mathcal{T}_p \longrightarrow H^1(\pi^{-1}(s)\ , T\,\pi^{-1}(s))$$

est un isomorphisme. Elle définit, par transposition et dualité de Serre, un isomorphisme

(1.3.9) $$KS'_s : T^*_s\mathcal{T}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\pi^{-1}(s)\ , \omega^{\otimes 2}) \ .$$

1.3.4. Dans la troisième partie, nous ferons appel aux résultats suivants.

Soit $(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$ une base canonique de $H_1(M;\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une base dans laquelle la forme d'intersection $(.,.)$ s'écrive

$$(a_i,a_j) = 0 \ ; \ (b_i,b_j) = 0 \ ; \ (a_i,b_j) = \delta_{ij} \ .$$

Au moyen de cette base, on peut identifier $H_1(M;\mathbb{Z})$ avec $\mathbb{Z}^{2p}$. L'action de Diff^+ sur $H_1(M;\mathbb{Z})$ est triviale restreinte à Diff_0 et définit un morphisme de groupes $\Gamma_p \longrightarrow Sp(2p;\mathbb{Z})$. Comme $Sp(2p;\mathbb{Z})$ agit sur le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_p$ (i.e. l'ensemble des matrices complexes $g \times g$ symétriques, de partie imaginaire strictement positive), on en déduit une action de Γ_p sur $\mathcal{H}_p$.

Pour tout s , $\Phi(s,.)_*$ transforme la base $(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$ en une base canonique $(a_1(s),\dots,a_p(s)\ ,b_1(s),\dots,b_p(s))$ de $H_1(\pi^{-1}(s),\mathbb{Z})$. Il existe une unique base $(\omega_1(s),\dots,\omega_p(s))$ de $H^0(\pi^{-1}(s),\omega_{\pi^{-1}(s)})$ telle que $\int_{a_i(s)} \omega_j(s) = \delta_{ij}$. L'application $s \longmapsto (\omega_1(s),\dots,\omega_p(s))$ est un repère holomorphe du fibré vectoriel $R^0\pi_*\,\omega_{\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p}$. On définit une application holomorphe $\Omega : \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{H}_p$, dite *application des périodes*, en posant

$$\Omega = (\Omega_{k\ell})_{1\le k,\ell\le p} \ ; \ \Omega_{k,\ell}(s) = \int_{b_k(s)} \omega_\ell(s) \ .$$

L'application des périodes est équivariante par rapport aux actions de Γ_p sur $\mathcal{T}_p$ et sur $\mathcal{H}_p$. De plus, on a la relation bilinéaire de Riemann

(1.3.10) $$\frac{i}{2}\int_{\pi^{-1}(s)} \omega_k(s) \wedge \bar{\omega}_\ell(s) = \mathrm{Im}\ \Omega_{k\ell}(s) \ .$$

Enfin, l'isomorphisme KS'_s transforme $d\Omega_{ij}(s)$ en $\omega_i(s) \otimes \omega_j(s)$.

1.3.5. *Le cas* $p = 1$. Nous ferons aussi usage des notations suivantes, légèrement abusives :

. $\mathcal{T}_1 = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$.

. $\Gamma_1 = PSL(2;\mathbb{Z})$, agissant sur $\mathcal{T}_1$ par homographie.

L'espace $\mathcal{T}_1$ s'identifie au quotient $\mathcal{Met}/\mathcal{W} \times \mathrm{Diff}_1$, où Diff_1 est le groupe des difféomorphismes de M induisant $\pm \mathrm{Id}$ sur $\pi_1(M)$ (Diff_1 contient Diff_0 comme sous-groupe d'indice 2) et Γ_1 s'identifie à $\mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_1$.

Le quotient $\mathcal{T}_1/\Gamma_1$ s'identifie à l'espace des modules $\mathcal{M}_1$ des surfaces de Riemann compactes connexes de genre 1 (courbes elliptiques). On dispose sur Γ_1 d'une "courbe elliptique universelle" :

$$\pi : \mathcal{C}_1 = (\mathcal{T}_1 \times \mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathcal{T}_1$$

$$[(\tau,z)] \longmapsto \tau$$

où $\sim$ identifie (τ,z) et $(\tau,z+m+n)$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

L'application de Kodaira-Spencer associée à π est un isomorphisme ; l'isomorphisme $KS'_\tau : T^*_\tau \mathcal{T}_1 \xrightarrow{\sim} H^0(\pi^{-1}(\tau),\omega^2) = H^0(\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z};\omega^2)$ qui s'en déduit envoie $d\tau$ sur $dz^{\otimes 2}$.

Dans la suite, nous posons : $\mathrm{Diff} = \mathrm{Diff}_0$ si $p > 1$; $\mathrm{Diff} = \mathrm{Diff}_1$ si $p = 1$.

1.3.6. Nous décrivons dans ce paragraphe la relation entre les descriptions de l'espace tangent à l'espace de Teichmüller obtenues d'une part au moyen de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer, d'autre part au moyen de l'identification de cet espace avec $\mathcal{Met}/\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$.

Donnons-nous une métrique riemannienne g , C^∞ , sur M . Cette métrique définit une structure holomorphe sur M (*cf.* § 1.3.2). Nous noterons X la courbe holomorphe ainsi construite. L'application identique $M \longrightarrow X$ définit une surface de Teichmüller de genre p ; nous noterons s sa classe dans $\mathcal{T}_p$.

Soit N_g le sous-fibré vectoriel de $S^2 T^*_{\mathbb{R}} M$ (fibré des formes quadratiques sur $T_{\mathbb{R}} M$) dont la fibre en $x \in M$ est l'espace des formes quadratiques de trace nulle relativement à g_x . Ce sous-fibré ne dépend que de la structure complexe de X , de même que le sous-fibré C_g de $S^2 T^*_{\mathbb{R}} M$ engendré par sa section partout non nulle g . De plus :

$$S^2 T^*_{\mathbb{R}} M = C_g \oplus N_g . \tag{1.3.11}$$

On dispose des isomorphismes suivants de fibrés vectoriels réels sur M ($z = x+iy$ désigne une coordonnée holomorphe locale ; $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$) :

$$\mathrm{Re} : T_{\mathbb{C}} X \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{R}} M , \ \mathrm{Re}(\alpha \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{1}{2} (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}) ;$$

$$\mathrm{Re} : \bar{\omega}_X^2 \xrightarrow{\sim} N \ , \ \mathrm{Re}(a\, d\bar{z}^2) = \alpha(dx \otimes dx - dy \otimes dy) + \beta(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \ .$$

La métrique g sur $T_{\mathbb{R}}M$ devient, par l'isomorphisme $\mathrm{Re} : T_{\mathbb{C}}X \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{R}}M$, une métrique hermitienne sur TX, et détermine donc un isomorphisme $T_{\mathbb{C}}X \simeq \overline{T_{\mathbb{C}}X^*} = \bar{\omega}$, puis, par produit tensoriel, un isomorphisme de fibrés en droites complexes

$$I : T_{\mathbb{C}}X \otimes \bar{\omega} \xrightarrow{\sim} \bar{\omega}^2 \ .$$

Plus explicitement, si $z = x+iy$ est une coordonnée locale telle que g admette l'expression (1.3.4), alors

$$I\left(a \frac{\partial}{\partial z} \otimes d\bar{z}\right) = \frac{1}{4} e^{\psi} a\, d\bar{z}^2 \ .$$

Désignons par p la projection sur la deuxième composante de la décomposition en somme directe $C^\infty(M;S^2 T^*_{\mathbb{R}}M) = C^\infty(M;C_g) \oplus C^\infty(M;N_g)$ déduite de (1.3.11). puis posons :

$$P_g : C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M) \longrightarrow C^\infty(M;S^2 T^*_{\mathbb{R}}M)$$
$$\xi \longmapsto p(L_\xi g) \ ,$$

où l'on désigne par L la dérivée de Lie. Nous écrivons désormais TX pour $T_{\mathbb{C}}X$. On vérifie, par un calcul local très simple, que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M;TX) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{TX}} & C^\infty(M;TX \otimes \bar{\omega}) \\ \downarrow \mathrm{Re} & & \downarrow 4\, \mathrm{Re} \circ I \\ C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M) & \xrightarrow{P_g} & C^\infty(M;N) \ . \end{array}$$

L'espace $\mathcal{Met}$ est une variété fréchétique - c'est en fait un ouvert de $C^\infty(M;S^2 T^*_{\mathbb{R}}M)$ - et l'application canonique

$$\Pi : \mathcal{Met} \longrightarrow \mathcal{Met}/\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff} \simeq \mathcal{T}_p$$

est différentiable, en un sens convenable... . L'espace tangent à $\mathcal{Met}$ en g, $T_g\,\mathcal{Met}$, s'identifie à $C^\infty(M;S^2 T^*_{\mathbb{R}}M)$. L'application tangente $T_g\Pi$ est nulle sur $C^\infty(M;C_g)$. De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X;TX \otimes \bar{\omega}) & \longrightarrow & H^1(X;T) \\ \downarrow 2\, \mathrm{Re} \circ I & & \downarrow KS_s \\ T_g\,\mathcal{Met} \simeq C^\infty(M,N) & \xrightarrow{T_g \pi} & T_s\,\mathcal{T}_p \end{array}$$

où le morphisme de la première ligne est le composé de l'application canonique de $C^\infty(X;TX \otimes \bar{\omega})$ sur $C^\infty(X;TX \otimes \bar{\omega}) / \bar{\partial}\, C^\infty(X;TX)$ et de l'isomorphisme de Dolbeault.

Les algèbres de Lie des groupes de Lie fréchétiques Diff, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$ s'identifient, respectivement, à $C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M)$, $C^\infty(M;\mathbb{R})$ et $C^\infty(M;\mathbb{R}) \oplus C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M)$.

L'action de $\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$ sur $\mathcal{Met}$ est différentiable. Nous noterons A_g la différentielle en l'élément neutre de l'application $\gamma \longmapsto g.\gamma$ de $\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$ dans $\mathcal{Met}$.

Le stabilisateur K de g dans $\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$ s'identifie, au moyen de l'application canonique $\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff} \longrightarrow \mathrm{Diff}$, au groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des difféomorphismes holomorphes de X dans Diff . Ce groupe est en fait trivial, ainsi que $H^0(X;TX)$, si $p > 1$; c'est une extension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un tore complexe isomorphe à X si $p = 1$.

