Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Le problème de Torelli

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 651, p. 7-20
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__7_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n°651

Novembre 1985

LE PROBLÈME DE TORELLI

par Arnaud BEAUVILLE

1. Le cadre

Soit X une variété kählérienne compacte. Les groupes de cohomologie $H^n(X,\mathbb{Z})$ sont munis d'une *structure de Hodge* de poids n, c'est-à-dire d'une décomposition

$$H^n(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \quad \text{avec} \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}} \ .$$

Dans la suite, je ne considérerai que le cas $n = \dim(X)$. Le $\mathbb{Z}$-module $H^n(X,\mathbb{Z})$ est alors muni d'une forme bilinéaire Q (définie par le cup-produit), symétrique ou alternée suivant que n est pair ou impair. La structure de Hodge est compatible avec Q, ce qui signifie qu'on a

$$Q(H^{p,q}\ ,\ H^{r,s}) = 0 \quad \text{si} \quad r \neq q \ ,$$

ainsi que des conditions de signe sur la forme $Q(x,\bar{x})$ pour lesquelles je renvoie à [Gr1] ou [De].

Soit $\mathfrak{M}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de variétés kählériennes compactes de dimension n, de type topologique fixé. Le *problème de Torelli* (global) pour $\mathfrak{M}$ est la question suivante : soient X, X' deux variétés de $\mathfrak{M}$, telles qu'il existe une isométrie $\varphi : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X',\mathbb{Z})$ respectant les structures de Hodge (je dirai, plus brièvement, une isométrie de Hodge). Peut-on conclure que X et X' sont isomorphes ? On peut être plus exigeant, c'est ce que j'appellerai le *problème de Torelli fin* : existe-t-il un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \varphi$?

Suivant les situations, on est amené à envisager diverses variantes. Si par exemple les variétés X considérées sont polarisées, c'est-à-dire munies de la classe $h \in H^2(X,\mathbb{Z})$ d'un fibré ample, et si n est pair, le groupe $H^n(X,\mathbb{Z})$ possède un élément distingué $h^{n/2}$; on demandera que l'isométrie de Hodge φ respecte cet élément.(1)

(1) Cette convention n'est raisonnable que si $H^*(X,\mathbb{Q})$ est engendré par H^n et par les puissances de h. Ce sera le cas pour tous les exemples considérés dans la suite.

S.M.F.
Astérisque 145-146 (1987)

On peut reformuler le problème de Torelli comme suit. Soit L un $\mathbb{Z}$-module de type fini, muni d'une forme bilinéaire $(-1)^n$-symétrique Q_L. L'ensemble des structures de Hodge sur L compatibles avec Q_L est paramétré par une variété analytique D, le *domaine des périodes,* qui est un ouvert d'une variété de drapeaux de $L_{\mathbb{C}}$ (cf. [Gr 1] ou [De]). Soit $\tilde{\mathfrak{M}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X,σ), où X est une variété de $\mathfrak{M}$ et où $\sigma : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ est une isométrie. A un tel couple est associée à l'aide de σ une structure de Hodge sur L, compatible avec Q_L, d'où une application $\tilde{\mathfrak{p}} : \tilde{\mathfrak{M}} \longrightarrow D$. Notons Γ le groupe d'automorphismes de (L,Q_L). On a $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}/\Gamma$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{M}} & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{p}}} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & D/\Gamma \end{array} .$$

(Dans le cadre des variétés polarisées (cf. note (1)), si n est pair, on fixe un élément ℓ de L et on ne considère que les isométries $\sigma : H^n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ vérifiant $\sigma(h^{n/2}) = \ell$; on prend pour D l'espace des structures de Hodge sur L pour lesquelles $\ell \in H^{n/2,n/2}$, et pour Γ le groupe des automorphismes de (L,Q_L) fixant ℓ).

On dit que $\mathfrak{p}$ (ou $\tilde{\mathfrak{p}}$) est *l'application des périodes* pour $\mathfrak{M}$. Le théorème de Torelli équivaut à l'injectivité de $\mathfrak{p}$, le théorème de Torelli fin à celle de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Dans les cas que nous considérerons, $\mathfrak{M}$ et $\tilde{\mathfrak{M}}$ ont des structures naturelles d'espaces analytiques, ainsi que D et D/Γ, et les applications $\mathfrak{p}$ et $\tilde{\mathfrak{p}}$ sont holomorphes. Le *problème de Torelli infinitésimal* pour X est la question de savoir (2) si $\tilde{\mathfrak{p}}$ est une immersion en (X,σ), pour un choix quelconque de σ. Cette question est souvent appelée problème de Torelli local dans la littérature. Oort et Steenbrink suggèrent de réserver ce nom à la question analogue pour $\mathfrak{p}$. Avec cette terminologie, le théorème de Torelli infinitésimal entraîne le théorème local, mais la réciproque est fausse [O-S].

Enfin, lorsque $\mathfrak{M}$ est irréductible, on appelle *problème de Torelli générique* la question de savoir si $\mathfrak{p}$ est génériquement injective. Cette question s'est révélée plus facile à attaquer que le problème de Torelli global, cf. §6. Je ne connais pas d'exemple où $\mathfrak{p}$ soit génériquement injective mais pas injective.