Au moyen des résultats qui précèdent, on vérifie facilement la commutativité du diagramme suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X;TX) \arrow[r, hook] \arrow[d, no head, "\wr"'] & C^\infty(X;TX) \arrow[r, "\bar\partial_{TX}"] \arrow[d, "\frac{1}{2}\mathrm{Re}", "\wr"'] & C^\infty(X;TX\otimes\bar\omega) \arrow[r] \arrow[d, "2\,\mathrm{Re}\circ I", "\wr"'] & H^1(X;TX) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, no head, "\wr"'] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff} \arrow[r, "P_g"] & C^\infty(M,N) \arrow[r, "T_g\Pi"] & T_s\mathcal{T}_p \arrow[r] \arrow[u, "KS_s", "\wr"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,K \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathcal{W}\oplus\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff} \arrow[r, "A_g"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, no head, "\wr"'] & T_g\mathcal{Met} \arrow[r, "T_g\Pi"] \arrow[u, "p"'] & T_s\mathcal{T}_p \arrow[r] & 0. \\
 & & \mathrm{Lie}(\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}) & & &
\end{tikzcd}$$

(1.3.12)

1.4. Dans ce paragraphe, nous appliquons *formellement* la construction du § 1.2 au problème, en dimension infinie, décrit à la fin du § 1.1.

1.4.1. Faisons $V = \mathcal{Met}$ et $G = \mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff}$. Prenons pour E le quotient de l'espace $C^\infty(M;\mathbb{R}^D)$ par l'action des translations de $\mathbb{R}^D$: $E = C^\infty(M;\mathbb{R}^D)/\mathbb{R}^D$.
Le groupe G admet une action sur V , donnée par la formule (1.3.2), et une action sur E , déduite de l'action de Diff sur $C^\infty(M;\mathbb{R}^D)$ par composition. Le quotient V/G s'identifie à l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_p$.

On peut définir une métrique riemannienne naturelle sur $\mathcal{Met}$, en munissant l'espace tangent $T_g\mathcal{Met} \simeq C^\infty(M;TM)$ du produit scalaire L^2 donné par la formule

$$(T_1,T_2) = \frac{1}{2}\int_M G(t)\,(T_1(t),T_2(t))\;dA(t) \;,$$

où dA désigne l'élément d'aire sur M associé à g , et $G(t)$ le produit scalaire sur $\otimes^2 T_t^* M$ déduit du produit scalaire $g(t)$ sur T_tM ; plus explicitement :

$$G(t)\,(u\otimes v,u'\otimes v') = g'(t)\,(u,u')\,.\,g'(t)\,(v,v') \;,$$

où $g'(t)$ est le produit scalaire sur T_t^*M déduit par dualité du produit scalaire $g(t)$ sur T_tM. On prendra pour μ la densité > 0 sur $\mathcal{Met}$ associée à cette métrique riemannienne (cf. (1.2.6)).

De plus, tout $g \in \mathcal{Met}$ détermine des produits scalaires L^2 naturels sur $\mathrm{Lie}\,\mathcal{W} = C^\infty(M,\mathbb{R})$, Lie Diff $= C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M)$ et $C^\infty(M;\mathbb{R}^D)$, définis par les formules :

$$(\varphi,\psi)_g = \int_M \varphi(t)\,.\,\psi(t)\,dA(t) \qquad \varphi,\psi \in C^\infty(M;\mathbb{R})\ ;$$

$$(V,W)_g = \int_M g(t)\,(V(t),W(t))\,dA(t) \qquad V,W \in C^\infty(M;T_{\mathbb{R}}M)\ ;$$

$$(x,y)_g = \int_M \left[\sum_{i=1}^{D} x_i(t)\ y_i(t)\right] dA(t) \quad x,y \in C^\infty(M;\mathbb{R}^D)\ .$$

Nous noterons $\|\,.\,\|_g$ les normes associées aux produits scalaires $(.,.)_g$.

Les métriques $(.,.)_g$ sur $\mathrm{Lie}\,\mathcal{W}$ et Lie Diff fournissent par somme directe une métrique sur $\mathrm{Lie}\,G = \mathrm{Lie}\,\mathcal{W} \oplus \mathrm{Lie\,Diff}$, et donc une densité $H(g)$ sur Lie G (cf. (1.2.5)).

La métrique $(.,.)_g$ sur $C^\infty(M;\mathbb{R}^D)$ définit une densité $\lambda_{o,g}$ sur $C^\infty(M;\mathbb{R}^D)$, par une formule analogue à la formule (1.2.4). Munissons le groupe $\mathbb{R}^D$ de la mesure de Lebesgue L . Les mesures $\lambda_{o,g}$ et L déterminent une "mesure transverse" $\lambda_g = \lambda_{o,g}/L$ sur le quotient $E = C^\infty(M,\mathbb{R}^D)/\mathbb{R}^D$. Si l'on identifie E à l'orthogonal de $\mathbb{R}^D$, sous-espace des applications constantes, dans $C^\infty(M,\mathbb{R}^D)$, et si λ'_g est la densité sur E déduite du produit scalaire $(.,.)_g$ restreint à cet orthogonal, on a alors la relation suivante :

$$\lambda_g = (2\pi)^{D/2}\ \|1\|_g^D\ \lambda'_g\ .$$

Bien évidemment, $\|1\|_g^2$ n'est autre que l'aire de M muni de g .

Enfin, on pose (cf. (1.1.1)) :

$$Q(g,[x]) = 2S(g,x) = \sum_{i=1}^{D} \int_M \|\nabla x_i\|^2\,dA\ .$$

On peut établir que l'action de K_g sur E laisse invariante la densité λ_g (cf. [36], Appendice). Cela montre que la condition ii) du § 1.2.2 est satisfaite. Il en va de même de la condition i), d'après l'invariance de l'action S par reparamétrisation et transformation de Weyl.

1.4.2. L'opérateur T_g s'exprime simplement au moyen du laplacien positif Δ_g associé à g :

$$T_g([x]) = (\Delta_g x_1,\ldots,\Delta_g x_D)\ .$$

Il vient alors, en désignant par $\det'\Delta$ le déterminant du laplacien restreint à l'orthogonal des fonctions constantes :

$$\int_E e^{-\frac{1}{2}Q(g,x)}\ \lambda_g(x) = (2\pi)^{D/2}\ \|1\|_g^D \int_E e^{-\frac{1}{2}(x,T_V,x)}\ \lambda'_g(x)$$

$$(1.4.1) \qquad = (2\pi)^{D/2}\ \|1\|_g^D\ (\det{}'\Delta)^{-D/2}\ .$$

Cette égalité tient lieu de l'égalité (1.2.7).

Soient $(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ une base de $\mathrm{Lie}\, K_v$, $(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ une base de $T_{\mathbb{R},s}\, T_p$, et $(\widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_n)$ les images réciproques (par $T_g\Pi$) des ψ_i dans $\ker A_g^*$. Compte tenu de (1.4.1), la formule (1.2.8) devient :

$$\nu(g) = (2\pi)^{3p-3+\frac{D}{2}} \left[\frac{\det{}'\Delta_g}{\|1\|_g^2}\right]^{-D/2} \left[\int_{K_g} |\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k|^{-1}\right]$$

$$\left[\det{}' A_g^* A_g \cdot \frac{\det((\widetilde{\psi}_i,\widetilde{\psi}_j)_g)}{\det((\varphi_r,\varphi_s)_g)}\right]^{1/2} |\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n|^{-1} . \tag{1.4.2}$$

De plus, si l'on munit Lie Diff , $\mathrm{Lie}\, W \oplus \mathrm{Lie\, Diff}$, $T_g\, Met$ et son sous-espace $C^\infty(M,N)$ des produits scalaires $(.,.)_g$, il vient, avec les notations du diagramme (1.3.12) :

$$pr_2^*\, pr_2 = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad p^*\, p = \mathrm{Id} ,$$

tandis que A_g restreinte à $\mathrm{Lie}\, W = \ker pr_2$ est une isométrie. Il en découle, d'une part que $\widetilde{\psi}_i$ est l'image réciproque (par $T_g\Pi_{|C^\infty(M,N)}$) de ψ_i dans $\ker P_g^*$, et, d'autre part, l'égalité :

$$\det{}' P_g^* P_g = \det{}' A_g^* A_g . \tag{1.4.3}$$

Ainsi, la mesure ν descend sur T_p - et l'on peut quantifier la théorie des cordes à la Polyakov - si et seulement si, pour tout g , l'expression suivante ne dépend que de l'image de g dans T_p :

$$\left[\frac{\det{}'\Delta_g}{\|1\|_g^2}\right]^{-D} \left[\det{}' P_g^* P_g \cdot \frac{\det((\widetilde{\psi}_i,\widetilde{\psi}_j)_g)}{\det((\varphi_r,\varphi_s)_g)}\right] . \tag{1.4.4}$$

Comme toute la construction précédente est équivariante sous l'action de Diff_+ , cela a lieu si et seulement si cette expression ne dépend que de l'orbite de g sous l'action de W , et dans ce cas, la densité que l'on en déduit sur T_p - la mesure de Polyakov - est invariante sous l'action de Γ_p (*cf.* § 1.2.4).

Pour donner une signification rigoureuse aux intégrales fonctionnelles ou, ce qui revient au même, aux déterminants d'opérateurs dans l'expression (1.4.4), nous allons faire usage de la "régularisation-zêta" (*cf.* [45], [28]). (D'un point de vue physique, cette méthode fait disparaître des "termes infinis", qui peuvent en fait être compensés par des contretermes locaux sur M ; *cf.* [1] et (1.5.4).) On verra alors que, avec cette interprétation rigoureuse de (1.4.4), la condition d'invariance sous l'action de W est réalisée si et seulement si D est la dimension critique 26 .

1.5. Déterminants régularisés

1.5.1. Soit M une variété C^∞ compacte, de dimension d, munie d'une métrique riemannienne g, et soit E un fibré vectoriel sur M, C^∞, de rang fini, muni d'une métrique $\langle .,. \rangle$. Au moyen de ces métriques, on peut définir le produit scalaire de deux sections sur M de E, s_1 et s_2, par la formule :

$$(s_1,s_2) = \int_M \langle s_1(x),s_2(x)\rangle \, \mu(x) \;,$$

où $\mu(x)$ désigne l'élément de volume sur M défini par la métrique riemannienne g. Grâce à ce produit scalaire, on peut construire l'espace de Hilbert $L^2(M;E)$ des sections L^2 de E sur M.

Soit P un opérateur différentiel elliptique d'ordre p (> 0), agissant sur les sections C^∞ de E sur M. Supposons P positif, c'est-à-dire que, pour toute section s, C^∞, de E sur M :

$$(s,Ps) \geq 0 \;.$$

En tant qu'opérateur non borné sur $L^2(M,E)$, de domaine l'espace $C^\infty(M;E)$ des sections C^∞ de M sur E, P est essentiellement autoadjoint. Le spectre de sa fermeture est un ensemble fermé discret de réels positifs, chacun de multiplicité fini. On notera $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de P, en ordre croissant, répétées suivant leur multiplicité.

1.5.2. Il est possible de définir le *déterminant régularisé* de P restreint à $(\ker P)^\perp$, $\det{}'P$, par le procédé suivant, connu sous le nom de *régularisation zêta* (Ray - Singer [45]).

On remarque que, formellement :

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{\lambda_n\neq 0} \lambda_n^{-s}\right)\Big|_{s=0} = -\sum_{\lambda_n\neq 0} \log \lambda_n \;.$$

Or, la série de Dirichlet

$$\zeta_P(s) = \sum_{\lambda_n\neq 0} \lambda_n^{-s}$$

est convergente si $\operatorname{Re} s > \frac{d}{p}$, définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe en 0 (Seeley [46], [24]). En fait on peut calculer ζ_P à partir de $\vartheta_P(t) := \operatorname{trace} e^{-tP}$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) par transformation de Mellin :

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} [\vartheta_P(t) - \dim\ker P]\, t^{s-1}\, dt \;, \tag{1.5.1}$$

tandis que $[\vartheta_P(t) - \dim\ker P]$ décroît exponentiellement lorsque t tend vers $+\infty$, et admet un développement asymptotique au voisinage de 0 :

$$\vartheta_P(t) \sim \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \, t^{\frac{i-d}{p}} \qquad (t \longrightarrow 0_+) \;. \tag{1.5.2}$$

Cela conduit à définir $\det'P$ par l'égalité :

$$\det'P = \exp\left[-\zeta'_P(0)\right] .$$

1.5.3. *Exemple* 1. Si M est le cercle de circonférence ℓ, $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$, et P le laplacien scalaire sur M, $-\frac{d^2}{dx^2}$, alors le spectre de P est formé de 0 (valeur propre simple) et des $\left(\frac{2\pi n}{\ell}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ (valeurs propres doubles). Par conséquent :

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2\pi n}{\ell}\right)^{-2s} = 2\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^{2s} \zeta(2s) ,$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann. Comme :

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) ,$$

on obtient

$$\det'\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) = \ell^2 .$$

Si l'on fait dans cette formule $\ell = 2\pi$, on voit que la régularisation zêta donne la valeur $\sqrt{2\pi}$ au produit divergent $\infty! = 1.2.3.4\ldots$.

Exemple 2. Lorsque M est un tore de dimension 2, muni d'une métrique riemannienne plate, et que P est le laplacien scalaire sur M, alors ζ_P est une fonction zêta d'Epstein, dont la dérivée en 0 est donnée par la "première formule limite de Kronecker" (voir, par exemple, [47], p. 73-75). On trouve, si M est isométrique au quotient $\mathbb{C}/\omega\mathbb{Z} + \omega\tau\mathbb{Z}$, où $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}$ est muni de la métrique usuelle, $\omega,\tau \in \mathbb{C}^*$ et $\operatorname{Im}\tau > 0$:

$$\det'P = A \operatorname{Im}\tau \,|\eta(\tau)|^4 \tag{1.5.3}$$

où $A = |\omega| \operatorname{Im}\tau$ désigne l'aire de M, et η, la fonction de Dedekind :

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n\tau}) .$$

1.5.4. La fonction $\vartheta_P(t)$ se calcule en intégrant sur la diagonale de $X \times X$ la trace du noyau $p_t(x,y)$ de e^{-tP}. Lorsque t tend vers 0 (dans $\mathbb{R}_+^*$), $p_t(x,x)$ admet un développement asymptotique

$$p_t(x,x) \sim \sum_{i\in\mathbb{N}} t^{\frac{i-d}{p}} e_i(x) ,$$

où les e_n sont C^∞ et se calculent par des formules locales universelles à partir du symbole complet de P et des métriques sur M et E.

Soient, par exemple, M une surface de Riemann compacte et E un fibré vectoriel holomorphe sur M, de rang r. Munissons $T_{\mathbb{C}}M$, le fibré tangent holomorphe de M, et E de métriques hermitiennes $\|.\|$ et $\|.\|'$. La métrique $\|.\|$ détermine une métrique riemannienne sur M, et une métrique hermitienne sur le fibré $\bar{\omega}$ des formes de type $(0,1)$ sur M . Considérons l'opérateur " $\bar{\partial}$ à coefficients dans E " :

$$\bar{\partial}_E : C^\infty(M;E) \longrightarrow C^\infty(M;E\otimes\bar{\omega}) \ .$$

Grâce aux métriques $\|.\|$ et $\|.\|'$, on peut définir des produits scalaires L^2 , $(.,.)$, sur $C^\infty(M,E)$ et $C^\infty(M,E\otimes\bar{\omega})$, puis un adjoint formel :

$$\bar{\partial}^*_E : C^\infty(M;E\otimes\bar{\omega}) \longrightarrow C^\infty(M;E) \ ,$$

caractérisé par :

$$(\bar{\partial}^*_E\, s,t) = (s,\bar{\partial}_E t) \ .$$

Le produit $P = \bar{\partial}^*_E\,\bar{\partial}_E$ est un opérateur elliptique positif du second ordre. La trace sur la diagonale du noyau p_t de e^{-tP} admet comme développement lorsque $t \longrightarrow 0_+$ (cf. [24], § 4.8) :

$$\text{(1.5.4)} \qquad \operatorname{trace} p_t(x,x) = \frac{r}{\pi t} A + \frac{r}{6} c_1(T_{\mathbb{C}}M;\|.\|) + \frac{1}{2} c_1(E;\|.\|') + 0(t) \ ,$$

où A désigne l'élément d'aire sur M associé à sa métrique riemannienne, et $c_1(.,.)$ la première "forme de Chern" d'un fibré vectoriel hermitien (cf. § 2.4).

1.5.5. Il vient de plus, pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\text{(1.5.5)} \qquad \det{}'(\lambda P) = \lambda^{\zeta_P(0)} \det{}'(P) \ .$$

Grâce aux formules (1.5.1) et (1.5.3), on obtient l'expression suivante pour $\zeta_P(0)$:

$$\zeta_P(0) = a_d - \dim\ker P \ .$$

Ainsi, lorsque P est l'opérateur $\bar{\partial}^*_E\,\bar{\partial}_E$ considéré au paragraphe précédent, on a :

$$\text{(1.5.6)} \qquad \begin{aligned} \zeta_P(0) &= \frac{r}{6} \langle c_1(TM),[M]\rangle + \frac{1}{2} \langle c_1(E),[M]\rangle - h^0(M;E) \\ &= -\frac{r}{3}(p-1) + \frac{1}{2} d^0(E) - h^0(M,E) \ , \end{aligned}$$

où p désigne le genre de M . En particulier, si E est le fibré trivial ou le fibré $T_{\mathbb{C}}M$, $\zeta_P(0)$ s'exprime en fonction de p .

1.6. <u>L'anomalie conforme et la mesure de Polyakov</u>

Revenons aux notations des § 1.3 et 1.4. Grâce à la régularisation zêta, les déterminants $\det{}'\Delta_g$ et $\det{}'P^*_g P_g$ ont maintenant une signification rigoureuse. Par conséquent, grâce aux formules (1.4.2) et (1.4.3), $\nu(g)$ aussi est un élément bien défini, > 0 , de $|\Lambda| T^*_v \mathcal{T}_p$.

1.6.1. D'après la formule (1.3.6), on voit que

$$\text{(1.6.1)} \qquad \det{}'\Delta_g = \det{}'\, 4\, (\bar{\partial}^*\bar{\partial})_g \ .$$

Dans cette égalité, Δ_g agit sur les fonctions scalaires réelles, et $\bar{\partial}^*\bar{\partial}$ sur les fonctions scalaires complexes. Compte tenu de (1.5.5) et (1.5.6), il vient :

(1.6.2) $$\frac{\det'\Delta_g}{\|1\|_g^2} = C_p \frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g}{\|1\|_g^2} ,$$

où C_p est une constante ne dépendant que de p. (L'indice g accolé à $\bar\partial^*\bar\partial$ rappelle que $\bar\partial^*$ dépend du choix de g, et non seulement de la structure complexe définie par g.)

Comme, dans le diagramme (1.3.8), l'isomorphisme $\frac{1}{2}$ Re multiplie les normes par $\frac{1}{2}$, et l'isomorphisme $2\,\mathrm{Re}\circ I$ par $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on voit que les valeurs propres de $P_g^* P_g$ (qui opère sur un espace de Hilbert réel) sont les valeurs propres de $2\,\bar\partial_{TX}^*\bar\partial_{TX}$ (qui opère sur un espace de Hilbert complexe) avec une multiplicité double.