2. Le cas des courbes

Pour une courbe (lisse, compacte) C, la donnée de la décomposition de Hodge

(2) A un grain de sel près ; voir §4 pour un énoncé précis.

$$H^1(C,\mathbb{Z}) \subset H^1(C,\mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

est équivalente à celle de la jacobienne $J(C)$, munie de sa polarisation principale (en tant que tore complexe, $J(C)$ est le quotient de $H^{0,1}$ par l'image de $H^1(C,\mathbb{Z})$; la polarisation est définie par le cup-produit sur $H^1(C,\mathbb{Z})$). Le théorème de Torelli revient donc à énoncer que deux courbes dont les jacobiennes (polarisées) sont isomorphes, sont elles-mêmes isomorphes. Sous cette forme, ce théorème a été démontré par Torelli en 1913 [To]. De nombreuses démonstrations différentes en ont été données par la suite : outre la démonstration originale de Torelli (étendue en toute caractéristique dans [Ma]), citons celles de Comessatti [Co] (dont on trouvera un exposé moderne dans [Ci]), d'Andreotti [A], de Weil [W] (voir aussi [D] pour une version très simple), de Martens [M], de Saint-Donat [S-D], de Green [G 1].

Toutes ces démonstrations sont de nature géométrique, basées sur les propriétés très particulières du diviseur Θ d'une jacobienne. Indiquons par exemple la recette donnée par Green : pour tout point singulier de Θ, on peut regarder par translation le cône tangent à Θ comme une hypersurface dans l'espace projectif tangent de la jacobienne à l'origine ; l'intersection de ces cônes tangents n'est autre que la courbe C (à vrai dire ceci n'est correct que si C n'est pas hyperelliptique, trigonale ou plane de degré 5; on traite facilement ces cas particuliers par une méthode ad hoc).

Certaines de ces démonstrations donnent un théorème de Torelli fin : si C, C' sont deux courbes et $\varphi : H^1(C,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(C',\mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge, il existe un isomorphisme $u : C' \longrightarrow C$ tel que $u^* = \pm\varphi$. Notons $\mathfrak{M}_g$ l'espace des modules des courbes de genre g, $\tilde{\mathfrak{M}}_g$ l'espace des courbes C de genre g munies d'une base symplectique de $H^1(C,\mathbb{Z})$, H_g le demi-espace de Siegel, Γ le groupe $Sp(2g,\mathbb{Z})$; le diagramme du §1 devient ici

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{M}}_g \arrow[r, "\tilde{\mathfrak{p}}"] \arrow[d] & H_g \arrow[d] \\ \mathfrak{M}_g \arrow[r, "\mathfrak{p}"] & H_g/\Gamma \end{tikzcd} .$$

On déduit de ce qui précède que $\mathfrak{p}$ est injective, tandis que $\tilde{\mathfrak{p}}$ est de degré 2 sur son image, ramifiée le long des courbes hyperelliptiques. De plus Oort et Steenbrink ont prouvé que $\mathfrak{p}$ est un plongement [O-S].

Le problème de Torelli pour les courbes est donc bien compris. Un problème très lié, mais plus difficile, est celui de déterminer l'image de $\mathfrak{p}$: c'est le *problème de Schottky*, qui a connu récemment de très beaux développements.

3. Le théorème de Torelli global : quelques cas connus.

a) *Les variétés qui ressemblent à des courbes*

J'entends par là les variétés de dimension impaire $2p+1$, pour lesquelles la décomposition de Hodge se réduit à

$$H^{2p+1}(X,\mathbb{C}) = H^{p+1,p} \oplus H^{p,p+1} \quad .$$

La donnée de la structure de Hodge sur $H^{2p+1}(X,\mathbb{Z})$ équivaut donc à celle d'une variété abélienne principalement polarisée, la *jacobienne intermédiaire* $J(X)$; le problème de Torelli consiste à demander si celle-ci détermine X. Un exemple célèbre est celui de l'hypersurface cubique de dimension 3, traité par Clemens et Griffiths [Cl-G], et indépendamment par Tjurin [Tj 1]. Voici une manière simple d'énoncer leurs résultats [B1] : si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^4$, le diviseur Θ de $J(X)$ a un seul point singulier, de multiplicité 3 ; la base du cône tangent à Θ en ce point s'identifie à X. On en déduit sans peine un théorème de Torelli fin : étant données deux cubiques X, X' et une isométrie de Hodge $\varphi : H^3(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(X',\mathbb{Z})$, il existe un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \pm\varphi$.