Ainsi, si $(\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2})$ est une base de l'espace vectoriel complexe $H^0(X;T_{\mathbb{C}}X)$, $(\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2})$ une base de l'espace vectoriel complexe $H^1(X;TX)$, et si $(\widetilde\Psi_1,\dots,\widetilde\Psi_{r/2})$ sont les images réciproques des Ψ_i dans $C^\infty(X;TX\otimes\bar\omega)$, orthogonales à l'image de $\bar\partial_{TX}$, et si l'on pose :

$$(\varphi_1,\dots,\varphi_k) = (\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2},i\Phi\ ,\dots,i\Phi_{k/2})$$

et

$$(\psi_1,\dots,\psi_r) = (\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2},i\Psi_1,\dots,i\Psi_{r/2}) ,$$

il vient alors, compte tenu de (1.5.5) et (1.5.6) :

(1.6.3) $$\det' P_g^* P_g \frac{\det((\widetilde\psi_i,\widetilde\psi_j)_g)}{\det((\varphi_r,\varphi_s)_g)} = C'_p[D(g\,;\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2}\,;\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2})]^2$$

où

(1.6.4) $$D(g\,;\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2}\,;\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2}) = \det'(\bar\partial_{TX}^*\,\bar\partial_{TX})_g \frac{\det((\widetilde\Psi_i,\widetilde\Psi_j)_g)}{\det((\Phi_r,\Phi_s)_g)}$$

et où C'_p est une constante ne dépendant que de p.

1.6.2. *Les formules d'anomalies conformes*

Soient $\rho\in C^\infty(M;\mathbb{R})$ et $g' = e^\rho g$. Soit R la 2-forme de courbure de $T_{\mathbb{C}}X$ muni de la métrique g. Si $z = x+iy$ est une coordonnée locale holomorphe sur X, et si $g = e^\psi(dx\otimes dx + dy\otimes dy)$, alors $R = \bar\partial\partial\psi$ (*cf.* (2.4.1)).

La variation des expressions (1.6.2) et (1.6.3) lorsque la métrique g' est substituée à la métrique g est donnée par les formules suivantes, dites *formules d'anomalies conformes* (*cf.* [42], [1], [21] et § 2.6) :

(1.6.5) $$\frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_{g'}}{\|1\|_{g'}^2} = e^{L(g,\rho)} \frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g}{\|1\|_g^2}$$

(1.6.6) $$D(g';\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2};\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2}) = e^{13L(g,\rho)}\, D(g;\Phi_1,\dots,\Phi_{k/2};\Psi_1,\dots,\Psi_{r/2}) .$$

où

(1.6.7) $$L(g,\rho) = \frac{1}{24\pi i}\int_M [\partial\rho\wedge\bar\partial\rho + 2\rho R] .$$

1.6.3. Il découle des formules (1.6.5) et (1.6.6) que l'expression (1.4.4) est multipliée par $\exp[(13-\frac{D}{2})L(g,\rho)]$ lorsque g est remplacée par g'.

Ainsi, $\nu(g)$ *ne dépend que de l'orbite de* g *sous l'action de* $\mathcal{W}$ *si et seulement si* $D = 26$. Et l'on voit facilement que, *alors*, $\nu(g)$ *ne dépend que de* $\Pi(g) \in T_p$ *et définit une section de* $|\Lambda|(T_{\mathbb{R}}\, T_p)$ *strictement positive*, C^∞ *et invariante sous l'action de* Γ_p (*cf.* § 1.4.2 et théorème 2.1).

Cette section définit une mesure sur T_p, *la mesure de Polyakov*, que nous noterons μ_p. Comme μ_p est invariante sous Γ_p, on peut l'identifier à une mesure sur M_p.

1.6.4. *La mesure de Polyakov sur* T_1

Au moyen des résultats du § 1.3.5 et des formules (1.5.3), (1.5.5) et (1.5.6), on obtient aisément l'expression suivante pour la mesure de Polyakov sur T_1 (*cf.* [41]) :

$$\mu_p = \frac{1}{2(2\pi)^{13}} (\mathrm{Im}\ \tau)^{-12}\ |\eta(\tau)|^{-48}\ \frac{i}{2}\frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\ \tau)^2} \tag{1.6.8}$$

Le membre de droite dans cette égalité est bien invariant sous l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$, puisque η est $\mathbb{Z}$-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle $\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau)$.

1.6.5. *La mesure de Polyakov sur* T_p, $p > 1$

Lorsque $p > 1$, K_g et $H^0(X;TX)$ sont triviaux, et $\frac{r}{2} = 3p-3$. La densité de Polyakov en un point de T_p représenté par une métrique g, possède donc l'expression suivante, avec les notations du § 1.6.1 :

$$C''_p\left[\frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g}{\|1\|_g^2}\right]^{-13} \det(\partial^*_{TX}\ \bar\partial_{TX})_g\ \det((\widetilde{\Psi}_i,\widetilde{\Psi}_j)_g)\ |\Psi_1\wedge\ldots\wedge\Psi_{3p-3}\wedge i\Psi_1\wedge\ldots\wedge i\Psi_{3p-3}|^{-1} \tag{1.6.9}$$

après identification de $H^1(X;TX)$ et $T_s T_p$, par KS_s.

D'après la théorie de l'uniformisation, toute surface de Riemann compacte connexe de genre $p > 1$ admet une unique métrique de courbure scalaire -1. Lorsque la métrique g satisfait à cette condition, l'expression précédente devient :

$$C'''_p\ [\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g]^{-13}\ \det'(\bar\partial^*_{TX}\ \bar\partial_{TX})_g\ d\mathcal{WP}, \tag{1.6.10}$$

où $d\mathcal{WP}$ désigne la mesure de Weil-Peterson sur T_p (*cf.* [10]).

Les déterminants régularisés figurant dans (1.6.10) peuvent s'exprimer en termes des valeurs en des points entiers de la fonction zêta de Selberg d'un groupe fuchsien $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $X \simeq \{z \in \mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}/\Gamma$, et de sa dérivée. Ces expressions permettent d'étudier le comportement asymptotique de μ_p "à l'infini sur M_p" (*cf.* [23], [20], [5], [16], [48]).

2. FIBRÉS DÉTERMINANTS ET DÉTERMINANTS RÉGULARISÉS

2.1. Fibré déterminant ([44], [12])

Soit P_0 un opérateur différentiel elliptique sur une variété compacte X_0, agissant sur les sections d'un fibré vectoriel E_0, à valeurs dans les sections d'un fibré vectoriel F_0 . L'opérateur P_0 est un opérateur à indice : son noyau et son conoyau sont de dimension finie. On peut donc définir l'espace vectoriel de dimension 1 :

$$\mathrm{DET}\, P_0 = (\Lambda^{d} \ker P_0)^* \otimes (\Lambda^{d'} \operatorname{coker} P_0) \ .$$

$$(d = \dim \ker P_0 \ ;\ d' = \dim \operatorname{coker} P_0) \ .$$

On peut voir $\mathrm{DET}\, P_0$ comme le dual de la "puissance extérieure de degré maximal" de "l'indice" de P_0 , défini comme la différence formelle $\ker P_0 - \operatorname{coker} P_0$.

Soit $\pi : X \longrightarrow S$ une fibration localement triviale C^∞ , à fibres compactes, soient E et F des fibrés vectoriels C^∞ sur X , et soit $P = (P_s)_{s\in S}$ une famille C^∞ d'opérateurs elliptiques sur les fibrés de π :

$$P_s : C^\infty(\pi^{-1}(s), E) \longrightarrow C^\infty(\pi^{-1}(s), F) \ .$$

La famille d'espaces vectoriels $(\mathrm{DET}\ P_s)_{s\in S}$ admet une structure naturelle de fibré en droites C^∞ . Nous noterons $\mathrm{DET}\ P$ ce fibré en droites sur S , que l'on appelle *fibré déterminant* de la famille P .

2.2. Fibré déterminant de l'opérateur $\bar\partial$ sur une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes

Dans cet exposé, nous nous intéressons au cas particulier suivant de famille d'opérateurs elliptiques : la fibration $\pi : X \longrightarrow S$ est une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes (*cf.* § 1.3.1) ; E est un fibré vectoriel holomorphe sur X , et $F = E \otimes \bar\omega_{X|S}$; P est la famille des opérateurs $\bar\partial_{E,s} : C^\infty(\pi^{-1}(s);E) \longrightarrow C^\infty(\pi^{-1}(s);E \otimes \bar\omega_{X|S})$. Nous noterons $\bar\partial_E$ cette famille d'opérateurs.

Dans cette situation, le fibré déterminant $\mathrm{DET}\ \bar\partial_E$ admet une structure holomorphe naturelle, compatible avec sa structure C^∞ , que l'on peut caractériser par les propriétés suivantes.

i) *Compatibilité avec le changement de base*. Soient $\pi : X \longrightarrow S$ une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes, E un fibré vectoriel holomorphe sur X , S' une variété $\mathbb{C}$-analytique, et $f : S' \longrightarrow S$ une application holomorphe. Posons

$$X' = X \times_S S' = \{(x,s') \in X \times S' \ \ \pi(x) = f(s')\} \ ;$$

$$\pi' : X' \longrightarrow S' \quad ; \quad \bar f : X' \longrightarrow X$$

$$(x,s') \longmapsto s' \qquad (x,s') \longmapsto x \ .$$

Alors $\pi' : X' \longrightarrow S'$ est une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes. La fibre $\pi'^{-1}(s')$ s'identifie à $\pi^{-1}(f(s'))$, et $\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\bar f^*E,s'}$ à $\mathrm{DET}\ \bar\partial_{E,f(s')}$ Les structures holomorphes sur $\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\bar f^*E}$ et $\mathrm{DET}\ \bar\partial_E$ sont telles que ces isomorphismes déterminent un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes :

$$\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\bar f^* E} \simeq f^*\ \mathrm{DET}\ \bar\partial_E\ .$$

ii) *Compatibilité avec la structure holomorphe des images directes.* Supposons que les dimensions h^0 et h^1 de $\ker \bar\partial_{E,s} \simeq H^0(\pi^{-1}(s),E)$ et $\operatorname{coker} \bar\partial_{E,s} = H^1(\pi^{-1}(s),E)$ ne dépendent pas de $s \in S$. Les faisceaux $R^0\pi_* E$ et $R^1\pi_* E$ sur S sont alors localement libres, et s'identifient aux faisceaux des sections holomorphes de fibrés vectoriels holomorphes sur S, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{E}_1$, dont les fibres en $s \in S$ sont respectivement $H^0(\pi^{-1}(s),E)$ et $H^1(\pi^{-1}(s),E)$. La structure holomorphe sur $\mathrm{DET}\ \bar\partial_E$ est telle que l'isomorphisme de familles d'espaces vectoriels indexées par S

$$\mathrm{DET}\ \bar\partial_E \simeq (\Lambda^{h_0}\mathbf{E}_0)^* \otimes (\Lambda^{h_1}\mathbf{E}_1)$$

soit un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes.

iii) *Compatibilité avec les suites exactes courtes de fibrés.* Soit $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur X. Pour tout $s \in S$, la suite exacte longue de cohomologie associée à cette suite exacte de fibrés vectoriels restreinte à $\pi^{-1}(s)$ détermine un isomorphisme :

$$\mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_2,s} \simeq \mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_1,s} \otimes \mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_3,s}\ .$$

Les structures holomorphes sur $\mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_i}$, $i = 1,2,3$, sont telles que ces isomorphismes déterminent un isomorphisme de fibrés en droites holomorphes

$$\mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_2} \simeq \mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_1} \otimes \mathrm{DET}\ \bar\partial_{E_3}\ .$$

La notion de fibré déterminant a été introduite initialement dans le cadre de la géométrie algébrique ([49], [31]). En particulier, si une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes $\pi : X \longrightarrow S$ est en fait un morphisme propre de variétés algébriques complexes, et si E est un fibré vectoriel algébrique sur X, alors $\mathrm{DET}\ \bar\partial_E$ possède une structure canonique de fibré en droite algébrique, compatible avec sa structure holomorphe. (On prendra garde que les définitions du fibré déterminant des "géomètres" - celle de [49] et [31] - et des "physiciens" - celle employée ici - diffèrent par un "signe" :

$$\det R\pi_* E \simeq (\mathrm{DET}\ \bar\partial_E)^*\ .)$$

La notion de fibré déterminant d'une famille différentiable d'opérateurs elliptiques apparaît plus récemment dans la littérature (en relation notamment avec l'étude des anomalies ; *cf.* [4]).

2.3. La métrique de Quillen

Reprenons les notations du § 2.1.

Supposons les fibres $\pi^{-1}(s)$ munies de métriques riemanniennes, dépendant de s de façon C^∞ (i.e. que le fibré tangent vertical $T\,X|S$ est muni d'une métrique C^∞), et que les fibrés vectoriels E et F sont munis de métriques C^∞.

Alors, pour tout $s \in S$, on dispose de produits scalaires L^2, notés $(.,.)$, sur $C^\infty(\pi^{-1}(s),E)$ et $C^\infty(\pi^{-1}(s),F)$, qui définissent par restrictions des produits scalaires sur $\ker P_s$ et sur $\operatorname{coker} P_s \simeq (\operatorname{im} P_s)^\perp$. Ces produits scalaires déterminent par produits tensoriels, ..., un produit scalaire sur $\mathrm{DET}\, P_s$. Explicitement, la norme $\|.\|_{L^2}$ associée à ce produit scalaire est donné par la formule suivante, où $(v_1,\ldots,v_d)$ et $(w_1,\ldots,w_{d'})$ désignent des bases de $\ker P_s$ et $\operatorname{coker} P_s \simeq (\operatorname{im} P_s)^\perp$:

$$\|(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d)^{-1} \otimes (w_1 \wedge \ldots \wedge w_{d'})\|^2 = \frac{\det((w_i,w_j))_{1\le i,j\le d'}}{\det((v_r,v_s))_{1\le r,s\le d}} .$$

De plus, l'adjoint P_s^* est bien défini.

En général, à cause des "sauts" de la dimension de $\ker P_s$ lorsque s varie, la métrique $\|.\|_{L^2}$ n'est pas une métrique C^∞, ni même continue, sur le fibré $\mathrm{DET}\, P$. Cependant :

THÉORÈME 2.1 (Quillen ; [44], [12]).- *La métrique de Quillen, définie sur* $\mathrm{DET}\, P_s$ *par la formule :*

(2.3.1) $$\|.\|_Q = (\det{}' P_s^* P_s)^{1/2}\, \|.\|_{L^2} ,$$

est une métrique C^∞ *sur* $\mathrm{DET}\, P$.

Dans la formule (2.3.1), $\det'$ désigne le déterminant défini par régularisation zêta (*cf.* § 1.5).

2.4. Soit F un fibré vectoriel holomorphe sur une variété $\mathbb{C}$-analytique. Pour toute métrique hermitienne $\|.\|$ sur F, il existe une unique connexion unitaire ∇ sur F compatible à la structure holomorphe de F (i.e. telle que la composante de type $(0,1)$ de ∇ coïncide avec $\bar\partial_F$). Au moyen de cette connexion et des formules de Chern-Weil pour les classes caractéristiques, on peut associer à $(E;\|\ \|)$ des formes différentielles fermées qui représentent en cohomologie de De Rham ses classes de Chern, son caractère de Chern et son genre de Todd : les "formes de Chern" $c_i(F;\|.\|)$, la "forme caractère de Chern" $\mathrm{Ch}(E;\|.\|)$ et la "forme de Todd" $\mathrm{Td}(E;\|.\|)$.

Lorsque F est un fibré en droite, la courbure de ∇ est la $(1,1)$-forme définie localement par la formule :

(2.4.1) $$R = \bar\partial\partial \log \|s\|^2 ,$$

où s désigne une section holomorphe non nulle de F, et il vient :

(2.4.2) $$c_1(F;\|.\|) = -\frac{1}{2\pi i} R$$

(2.4.3) $$\mathrm{ch}(F;\|.\|) = \sum_{k\ge0} \frac{1}{k!}\, c_1(F;\|.\|)^k$$

(2.4.4) $$\mathrm{Td}(F;\|.\|) = 1 + \frac{1}{2} c_1(F;\|.\|) + \frac{1}{12} c_1(F;\|.\|)^2 + \ldots .$$

2.5. Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck local

Si σ est une forme différentielle, nous notons $\sigma^{(k)}$ sa composante de degré k.

THÉORÈME 2.2.- *Soient* $\pi : X \longrightarrow S$ *une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes, et* E *un fibré vectoriel holomorphe sur* X. *Soient* $\|\cdot\|_T$ *une métrique hermitienne* C^∞ *sur le fibré en droites complexes* $T = T\,X|S$ ($\|\cdot\|_T$ définit une famille C^∞ de métriques riemanniennes sur les fibres de π) *et* $\|\cdot\|_E$ *une métrique hermitienne* C^∞ *sur* E. *Soit* $\|\cdot\|_Q$ *la métrique de Quillen sur* $\mathrm{DET}\,\bar\partial_E$, *définie au moyen de ces métriques. On a alors l'égalité* de formes différentielles *sur* S :

$$c_1(\mathrm{DET}\,\bar\partial_E, \|\cdot\|_Q) = - \int_{X|S} \{\mathrm{Ch}(E;\|\cdot\|_E)\ \mathrm{Td}(T;\|\cdot\|_T)\}^{(4)} \tag{2.5.1}$$

Dans cette formule, $\int_{X|S}$ désigne l'intégration des formes différentielles le long des fibres de π.

Lorsque E est un fibré en droite, la formule devient, d'après (2.4.3) et (2.4.4) :

$$\begin{aligned} &c_1(\mathrm{DET}\,\bar\partial_E;\|\cdot\|_Q) \\ &= - \int_{X|S} \left[\frac{1}{12}\, c_1(T;\|\cdot\|_T)^2 + \frac{1}{2}\, c_1(T;\|\cdot\|_T)\, c_1(E;\|\cdot\|_E) + \frac{1}{2}\, c_1(E;\|\cdot\|_E)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

La version cohomologique du théorème 2.1, c'est-à-dire l'égalité (2.5.1) à des formes différentielles exactes près, est une conséquence immédiate du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les familles. Lorsque π est un morphisme algébrique de variétés quasiprojectives complexes et E un fibré vectoriel algébrique sur X, c'est aussi une conséquence du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck (qui fournit en fait une égalité plus précise, valable dans le groupe de Chow rationnel de S ; remarquer que $c_1(\det R\pi_* E) = c_1(R\pi_* E)$).

La formule (2.5.1) a été établie par Quillen ([44]) lorsque X est le produit de la base S par une surface de Riemann compacte X_0, et $\pi = pr_2 : X_0 \times S \longrightarrow S$, et par Belavin et Knizhnik ([7], [8]) lorsque $E = T^{\otimes n}$. En fait, ces auteurs considèrent des métriques particulières.

Bismut et Freed ont prouvé un énoncé analogue au théorème 2.2 pour des familles C^∞ d'opérateurs de Dirac ([12]) ; leur démonstration utilise les méthodes probabilistes développées par Bismut pour sa preuve du théorème de l'indice local des familles ([11]). Il est possible de démontrer le théorème 2.2 à partir de leur résultat, combiné à une formule "d'anomalie conforme", conséquence directe de (1.5.4).

Des théorèmes analogues au théorème 2.2 avec X de la forme $X_0 \times S$, mais X_0 de dimension complexe arbitraire, ont été établis par Donaldson ([17]) et par

Gillet et Soulé ([25]). Ces derniers sont motivés par la généralisation en dimension supérieure du "calcul sur les surfaces arithmétiques" développé par Arakelov et Faltings. Signalons à ce propos que divers développements des résultats et des méthodes décrits dans cet exposé sont étroitement reliés aux constructions "aux places infinies" du calcul sur les surfaces arithmétiques d'Arakelov et Faltings (*cf.* [33], [6], [3], [30]).

2.6. Montrons maintenant comment les formules d'anomalies conformes (1.6.5) et (1.6.6) peuvent se déduire du théorème 2.2. Cette démonstration met en évidence, d'une part, le lien entre les diverses sortes d'anomalies en théorie des champs en dimension 2 (*cf.* [2]), et, d'autre part, la relation entre "l'action de Liouville" (1.6.7) et les classes secondaires de Bott et Chern (*cf.* [14] et [25]). En particulier, elle fait apparaître la valeur 26 de la dimension critique comme un avatar du coefficient $\frac{1}{12}$ dans le genre de Todd (2.4.4) : $\frac{26}{2} = 12+1$!

Soient X_0 une surface de Riemann compacte, et $\|.\|_0$ une métrique hermitienne sur $T_{\mathbb{C}}X_0$; cette métrique définit une métrique hermitienne sur $T_{\mathbb{C}}X_0^{\otimes n}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Au moyen de ces métriques, on construit une métrique de Quillen $\|.\|_{Q,0}$ sur l'espace $\mathrm{DET}\ \bar\partial_{TX_0^n}$. La formule d'anomalie conforme donne le rapport entre les métriques de Quillen $\|.\|_{Q,0}$ et $\|.\|_{Q,1}$ sur cet espace déduites de deux métriques hermitiennes $\|.\|_0$ et $\|.\|_1$ sur $T_{\mathbb{C}}X_0$.