Un autre exemple, nettement plus facile, est fourni par les intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2p+3}$ ([R],[Tj 2]. Les équations d'une telle variété, supposée lisse, s'écrivent dans un système de coordonnées convenable

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{2p+3} X_i^2 = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{2p+3} \lambda_i X_i^2 = 0 \ .$$

Le sous-ensemble $\{\lambda_o,\dots,\lambda_{2p+3}\}$ de $\mathbb{P}^1$ est bien déterminé à l'action de $PGL(2)$ près. La jacobienne intermédiaire de X s'identifie à la jacobienne de la courbe hyperelliptique C obtenue comme revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $\lambda_o,\dots,\lambda_{2p+3}$. Par le théorème de Torelli pour les courbes, $J(X)$ détermine C, donc les points $\lambda_o,\dots,\lambda_{2p+3}$, donc les équations (*).

Le très beau travail de Clemens-Griffiths donne envie de le généraliser, par exemple aux variétés de Fano (variétés de dimension 3 dont l'inverse du fibré canonique est ample), telles que la quartique de $\mathbb{P}^4$, l'intersection de 3 quadriques, etc... Mais l'extension à ces variétés du programme de [Cl-G] s'est révélée singulièrement difficile. De fait, à ce jour aucun autre exemple de ce type n'est connu. Le miracle de la cubique est qu'on arrive à paramétrer explicitement le diviseur Θ par une famille de cycles (les différences de droites, ou les cubiques gauches) ; on ne sait pas le faire pour d'autres variétés. Signalons cependant que le théorème de Torelli *générique* est connu dans quelques cas : pour la quartique de $\mathbb{P}^4$, cela résulte du théorème de Donagi (§6); pour les intersections de trois quadriques dans $\mathbb{P}^{2m}$, cela résulte de la théorie des variétés de Prym [F-S].

Il faut aussi mentionner ici, bien que cela sorte du cadre fixé au §1, le théorème de Torelli global obtenu dans [Me] pour les intersections de deux quadriques *affines*. Mérindol prouve qu'une variété U de ce type est déterminée par la structure de Hodge mixte de $H^n(U,\mathbb{Z})$ - plus précisément, par le 1-motif associé.

b) *Les variétés pour lesquelles l'application des périodes est étale.*

En général la dimension du domaine des périodes D est beaucoup plus grande que celle de $\mathfrak{M}$. Dans quelques cas très particuliers, ces dimensions sont égales. Si l'on peut de plus prouver le théorème de Torelli infinitésimal (§4), l'application $\mathfrak{p}$ est étale, ce qui tend à faciliter les démonstrations d'injectivité. De fait, le résultat est connu dans quelques exemples :

- les *surfaces* K3, pour lesquelles la situation est maintenant parfaitement comprise; elle a été exposée en détail dans un séminaire précédent [B2].
- les *surfaces d'Enriques*, dont l'étude se ramène à celle des surfaces K3 munies d'une involution sans point fixe. Le théorème de Torelli dans ce cadre a été démontré par Horikawa [H]; des versions plus agréables se trouvent dans [N] et [B-P-V].
- les *hypersurfaces cubiques de dimension* 4, pour lesquelles le théorème de Torelli vient d'être démontré par C. Voisin [V]. La structure de Hodge d'une telle cubique X ressemble beaucoup à celle d'une surface K3 : on a

$$H^4(X,\mathbb{C}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2} \oplus H^{1,3} ,$$

avec $h^{3,1} = h^{1,3} = 1$ et $h^{2,2} = 21$. La stratégie de [V] consiste à prouver d'abord que $\mathfrak{p}$ est de degré 1 au-dessus de $\mathfrak{p}(P)$, où P est l'hypersurface de $\mathfrak{M}$ formée des cubiques contenant un plan (on utilise pour cela le théorème de Torelli pour les surfaces K3); un argument d'amplitude et une étude au bord permettent ensuite de conclure.

4. Le théorème de Torelli infinitésimal

Soit X une variété kählérienne compacte, de dimension n . Soit (B,o) l'espace de Kuranishi de X : c'est un germe d'espace analytique pointé au-dessus duquel existe une déformation verselle $f : \mathcal{X} \longrightarrow B$, avec $f^{-1}(o) = X$. Quitte à réduire B , on peut fixer un marquage du système local $(H^n(\mathcal{X}_b,\mathbb{Z}))_{b\in B}$; on en déduit une application des périodes(3) $\tilde{\mathfrak{p}} : B \longrightarrow D$.

(3) Pour toutes les variétés considérées dans cet exposé, X n'admet pas d'automorphisme non trivial opérant trivialement sur $H^n(X,\mathbb{Z})$, et l'espace $\tilde{\mathfrak{M}}$ du §1 s'identifie localement à B ; les applications $\tilde{\mathfrak{p}}$ définies ici et au §1 coïncident.

Le problème de Torelli infinitésimal est la question de savoir si $\tilde{\mathfrak{p}}$ est une immersion en o , autrement dit si l'application tangente

$$T(\tilde{\mathfrak{p}}) : T_o(B) \longrightarrow T_{\tilde{\mathfrak{p}}(o)}(D)$$

est injective. Cette application a été étudiée par Griffiths [Gr 1] . L'espace tangent $T_o(B)$ est canoniquement isomorphe à $H^1(X,T_X)$. Griffiths montre que l'espace tangent(4) à D au point correspondant à la décomposition de Hodge $H^n(X,\mathbb{C}) = \oplus H^{p,q}$ s'identifie à

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p>q}} \mathrm{Hom}_Q(H^{p,q} , H^{p-1,q+1} + \ldots + H^{o,n}) ,$$

où $\mathrm{Hom}_Q(H^{p,q},H^{r,s})$ désigne l'espace des homomorphismes $\varphi : H^{p,q} \longrightarrow H^{r,s}$ satisfaisant à $Q(\varphi(x),y) = Q(x,\varphi(y))$ pour x,y dans $H^{p,q}$ (cette relation est automatiquement satisfaite si $(r,s) \neq (q,p)$) . De plus, le théorème de transversalité de Griffiths (loc. cit) entraîne que l'image de $T(\tilde{\mathfrak{p}})$ est contenue dans $\sum_{p>q} \mathrm{Hom}_Q(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$; l'application

$$T(\tilde{\mathfrak{p}}) : H^1(X,T_X) \longrightarrow \sum_{p>q} \mathrm{Hom}_Q(H^{p,q},H^{p-1,q+1})$$

est l'application déduite du cup-produit $H^1(X,T_X) \otimes H^q(X,\Omega_X^p) \longrightarrow H^{q+1}(X,\Omega_X^{p-1})$, compte tenu des isomorphismes canoniques $H^{p,q} = H^q(X,\Omega_X^p)$.

Le problème de Torelli infinitésimal est donc de nature cohomologique; il n'en est pas toujours facile pour autant. Je vais passer en revue quelques cas où il a été étudié. Je note K_X le fibré canonique Ω_X^n de la variété lisse X .

a) *Courbes*

Lorsque X est une courbe, l'injectivité de $T(\tilde{\mathfrak{p}})$ équivaut par dualité de Serre à la surjectivité de l'application naturelle $\mu : S^2H^o(X,K_X) \longrightarrow H^o(X,K_X^{\otimes 2})$. Le *théorème de Noether* entraîne que μ est surjective si et seulement si X est non hyperelliptique ou de genre $\leqq 2$. La démonstration est loin d'être triviale, cf. [Gr 1] ou [G-H].

b) *Variétés dont le fibré canonique est trivial*

Dans ce cas, $T(\tilde{\mathfrak{p}})$ est injective; mieux, l'application

$$T^n(\tilde{\mathfrak{p}}) : H^1(X,T_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{n,0},H^{n-1,1})$$

est déjà injective : en fait elle s'identifie, via l'isomorphisme $\Omega_X^{n-1} \longrightarrow T_X \otimes K_X$,

(4) Dans le cadre "variétés polarisées" considéré au §1, il faudrait remplacer lorsque $n=2p$ l'espace $H^{p,p}$ par le sous-espace primitif $H_O^{p,p}$ (orthogonal de h^p) ;on observera que cela ne change rien en ce qui concerne l'injectivité de $T(\tilde{\mathfrak{p}})$.

à l'application identique de $H^1(X,T_X)$. Cela signifie que la position de $H^{n,0}$ dans $H^n(X,\mathbb{C})$ (c'est-à-dire les périodes des n-formes holomorphes) suffit à fournir des modules locaux pour X .

c) *Résultats généraux*

Les résultats les plus généraux dont on dispose sur ce problème mettent en jeu la cohomologie de certains complexes de Koszul; cette méthode a été introduite dans [L-P-W] et amplifiée dans [G 2] . Je ne vais pas citer les énoncés précis qui sont assez techniques, mais mentionner un critère important qui apparaît déjà dans [L-P-W] et [K] :

PROPOSITION.- *Supposons qu'il existe un fibré en droites* L *sur* X *tel que*

(i) $K_X = L^{\otimes k}$, *pour un entier* $k \geq 1$;

(ii) *le système linéaire* $|L|$ *sur* X *n'ait pas de composante fixe;*

(iii) $H^o(X,\Omega_X^{n-1} \otimes L) = 0$.

Alors l'application $T^n(\tilde{\mathfrak{p}}) : H^1(X,T_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{n,0},H^{n-1,1})$ *est injective.*

Voici quelques conséquences de ce résultat.

d) *Intersections complètes*

La proposition entraîne le théorème de Torelli infinitésimal pour toutes les intersections complètes dans $\mathbb{P}^N$ dont le fibré canonique est ample ($L = \mathcal{O}_X(1)$ fait l'affaire).