PROPOSITION 2.3 ([43], [1]).- *Si* $\|.\|_1 = e^f\|.\|_0$, *alors*

$$\frac{\|.\|_{Q,1}}{\|.\|_{Q,0}} = \exp\left[\frac{6n(n+1)+1}{12\pi i}\int_{X_0} (fR + \partial f \wedge \bar\partial f)\right] \tag{2.6.1}$$

où R *désigne la* $(1,1)$*-forme de courbure du fibré holomorphe* TX *muni de la métrique* $\|.\|_0$ (*cf.* (2.4.1)).

Les formules (1.6.5) et (1.6.6) se déduisent de (2.6.1) en faisant $n = 0$ et $n = 1$. (Remarquer que le produit scalaire L^2 sur $\mathrm{coker}\ \bar\partial$ est indépendant de la métrique sur TX ; *cf.* § 1.3.2.)

Si on applique le théorème 2.2 lorsque E est le fibré T^n muni de la métrique $\|.\|_E$ déduite de $\|.\|_T$ par produit tensoriel, il vient :

$$c_1(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T^n}; \|.\|_Q) = -\frac{6n(n+1)+1}{12}\int_{X|S} c_1(T;\|.\|_T)^2 . \tag{2.6.2}$$

Soit alors $F \in C^\infty(X_0 \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$ telle que les fonctions $f_s = F(.,s)$ dépendent seulement de $|s|$, $f_0 = 1$ et $f_1 = f$. La formule précédente, appliquée à la famille triviale $S = \mathbb{C}$, $X = X_0 \times \mathbb{C}$, $\pi = pr_2$ et à la métrique $\|.\| = e^F\|.\|_0$ sur T, devient, par un calcul facile :

$$\partial_s\bar\partial_s \log \|.\|_{Q,s} = \partial_s\bar\partial_s\left\{\frac{6n(n+1)+1}{12\pi i}\int_{X_0} (f_sR + \partial f_s \wedge \bar\partial f_s)\right\} . \tag{2.6.3}$$

où $\|\cdot\|_{Q,s}$ est la métrique de Quillen sur DET $\bar\partial_{T^n}$ obtenue à partir de la métrique $e^{f_s}\|\cdot\|_0$ sur X_0. Comme f_s et $\|\cdot\|_{Q,s}$ ne dépendent que de $|s|$, la formule (2.6.3) implique la formule (2.6.2).

3. LA MESURE DE POLYAKOV ET L'ISOMORPHISME DE MUMFORD

3.1. Soit $\pi : X \longrightarrow S$ une famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes. Munissons $T = T\,X|S$ d'une métrique hermitienne, et considérons les fibrés déterminant DET $\bar\partial_{\mathcal{O}}$ et DET $\bar\partial_T$, munis des métriques de Quillen $\|\cdot\|_Q$ déduites de cette métrique sur T et de la métrique triviale ($\|1\|=1$) sur le fibré trivial $\mathcal{O}$.

La formule (2.6.2), avec $n = 0$ et $n = 1$, fournit l'égalité suivante :

THÉORÈME 3.1 (Belavin - Knizhnik ; [7], [8]).

$$c_1(\mathrm{DET}\ \bar\partial_T;\|\cdot\|_Q) = 13\ c_1(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}};\|\cdot\|_Q)\ .$$

3.2. Par ailleurs, si X et S sont quasiprojectives et si π est un morphisme algébrique, on obtient par un calcul analogue à celui conduisant à la formule (2.6.2), utilisant non pas le théorème 2.2, mais le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck, l'existence d'un entier naturel $N > 0$ tel que les fibrés en droites $(\mathrm{DET}\ \bar\partial_T)^{\otimes N}$ et $(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 13N}$ soient isomorphes, en tant que fibrés algébriques.

Il est possible d'établir un résultat plus précis, en considérant une rigidification convenable de l'espace des modules $\mathcal{M}_p$:

THÉORÈME 3.2.- *Soit* p *un entier* ≥ 2 . *Il est possible d'associer à toute famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes connexes de genre* p , $\pi : X \longrightarrow S$, *un isomorphisme de fibrés en droites :*

$$M_\pi : \mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\,X|S} \simeq (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 13}$$

de sorte que :

i) *la donnée des divers* M_π *soit compatible au changement de base ; c'est-à-dire, avec les notations du* § 2.2, *le diagramme suivant de fibrés en droites holomorphe sur* S' *est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\,X'|S'} & \xrightarrow{M_{\pi'}} & (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_{X'}})^{\otimes 13} \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
f^*\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\,X|S} & \xrightarrow{f^*M_\pi} & f^*(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_X})^{\otimes 13}
\end{array}$$

(*dans ce diagramme, les flèches verticales sont les isomorphismes décrits au* § 2.2 i)).

ii) *Si* π *est un morphisme algébrique de variétés quasiprojectives complexes, et donc que* $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T\,X|S}$ *et* $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}_X}$ *possèdent des structures de fibrés en droites algébriques sur* S *, alors* M_π *est un isomorphisme algébrique.*

On appellera isomorphisme de Mumford *la donnée d'une telle famille* $\{M_\pi\}$.

Si $\{M_\pi\}$ *et* $\{M'_\pi\}$ *sont deux isomorphismes de Mumford, il existe* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *tel que, pour toute* π , $M'_\pi = \lambda\, M_\pi$.

Cet énoncé découle du théorème de Mumford ([39], th. 5.10), du caractère algébrique des déformations verselles des courbes holomorphes compactes, et du fait que les fonctions régulières inversibles sur les espaces de modules M_p sont constantes (ce dernier fait découle de la description explicite de M_p si $p = 1$ ou 2 , et d'un argument utilisant la compactification de Satake si $p \geq 3$; *cf.* démonstration du théorème 3.3).

3.3. Le théorème 3.1 admet comme conséquence l'énoncé remarquable suivant (Beilinson, Drinfeld ; *cf.* [7], [8]) :

THÉORÈME 3.3.- *Soit* p *un entier* ≥ 2 *et soit* $\{M_\pi\}$ *un isomorphisme de Mumford pour les surfaces de Riemann de genre* p .

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ *telle que, pour toute famille holomorphe de surfaces de Riemann compactes connexes de genre* p , $\pi : X \longrightarrow S$ *, et toute métrique hermitienne* $\|.\|_T$ *sur* $T := T\,X|S$ *, l'isomorphisme de Mumford vérifie :*

$$\|M_\pi\, \xi\|_Q = C\|\xi\|_Q \ ,$$

où l'on note $\|.\|_Q$ *les métriques de Quillen définies à partir de* $\|.\|_T$ *(cf. § 3.1).*

Esquisse de démonstration. Le théorème 3.1 implique que, pour toute famille $\pi : X \longrightarrow S$ et toute métrique $\|.\|_T$, il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(S;\mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\|M_\pi\, \xi\|_Q = \varphi\|\xi\|_Q \quad \text{et} \quad \partial\bar\partial \log \varphi = 0 \ .$$

La formule d'anomalie conforme (2.6.1), avec $n = 0$ et $n = 1$, et la compatibilité de l'isomorphisme de Mumford au changement de base, montrent que $\varphi(s)$ ne dépend que de la classe de $\pi^{-1}(s)$ dans M_p .

Si $p \geq 3$, cela implique que φ ne dépend que de p : une fonction pluriharmonique sur T_p , invariante sous Γ_p , est constante, car par tout couple de points de M_p passe une courbe complète dans M_p (*cf.* [27]). Cela tient au fait suivant : soit $\widetilde{M}_p$ la compactification de M_p obtenue en prenant la fermeture de M_p , plongé dans la compactification de Satake de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polariées de dimension p au moyen de l'application jacobienne ; $\widetilde{M}_p$ est une variété projective, et $\widetilde{M}_p - M_p$ est de codimension ≥ 2 dans M_p .

Lorsque $p = 2$, il est nécessaire pour conclure de disposer d'une majoration sur la croissance de φ à l'infini dans $\mathcal{M}_2$. Une telle estimation peut se déduire des expressions de déterminants régularisés en termes de fonction zêta de Selberg (*cf.* § 1.6.4 et [48]).

3.4.1. Remarquons que la donnée d'une densité C^∞ , > 0 , sur une variété $\mathbb{C}$-analytique Z correspond à la donnée d'une métrique hermitienne sur le fibré en droites ω_Z des formes différentielles holomorphes de degré $\dim_{\mathbb{C}} Z$; une telle métrique $\|.\|$ définit une densité μ par la formule locale

$$\mu = \|s\|^{-2} \ |s \wedge \bar{s}| \ ,$$

où s désigne une section holomorphe non nulle de ω_Z .

3.4.2. On suppose toujours $p > 1$, et on considère "la" courbe universelle de Teichmüller $\pi : \mathcal{C}_p \longrightarrow \mathcal{T}_p$. On dispose d'identifications :

$$I_1 \ : \ \mathrm{DET}\ \bar{\partial}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_p}} \xrightarrow{\ \sim\ } (\Lambda^p \mathbb{E})^*$$

$$I_2 \ : \ \mathrm{DET}\ \bar{\partial}_{T\,\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p} \xrightarrow{\ \sim\ } \Lambda^{3p-3}\, T_{\mathbb{C}}\, \mathcal{T}_p \simeq \omega^*_{\mathcal{T}_p} \ .$$

où l'on désigne par $\mathbb{E}$ le fibré vectoriel holomorphe de rang p sur $\mathcal{T}_p$, de fibre en s le vectoriel $H^0(\pi^{-1}(s),\omega)$, dont le faisceau des sections holomorphes s'identifie à $R^0\pi_*\,\omega_{\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p}$. L'identification I_1 découle du fait que $R^0\,\pi_*\,\mathcal{O}_{\mathcal{C}_p}$ est canoniquement triviale et de la dualité de Serre $R^1\,\pi_*\,\mathcal{O}_{\mathcal{C}_p} \simeq (R^0\,\pi_*\,\omega_{\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p})^*$. L'identification I_2 découle de l'annulation de $R^0\,\pi_*\,T\,\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p$ et de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer.