Plus généralement, on peut considérer des intersections complètes dans un espace projectif tordu $\mathbb{P}(e_o,\ldots,e_n)$ (quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ définie par $t.(X_o,\ldots,X_n) = (t^{e_o}X_o,\ldots,t^{e_n}X_n))$. On ne connaît pas de critère général (cf. §5), mais on déduit par exemple de la proposition le théorème de Torelli infinitésimal dans le cas suivant (essentiellement dû à Usui [U 1]) : on a $e_o = e_1 = 1$, et la sous-variété de X définie par $X_o = X_1 = 0$ est de codimension 2. Ce cas couvre par exemple les revêtements cycliques de $\mathbb{P}^n$.

e) *Surfaces elliptiques*

La proposition s'applique aux surfaces X munies d'une fibration elliptique $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *sans fibres multiples*, pourvu que $p_g \geq 2$ (on prend $L = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$) .
Par contre le théorème de Torelli infinitésimal est faux lorsque f admet une ou deux fibres multiples : on peut même prouver que les fibres de $\mathfrak{p}$ sont de dimension ≥ 1 dans ce cas [Ch 1].

f) *Variétés générales*

Soient Y une variété (lisse, projective), et L un fibré en droites ample sur Y . Le théorème de Torelli infinitésimal est satisfait par toute hypersurface lisse $X \in |L^{\otimes k}|$ dès que k est assez grand [G 3] . Plus généralement, soit E un fibré vectoriel de rang r sur Y ; dès que k est assez grand, le théorème de Torelli infinitésimal est satisfait par toute sous-variété lisse de codimension r qui est l'ensemble d'annulation d'une section de $E \otimes L^{\otimes k}$ [F] .

5. Surfaces : exemples et contre-exemples

Autour de 1980, l'étude systématique des surfaces avec petits invariants numériques a fourni quelques résultats - souvent de nature négative - sur les problèmes de Torelli global et infinitésimal pour ces surfaces.

Ecartons d'abord les contre-exemples stupides. Si l'on éclate un point variable sur une surface fixe, on obtient une famille de surfaces dont la structure de Hodge ne varie pas : il faut donc supposer notre surface X *minimale*. Il faut aussi supposer $p_g \geqq 1$, sans quoi la structure de Hodge de $H^2(X,\mathbb{Z})$ est triviale (c'est-à-dire $H^2(X,\mathbb{C}) = H^{1,1}$) . Enfin, il est raisonnable, au moins dans un premier temps, de ne considérer que des surfaces *simplement connexes*.

Les *surfaces avec* $p_g = K^2 = 1$ ont été étudiées, du point de vue du problème de Torelli, d'abord par Kynev [Ky] , puis dans [C 1] , [Ch 1] , [T 1] , [U 2] . L'espace $\mathfrak{M}$ est ici facile à décrire : toutes ces surfaces peuvent être réalisées comme intersections complètes de deux hypersurfaces de degré 6 dans l'espace projectif tordu $\mathbb{P}(1,2,2,3,3)$. Catanese prouve que le théorème de Torelli infinitésimal pour la surface X est faux si et seulement si le point X de $\mathfrak{M}$ appartient à une certaine hypersurface; cela lui permet de conclure que l'application des périodes $\mathfrak{p} : \mathfrak{M} \longrightarrow D/\Gamma$ est génériquement finie, mais de degré $\geqq 2$ (les espaces $\mathfrak{M}$ et D/Γ ont même dimension dans ce cas). De plus, certaines fibres de $\mathfrak{p}$ sont de dimension 1 ou 2 [U 2] .

La situation n'est guère plus brillante pour les *surfaces* (simplement connexes) *avec* $p_g = 1$, $K^2 = 2$. Ces surfaces admettent une description relativement simple [C-D] , mais on ignore si leur espace de modules $\mathfrak{M}$ est irréductible. Là encore certaines fibres de $\mathfrak{p}$ sont de dimension $\geqq 1$ ([Ch 1] , [T 2]), mais $\mathfrak{p}$ est génériquement finie : Catanese [C 2] a prouvé le théorème de Torelli infinitésimal pour X dans un ouvert dense de $\mathfrak{M}$.

On peut fabriquer d'autres exemples de surfaces de type général pour lesquelles certaines fibres de l'application des périodes sont de dimension $\geqq 1$. Tous ces exemples ont en commun un certain "manque d'amplitude" du fibré canonique ; on ne connaît pas de contre-exemple au théorème de Torelli infinitésimal pour une surface dont le fibré canonique est très ample.

D'autre part, Chakiris a proposé de remédier à ces contre-exemples en considérant, au lieu de la structure de Hodge de $H^2(X,\mathbb{Z})$, la structure de Hodge mixte de $H^2(X-F,\mathbb{Z})$, où F désigne la partie fixe du système canonique. On peut formuler dans ce cadre un théorème de Torelli infinitésimal; Usui a prouvé qu'il est vérifié pour les surfaces avec $p_g = K^2 = 1$ [U 3].

6. Le théorème de Torelli générique

La difficulté essentielle pour obtenir le théorème de Torelli global est le manque d'interprétation géométrique des structures de Hodge de poids ≥ 2. Vers 1978, Griffiths proposait de contourner cette difficulté de la manière suivante : au lieu de chercher à récupérer la variété à partir de la seule structure de Hodge, on va se donner en plus la variation infinitésimale de cette structure. Nous allons voir que celle-ci contient beaucoup plus d'informations géométriques que la structure de Hodge elle-même, suffisamment dans certains cas pour retrouver la variété de départ. Le prix à payer est un résultat plus faible : on obtiendra seulement que l'application des périodes est génériquement injective, c'est-à-dire de degré 1 sur son image. Il faut observer toutefois qu'en l'absence d'hypothèse de propreté, une immersion injective n'est guère plus belle qu'une immersion génériquement injective...

Le principe de base est fort simple. Soit $p : M \longrightarrow N$ une application rationnelle (resp. méromorphe) de variétés algébriques (resp. d'espaces analytiques) irréductibles. Soit r le rang de p au point générique de M. Notons $Gr(r,T(N))$ l'espace fibré au-dessus de N dont la fibre en $n \in N$ est la grassmannienne des r-plans de $T_n(N)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Gr(r,T(N)) \arrow[d] \\ M \arrow[ur, "v(p)"] \arrow[r, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

où l'application rationnelle $v(p)$ associe à un point général m de M le sous-espace $p_* T_m(M)$ de $T_{p(m)}(N)$. Alors *si* $v(p)$ *est génériquement injective, il en est de même de* p : en effet si n est un point lisse de $p(M)$ et si $p(m) = p(m') = n$, on a

$$p_* T_m(M) = p_* T_{m'}(M) = T_n(p(M)) \quad , \text{ d'où } \quad v(p)(m) = v(p)(m') \; .$$

Prenons alors pour p l'application des périodes $\mathfrak{p} : \mathfrak{M} \longrightarrow D/\Gamma$. Si $X \in \mathfrak{M}$, la donnée $v(p)(X)$ est la variation infinitésimale de la structure de Hodge de X ; elle comprend la structure de Hodge de $H^n(X,\mathbb{Z})$, ainsi que le sous-espace

$$T \subset \sum_{p>q} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

image de $T(\tilde{\mathfrak{p}})$ (§4).

Il s'agit donc de prouver que cette donnée permet de récupérer X : c'est ce que Donagi appelle le problème de Torelli variationnel. Les recherches de Griffiths et de son école sur ce thème, commencées dans [C-G], ont abouti au résultat remarquable de Donagi [Do 1] :

THÉORÈME.- *Soit* X *une hypersurface lisse de dimension* n *et de degré* d . *On écarte les cas*

(i) $n=2$, $d=3$;

(ii) d *divise* $n+2$;

(iii) $d=4$, $n\equiv 0$ (mod.4) *ou* $d=6$, $n\equiv 1$ (mod.6).

Alors X *est déterminée par la variation infinitésimale de sa structure de Hodge. En particulier, l'application des périodes pour les hypersurfaces de dimension* n *et de degré* d *est génériquement injective.*

Le cas (i) est effectivement une exception; on ne sait pas ce qu'il en est pour (ii) et (iii). Observons que rentrent dans le cas (ii) (donc échappent à la méthode de Donagi) les hypersurfaces cubiques de dimension 4 (cf. §3 b) et les hypersurfaces dont le fibré canonique est trivial.

La démonstration est exposée très clairement dans [Do 1] ou [Do 2] (5); je vais me contenter ici d'un résumé très bref. Soit $F=0$ l'équation de X . Notons $S=\bigoplus_{k\geq 0} S_k$ l'anneau gradué $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_{n+1}]$, J l'idéal jacobien de X (engendré par les dérivées partielles de F); posons $R=S/J$. Il est facile de voir que l'espace $H^1(X,T_X)$ est canoniquement isomorphe à R_d (cela résulte de la suite exacte $0\longrightarrow T_X\longrightarrow T_{\mathbb{P}|X}\longrightarrow O_X(d)\longrightarrow 0)$. D'autre part, Griffiths [Gr 2] a mis en évidence des isomorphismes canoniques, pour $p\neq q$:

$$H^{p,q}\longrightarrow R_{t(p)}\ ,\ \text{avec}\quad t(p)=d(n-p+1)-(n+2)\ ;$$

on voit sans peine que le cup-produit $H^1(X,T_X)\otimes H^{p,q}\longrightarrow H^{p-1,q+1}$ s'identifie à l'application bilinéaire

$$R_d\times R_{t(p)}\longrightarrow R_{d+t(p)}$$

définie par la multiplication de l'anneau R .

Pour reconstituer X , Donagi utilise seulement la variation du premier morceau $H^{p,q}$ non nul de la décomposition de Hodge (cela revient à fixer $p=[n+1-(n+2)/d]$, soit encore $0\leq t(p)<d$). La variation infinitésimale de $H^{p,q}$ est la donnée du sous-espace $W_d\subset \mathrm{Hom}(H^{p,q},H^{p-1,q+1})$, image de $H^1(X,T_X)$; cela revient donc à la donnée de l'application bilinéaire $R_d\times R_{t(p)}\longrightarrow R_{d+t(p)}$. Plus précisément, on se donne trois espaces vectoriels W_d , $W_{t(p)}$, $W_{d+t(p)}$, et une application bilinéaire $W_d\times W_{t(p)}\longrightarrow W_{d+t(p)}$; on sait qu'il existe des isomorphismes (inconnus) $\mu_i : R_i\longrightarrow W_i$, rendant commutatif le diagramme

---

(5) Pour obtenir le théorème sous la forme ci-dessus il faut un ingrédient supplémentaire (le "lemme du symétriseur" pour toute X) qui se trouve dans [Do-G].

$$\begin{array}{ccc} R_d \times R_{t(p)} & \longrightarrow & R_{d+t(p)} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_d \times \mu_{t(p)}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_{d+t(p)}} \\ W_d \times W_{t(p)} & \longrightarrow & W_{d+t(p)} \end{array} .$$

Le point clé de la démonstration consiste à récupérer à partir de ces données, par une manipulation purement algébrique et très astucieuse, l'homomorphisme composé $S_d \twoheadrightarrow R_d \xrightarrow{\mu_d} W_d$ (à un automorphisme de $\mathbb{P}^{n+1}$ près). Le noyau de celui-ci est J_d ; on montre alors qu'on peut retrouver J à partir de J_d , puis F à partir de J .