Un isomorphisme de Mumford $\{M_\pi\}$ définit alors, grâce aux identifications I_1 et I_2 , un isomorphisme

$$M : \omega_{\mathcal{T}_p} \simeq (\Lambda^g \mathbb{E})^{\otimes 13} \ .$$

Le fibré $\mathbb{E}$ est muni d'une métrique hermitienne C^∞ naturelle, définie dans chaque fibre $\mathbb{E}_s = H^0(\pi^{-1}(s),\omega)$ par la formule (1.3.5) ; c'est aussi le produit scalaire L^2 défini à partir d'une métrique hermitienne arbitraire sur $T\,\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p$, et de la métrique duale sur $\omega_{\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p}$. Cette métrique hermitienne sur $\mathbb{E}$ détermine une métrique hermitienne $\|\ \|$ sur $\Lambda^g \mathbb{E}$. Explicitement, avec les notations du § 1.3.4 :

$$\|\omega_1(s) \wedge \ldots \wedge \omega_g(s)\|^2 = \det((\omega_i(s),\omega_j(s)))_{1\leq i,j\leq g} = \det \operatorname{Im} \Omega(s) \ .$$

Soit $\|.\|'$ la métrique hermitienne sur $(\Lambda^g \mathbb{E})^{\otimes 13}$ "puissance treizième" de la métrique $\|.\|$.

Le théorème suivant affirme que la mesure de Polyakov est de nature "algébrique" :

THÉORÈME 3.4.- *La mesure de Polyakov* μ_p *sur* T_p *coïncide, à un facteur multiplicatif constant près, avec la mesure sur* T_p *définie par la métrique sur* ω_{T_p} *déduite de la métrique* $\|.\|'$ *sur* $(\Lambda^g \mathbb{E})^{\otimes 13}$ *par l'isomorphisme* M .

Ce théorème est une conséquence du théorème 3.3 et du fait que l'on peut écrire l'expression (1.6.9) de la densité de Polyakov en un point s de T_p sous la forme suivante ($\sigma \in \omega_{T_{p-s}} - \{0\}$) :

$$\left[\|\omega_1(s)\wedge\ldots\wedge\omega_g(s)\|^2 \; \|I_1^{-1}((\omega_1(s)\wedge\ldots\wedge\omega_g(s))^{-1})\|_Q^2\right]^{-13} \|I_2^{-1}(\sigma^{-1})\|_Q^2 \, |\sigma\wedge\bar{\sigma}| \; .$$

Le lien entre le 13 dans le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck appliqué au fibré trivial et au fibré tangent relatif d'une famille de courbes, et la dimension critique $26 = 2 \times 13$, semble avoir été remarqué indépendamment tout d'abord par Alvarez ([2]) et Manin ([32]), puis a été retrouvé et réinterprété par divers auteurs ([7], [15], [13]).

3.6. Soit $\bar{M}_p$ la compactification de M_p par les courbes stables. L'interprétation de la mesure de Polyakov au moyen de l'isomorphisme de Mumford permet de décrire son comportement au voisinage du diviseur à l'infini $\Delta = \bar{M}_p - M_p$.

Considérons, pour simplifier, une courbe stable C de genre p , possédant un unique point double, et sans automorphisme non trivial. La classe [C] de C dans $\bar{M}_p$ est un point lisse de $\bar{M}_p$; le diviseur Δ est lisse au voisinage de [C] et [C] possède un voisinage U dans $\bar{M}_p$ tel que l'application $T_p \longrightarrow T_p/\Gamma_p = M_p$ soit un revêtement au-dessus de U , et qu'il existe au-dessus de U une courbe stable universelle $\pi : X \longrightarrow U$.

On peut montrer, en utilisant le théorème de Mumford ([39], th. 5.10) et la théorie des déformations des courbes stables, qu'un isomorphisme de Mumford :

$$\omega_{U-D} \simeq (\Lambda^p \pi_* \omega_{X|U-\Delta})^{\otimes 13}$$

se prolonge en un isomorphisme :

$$\omega_U \simeq (\Lambda^p \pi_* \omega_{X|U})^{\otimes 13} \otimes \mathcal{O}(-2\Delta) \; .$$

On en déduit que, si $(w_1,\ldots,w_{3g-3})$ sont des coordonnées locales au voisinage de [C] telles que Δ soit défini par l'équation $w_1 = 0$, la mesure de Polyakov s'écrit dans ces coordonnées :

$$\mu_p = |w_1|^{-4} f(w_1,\ldots,w_{3g-3}) \; |dw_1\wedge\ldots\wedge dw_{3g-3}\wedge d\bar{w}_1\wedge\ldots\wedge d\bar{w}_{3g-3}| \; ,$$

où f est C^∞ et > 0 , si C n'est pas irréductible ;

$$\mu_p = \left\{|w_1|^{-4}[\log|w_1|^{-1}]^{-13} \; g(w_1,\ldots,w_{3g-3}) + o\left(|w_1|^{-4}[\log|w_1|^{-1}]^{-13}\right)\right\}$$

$$|dw_1\wedge\ldots\wedge dw_{3g-3}\wedge d\bar{w}_1\wedge\ldots\wedge d\bar{w}_{3g-3}| \; .$$

où g est C^∞ et > 0 , si C est irréductible.

De plus, on peut relier les "résidus" $f(0,w_1,\dots,w_{3g-3})$ et g aux mesures de Polyakov sur les espaces de modules associés à la (ou aux) courbe(s) déduite(s) de C par normalisation ("factorisation").

3.7. <u>La mesure de Polyakov sur</u> T_2 <u>et</u> T_3 ([9], [35], [37])

3.7.1. On pose, pour tout $\Omega \in H_p$ et tout $(a,b) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$:

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0,\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\,[\pi i\,{}^t(n+a)\Omega(n+a+2\pi i\,{}^t(n+a)b] .$$

On note $\mathbb{F}$ le fibré vectoriel sur T_p, de fibre en s le vectoriel $H^0(\pi^{-1}(s),\omega^2)$, dont le faisceau des sections holomorphes s'identifie à $R^0\pi_*\omega^2_{C_p|T_p}$.

3.7.2. *La mesure de Polyakov sur* T_2

On dispose d'un isomorphisme "algébrique" :

$$\left(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_{C_2}}\right)^{\otimes 10} \simeq \mathcal{O}_{T_2} . \tag{3.7.1}$$

(En fait, le groupe de Picard du foncteur des modules $\mathrm{Pic}(\underline{M_2})$ est isomorphisme à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et admet λ_1 comme générateur ; *cf*. [39]). Cet isomorphisme peut s'expliciter au moyen de fonctions thêta. Posons :

$$\begin{aligned} f_2 : H_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \Omega &\longmapsto \Big[\prod_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{0,1\}^2 \\ \varepsilon_1.\varepsilon_2\in 2\mathbb{Z}}} \vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon_1/2 \\ \varepsilon_2/2 \end{bmatrix}(0;\Omega)\Big]^2 . \end{aligned}$$

C'est une forme $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$-modulaire de poids 10 sur H_2, qui ne s'annule que sur le diviseur D, orbite de $\left\{\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} ; \ \mathrm{Im}\,\tau_1 > 0 \ , \ \mathrm{Im}\,\tau_2 > 0\right\}$ sous l'action de $\mathrm{Sp}(4;\mathbb{Z})$. Ce diviseur est le complémentaire de l'image de T_2 par l'application des périodes $\Omega : T_2 \longrightarrow H_2$. L'isomorphisme (3.7.1) est alors défini par :

$$\begin{aligned} (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 10} \simeq (\Lambda^2\,\mathbb{E})^{\otimes 10} &\longrightarrow \mathcal{O}_{T_2} \\ f_2(\Omega)\,(\omega_1\wedge\omega_2)^{\otimes 10} &\longmapsto 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on dispose aussi de l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_{C_2}}\right)^{\otimes 3} \simeq (\Lambda^2\,\mathbb{E})^{\otimes 3} &\xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\ C_2|T_2}) \simeq \Lambda^3\,\mathbb{F} \\ (\omega_1\wedge\omega_2)^3 &\longmapsto \omega_1^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2^2 \end{aligned}$$

L'isomorphisme de Mumford s'obtient par produit tensoriel des deux isomorphismes précédents :

$$\begin{aligned} (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\ C_2|T_2}) \simeq \Lambda^3\,\mathbb{F} &\xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{DET}\ \bar\partial\ )^{\otimes 13} \simeq (\Lambda^2\,\mathbb{E})^{\otimes 13} \\ \omega_1^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2^2 &\longmapsto f_2(\Omega)\,(\omega_1\wedge\omega_2)^{13} . \end{aligned}$$

Comme le dual de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer identifie $d\Omega_{ij}$ et $\omega_i\omega_j$, on trouve que la mesure de Polyakov sur T_2 est proportionnelle à :

$$(\det \operatorname{Im} \Omega)^{-13} \ |f_2(\Omega)|^{-2} \ |\prod_{i\le j} d\Omega_{ij} \wedge \prod_{i\le j} d\bar{\Omega}_{ij}| \ .$$

3.7.3. *La mesure de Polyakov sur* T_3

Le fibré en droites $(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\ C_3|T_3}) \otimes (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_{C_3}})^{\otimes -4} \simeq \Lambda^6\,\mathbb{F} \otimes (\Lambda^3\,\mathbb{E})^{\otimes(-4)}$ admet une section holomorphe :

$$s = (\omega_1^2 \wedge \omega_2^2 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega_1\omega_2 \wedge \omega_2\omega_3 \wedge \omega_3\omega_1) \otimes (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)^{-4}$$

Soit H le diviseur sur T_3 des courbes hyperelliptiques. Le diviseur des zéros de s coïncide avec H .

Par ailleurs, l'application :

$$\begin{aligned} f_3 : H_3 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \Omega &\longmapsto \prod_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \{0,1\}^3 \\ \varepsilon_1.\varepsilon_2 \in 2\mathbb{Z}}} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1/2\\ \varepsilon_2/2\end{bmatrix}(0;\Omega) \end{aligned}$$

est une forme modulaire de poids 18 , qui, composée avec l'application des périodes $\Omega : T_3 \longrightarrow H_3$, admet 2H comme diviseur (*cf.* [29]). Par conséquent, $s' = (f_3 \circ \Omega)\,(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)^{18}$ est une section holomorphe de $(\Lambda^3\,\mathbb{E})^{\otimes 18}$, de diviseur 2H et Γ_3-équivariante.