Green a adapté la méthode de Donagi aux hypersurfaces de degré assez grand dans une variété arbitraire [G 3] . Soit Y une variété projective lisse dont le fibré canonique est très ample, et soit L un fibré en droites ample sur Y . Pour k assez grand, les hypersurfaces lisses forment un ouvert dans le système linéaire $|L^{\otimes k}|$; notons $\mathfrak{M}_k$ le quotient de cet ouvert par le groupe des automorphismes de Y qui fixent la classe d'isomorphisme de $L^{\otimes k}$. Alors *pour* k *assez grand, l'application des périodes* $\mathfrak{p} : \mathfrak{M}_k \longrightarrow D/\Gamma$ *est génériquement injective.*

Il est tentant d'essayer d'étendre la méthode de Donagi aux intersections complètes ou aux hypersurfaces quasi-homogènes. La première de ces généralisations semble conduire à des calculs inextricables. Un cas très particulier de la seconde (hypersurfaces de degré km dans $\mathbb{P}(1,\dots,1,m)$) a été traité par Saito [S] . Dans la direction opposée, Cox et Donagi [Co-D] ont observé que le théorème de Torelli variationnel est faux pour les surfaces elliptiques sur $\mathbb{P}^1$ admettant une section (que l'on peut écrire, sous forme de Weierstrass, comme des surfaces de degré $6k$ dans $\mathbb{P}(1,1,2k,3k)$) .

Cependant le théorème de Torelli générique a été démontré pour ces surfaces par Chakiris [Ch 2] , par une méthode tout-à-fait différente. La démonstration est longue et délicate; elle est basée sur les idées de Piateckii-Shapiro et Chafarevich pour les surfaces K3 , avec en outre une compactification partielle de l'espace des modules.

BIBLIOGRAPHIE

[A] A. ANDREOTTI - *On a theorem of Torelli*, Amer. J. of Math. 80 (1958), 801-821.

[B 1] A. BEAUVILLE - *Les singularités du diviseur* Θ *de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans* $\mathbb{P}^4$, Algebraic Threefolds, Springer-Verlag Lect. Notes 947 (1982), 190-208.

[B 2] A. BEAUVILLE - *Surfaces* K3, Exposé 609 au Séminaire Bourbaki (juin 1983) Astérisque 105-106 (1983), 217-229.

[B-P-V] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN - *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Heidelberg (1984).

[C 1] F. CATANESE - *The moduli and the global period mapping of surfaces with* $K^2 = p_g = 1$ *: a counterexample to the global Torelli problem*, Compositio math. 41 (1980), 401-414.

[C 2] F. CATANESE - *On the period map of surfaces with* $K^2 = \chi = 2$, Classification of algebraic and analytic manifolds (K. Ueno, editor). Progress in Math. 39, Birkhäuser (1983), 27-43.

[C-D] F. CATANESE, O. DEBARRE - *Surfaces with* $K^2 = 2$, $p_g = 1$, $q = 0$, à paraître.

[C-G] J. CARLSON, P. GRIFFITHS - *Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem*, Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff and Nordhoff (1980), 51-76.

[Ch 1] K. CHAKIRIS - *Counterexamples to global Torelli for certain simply-connected surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 297-299.

[Ch 2] K. CHAKIRIS - *The Torelli problem for elliptic pencils*, Topics in transcendental algebraic geometry (P. Griffiths, editor), Annals of Math. Studies 106, Princeton University Press (1984), 157-181.

[Ci] C. CILIBERTO - *On a proof of Torelli's theorem*, Algebraic geometry - open problems, Springer-Verlag, Lect. Notes 997 (1983), 113-123.

[Cl-G] H. CLEMENS, P. GRIFFITHS - *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. 95 (1972), 218-356.

[Co] A. COMESSATTI - *Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi*, Atti R. Accad. Sci. Torino, 50 (1914-15), 439-455.

[Co-D] D. COX, R. DONAGI - *On the failure of variational Torelli for regular elliptic surfaces with a section*, à paraître.

[D] O. DEBARRE - *Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes*, Compositio math. 58 (1986), 3-11.

[De] P. DELIGNE - *Travaux de Griffiths*, Exposé 376 du Séminaire Bourbaki (juin 1970), Springer-Verlag, Lect. Notes 180 (1971).

[Do 1] R. DONAGI - *Generic Torelli for projective hypersurfaces*, Compositio Math. 50 (1983), 325-353.