Ainsi, $s' . s^{-2}$ est une section holomorphe de $(\Lambda^3\,\mathbb{E})^{\otimes 26} \otimes (\Lambda^6\,\mathbb{F})^{\otimes(-2)}$, partout non nulle et Γ_3-équivariante. On en déduit que le carré de l'isomorphisme de Mumford s'écrit :

$$(\mathrm{DET}\ \bar\partial_{T\ C_3|T_3})^{\otimes 2} \simeq (\Lambda^3\,\mathbb{F})^{\otimes 2} \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{DET}\ \bar\partial_{\mathcal{O}_{C_3}})^{\otimes 26} \simeq (\Lambda^3\,\mathbb{E})^{\otimes 26}$$

$$(\omega_1^2 \wedge \omega_2^2 \wedge \omega_3^2 \wedge \omega_1\omega_2 \wedge \omega_2\omega_1 \wedge \omega_1\omega_3)^2 \longmapsto f_3(\Omega)\,(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)^{26}$$

et donc que la mesure de Polyakov sur T_3 est proportionnelle à :

$$(\det \operatorname{Im} \Omega)^{-1} \ |f_3(\Omega)|^{-1} \ |\prod_{1\le i\le j\le 3} d\Omega_{ij} \wedge \prod_{1\le i\le j\le 3} d\bar{\Omega}_{ij}| \ .$$

Ajoutons que Morozov a proposé une formule en termes de fonctions thêta pour la mesure de Polyakov sur T_4 , qui fait intervenir la relation de Schottky caractérisant l'adhérence de l'image de T_4 dans H_4 par l'application des périodes ([37]).

Signalons enfin une description "explicite" de l'isomorphisme de Mumford, dûe à Beilinson et Manin ([6] ; voir aussi [33]).

Je tiens à remercier L. Alvarez-Gaumé, J.-F. Arvis, Th. Jolicoeur, B. Julia, G. Moore, P. Nelson, I. Singer, C. Soulé et C. Vafa pour les conversations que nous avons eues au sujet de cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. ALVAREZ - *Theory of strings with boundaries : fluctuation, topology and quantum geometry*, Nucl. Phys. B 216, 125-184 (1983).

[2] O. ALVAREZ - *Conformal anomalies and the index theorem*, UCB Preprint, Ph T/85-39 (à paraître dans Nucl. Phys.).

[3] L. ALVAREZ-GAUME, J.-B. BOST, G. MOORE, Ph. NELSON et C. VAFA - *Bosonization in arbitrary genus*, Phys. Lett. B 178, 41-47 (1986).

[4] M.F. ATIYAH et I.M. SINGER - *Dirac operators coupled to vector potentials*, Proc. Nat. Acad. Sci. 81, 2597 (1984).

[5] M.A. BARANOV et A.S. SHVARTS - *Multiloop contribution to string theory*, Pisma ZETP 42, 340-342 (1985) [= JETP Letters 42, 419-421 (1985)].

[6] A.A. BEILINSON et Yu.I. MANIN - *The Mumford form and the Polyakov measure in string theory*, Comm. Math. Physics 107, 359-376 (1986).

[7] A.A. BELAVIN et V.G. KNIZHNIK - *Algebraic geometry and the geometry of quantum strings*, Phys. Lett. B, 168, 201-211 (1986).

[8] A.A. BELAVIN et V.G. KNIZHNIK - *Complex geometry and theory of quantum strings*, Landau Institute Preprint (1986).

[9] A.A., V.G. KNIZHNIK, A. MOROZOV, A. PERELOMOV - *Two- and three-loop amplitudes in the bosonic string theory*, Landau Institute Preprint (1986).

[10] L. BERS - *Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations*, Bulletin Amer. Math. Soc. (N.S.) 5 (1981), 131-172.

[11] J.-M. BISMUT - *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs*, Invent. Math. 83, 91-151 (1986).

[12] J.-M. BISMUT et D.S. FREED - *The analysis of elliptic families I, II*, Comm. Math. Phys. 106, 159-176 (1986) et 107, 103-163 (1986).

[13] J.-B. BOST et Th. JOLICOEUR - *A holomorphy property and the critical dimension in string theory from an index theorem*, Phys. Lett. B 174, 273-276 (1986).

[14] R. BOTT et S.S. CHERN - *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic cross sections*, Acta Math. 114, 71-112 (1968).

[15] R. CATENACCI, M. CORNALBA, M. MARTINELLI et C. REINA - *Algebraic geometry and path integrals for closed strings*, Phys. Lett. B 172, 328-332 (1986).

[16] E. D'HOKER and D.H. PHONG - *Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string*, Nuclear Physics B 269, 205-234 (1986).

[17] S.K. DONALDSON - *Infinite determinants, stable bundles and curvatures*, Preprint.

[18] J. FAY - *Analytic torsion and Prym differentials. Riemann surfaces and related topics*, Proc. of the 1978 Stony Brook Conference, Princeton University Press 1980, 107-122.

[19] D.S. FREED - *Determinants, torsion and strings*, Comm. Math. Phys. 107, 483-513 (1986).

[20] D. FRIED - *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds*, Invent. Math. 84, 523-540 (1986).

[21] D. FRIEDAN - *Introduction to Polyakov's string theory*, in Recent advances in field theory and statistical mechanics, Les Houches 1982, J.-B. Zuber and R. Stora Ed., North Holland, 839-867 (1984).

[22] D. FRIEDAN et S. SHENKER - *The integrable analytic geometry of quantum strings*, Phys. Lett. B 175, 287-296 (1986).

[23] E. GAVA, R. JENGO, T. JAYARAMAN et R. RAMACHANDRAN - *Multiloop divergences in the closed bosonic string theory*, Preprint, Trieste 1985.

[24] P.B. GILKEY - *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah - Singer index theorem*, Publish or Perish, 1984.

[25] H. GILLET et Ch. SOULÉ - *Direct images of hermitian holomorphic bundles*, Bull. Am. Math. Soc. 15, 209-212 (1986).

[26] J. HARER - *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 72 (1983), 221-239.

[27] J. HARRIS - *Recent work on* M_g , Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warzawa, North Holland, 1984, Vol. 1, 719-726.

[28] S.W. HAWKING - *Zeta function regularization of path integrals in curved space-time*, Comm. Math. Phys. 55, 133-148 (1977).

[29] J.I. IGUSA - *Modular forms and projective invariants*, American Journ. of Math. 89, 817-855 (1967).

[30] V.G. KNIZHNIK - *Analytic fields on Riemann surfaces*, Phys. Lett. B, 180, 247-254 (1986).

[31] F.F. KNUDSEN and D. MUMFORD - *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on* "det" *and* "Div", Math. Scand. 39, 19-55 (1976).

[32] Yu.I. MANIN - *Dimensions critiques des théories des cordes et faisceau dualisant sur l'espace des modules des super-courbes*, Analyse fonctionnelle et applications 20, n° 3, 88-89 (1986) (en russe).

[33] Yu.I. MANIN - *The partition function of the Polyakov string can be expressed through theta function*, Pisma ZETP 43, 161-163 (1986).

[34] Yu.I. MANIN - *Quantum strings and algebraic curves*, Conférence au congrès international des mathématiciens (1986).

[35] G. MOORE - *Modular forms and two-loop string physics*, Phys. Lett. B, 176, 369-379 (1986).

[36] G. MOORE and P. NELSON - *Measure for moduli*, Nuclear Physics B 266, 58-74 (1986).

[37] A. MOROZOV - *Explicit formulae for one, two, three and four loop string amplitudes*, Preprint ITEP 86-88.

[38] D. MUMFORD - *Abelian quotients of the Teichmüller modular group*, Journal d'Analyse Mathématique 18, 227-244 (1967).

[39] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, L'Enseignement Mathématique 23, 39-110 (1977).

[40] A. NEVEU - *Dual resonance models and strings in QCD*, in Recent advances in field theory and statistical mechanics, Les Houches 1982, J.-B. Zuber and R. Stora Ed., North Holland, 1984, 757-837.

[41] J. POLCHINSKI - *Evaluation of the one string path integral*, Commun. Math. Phys. 104, 34-47 (1986).

[42] A.M. POLYAKOV - *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett 103 B, 207-210 (1981).

[43] A.M. POLYAKOV - *Quantum geometry of fermionic strings*, Phys. Lett. B, 103, 211-213 (1981).

[44] D. QUILLEN - *Determinants of Cauchy - Riemann operators over a Riemann surface*, Funk. Anal. i Prilozen 19, 37-41 (1985) [= Funct. Anal. Appl. 19, 31-34 (1986)].

[45] D. RAY and I.M. SINGER - R-*torsion and the laplacian on riemannian manifolds*, Adv. in Math. 7, 145-210 (1971).

[46] R.T. SEELEY - *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. Pure Math., AMS, Vol. X, 288-307 (1967).

[47] A. WEIL - *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag (1976).

[48] S. WOLPERT - *Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function on the space of Riemann surfaces*, Preprint, Maryland, 1986.

[49] SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE 6 - Springer Lecture Notes in Mathematics 225 (1971).

[50] DUAL THEORY - Ed. M. Jacob, Physics Reports reprint book series I, North Holland (1974).

[51] VERTEX OPERATORS IN MATHEMATICS AND PHYSICS - Edited by J. Lepowsky, S. Mandelstam and I.M. Singer, MSRI Publications 3, Springer-Verlag (1984).

[52] SUPERSTRINGS - The first 15 years of superstring theory, Edited by J.H. Schwarz, World Scientific (1985).

Références complémentaires (septembre 1987) :

On trouvera un exposé général des théories de cordes dans :

[53] M.B. GREEN, J.H. SCHWART and E. WITTEN - *Superstring Theory*, Cambridge University Press (1987).

Le théorème 2.2 a été amplement généralisé dans :

[54] J.-M. BISMUT, H. GILLET et Ch. SOULÉ - *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles*, Prépublication Orsay 87 T 8.

Jean-Benoît BOST

École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05