[Do 2] R. DONAGI - *Generic Torelli and variational Schottky*, Topics in transcendental algebraic geometry (P. Griffiths, editor), Annals of Math. Studies 106, Princeton University Press (1984), 239-258.

[Do-G] R. DONAGI, M. GREEN - A *new proof of the symmetrizer lemma and a stronger weak Torelli theorem for projective hypersurfaces*, J. of Diff. Geometry 20(1984), 459-461.

[F] H. FLENNER - *The infinitesimal Torelli problem for zero sets of sections of vector bundles*, à paraître.

[F-S] R. FRIEDMAN, R. SMITH - *Degenerations of Prym varieties and intersections of three quadrics*, à paraître.

[G 1] M. GREEN - *Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve*, Inventiones math. 75 (1984), 85-104.

[G 2] M. GREEN - *Koszul cohomology of projective varieties*, J. of Diff. Geometry 19 (1984), 125-171.

[G 3] M. GREEN - *The period map for hypersurfaces sections of high degree of an arbitrary variety*, Compositio math. 55 (1984), 135-156.

[Gr 1] P. GRIFFITHS - *Periods of integrals on algebraic manifolds*, I et II, Amer. J. of Math. 40 (1968), 568-626 et 805-865.

[Gr 2] P. GRIFFITHS - *On the periods of certain rational integrals*, I et II, Ann. of Math. 90 (1969), 460-541.

[G-H] P. GRIFFITHS, J. HARRIS - *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley and sons (1978).

[H] E. HORIKAWA - *On the periods of Enriques surfaces*, I et II, Math. Annalen 234 (1978), 73-108 et 235 (1978), 217-246.

[K] J. KIǏ - *The local Torelli theorem for varieties with divisible canonical class*, Math. USSR Izvestija 12 (1978), 53-67.

[Ky] V. KYNEV - *Un exemple de surface simplement connexe de type général pour laquelle le théorème de Torelli local n'est pas satisfait* (en russe), C.R. Ac. Bulg. Sci. 30 (1977), 323-325.

[L-P-W] D. LIEBERMANN, C. PETERS, R. WILSKER - *A theorem of local Torelli type*, Math. Annalen 231 (1977), 39-45.

[M] H. MARTENS - *A new proof of Torelli's theorem*, Ann. of Math. 78 (1963), 107-111.

[Ma] T. MATSUSAKA - *On a theorem of Torelli*, Amer. J. of Math. 80 (1958), 784-800.

[Me] J-Y. MERINDOL - *Théorème de Torelli affine pour les intersections de deux quadriques*, Inventiones math. 80 (1985), 375-416.

[N] Y. NAMIKAWA - *Periods of Enriques surfaces*, Math. Annalen 270 (1985), 201-222.

[O-S] F. OORT, J. STEENBRINK - *On the local Torelli problem for algebraic curves*, Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff and Noordhoff (1980), 157-204.

[R] M. REID - *The complete intersection of two or more quadrics*, Thesis, Cambridge (1972).

[S] M. SAITO - *Weak global Torelli theorem for certain weighted projective hypersurfaces*, à paraître au Duke J. of math.

[S-D] B. SAINT-DONAT - *Variétés de translation et théorème de Torelli*, C.R. Ac. Sci. Paris, Série A 280 (1975), 1611-1612.

[Tj 1] A. TJURIN - *The geometry of the Fano surface of a nonsingular cubic* $F \subset \mathbb{P}^4$ *and Torelli theorems for Fano surfaces and cubics*, Math. USSR Izvestija 5 (1971), 517-546.

[Tj 2] A. TJURIN - *On intersections of quadrics*, Russian Math. Surveys 30 (1975), 51-105.

[T 1] A. TODOROV - *Surfaces of general type with* $p_g = 1$ *and* $K^2 = 1$, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), 1-21.

[T 2] A. TODOROV - *A construction of surfaces with* $p_g = 1$, $q = 0$ *and* $2 \leqq K^2 \leqq 8$, *counterexamples of the global Torelli theorem*, Inventiones math. 63, (1981), 287-304.

[To] R. TORELLI - *Sulle varietà di Jacobi*, Rend. Acc. Lincei (5) 22 (1914), 98-103.

[U 1] S. USUI - *Local Torelli theorem for some nonsingular weighted complete intersections*, Proc. of the Inter. Symposium on algebraic geometry, Kinokuniya, Tokyo (1978), 723-734.

[U 2] S. USUI - *Period map of surfaces with* $p_g = c_1^2 = 1$ *and* K *ample*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. ser. A, 2 (1981), 37-73.

[U 3] S. USUI - *Variation of mixed Hodge structures arising from family of logarithmic deformations*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 16 (1983), 91-107.

[V] C. VOISIN - *Le théorème de Torelli pour les hypersurfaces cubiques dans* $\mathbb{P}^5$, à paraître à **Inventiones math.**

[W] A. WEIL - *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl IIa (1957) 33-53.

Arnaud BEAUVILLE

Mathématiques - Bât. 425.
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX