DANIEL BERTRAND

Lemmes de zéros et nombres transcendants

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 652, p. 21-44
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__21_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1985
38ème année, 1985-86, n° 652

LEMMES DE ZÉROS ET NOMBRES TRANSCENDANTS

par Daniel BERTRAND

INTRODUCTION

Le point crucial de la majorité des démonstrations d'approximations diophantiennes consiste à prouver qu'un nombre complexe ξ , qu'on a su construire à la fois entier rationnel et de valeur absolue < 1 en niant l'énoncé recherché, n'est pas nul. Il n'est alors pas difficile de conclure.

Pour ingénieuses qu'elles soient, les diverses techniques introduites pour établir la non nullité de ξ (minorations analytiques, calcul des déterminants, arguments galoisiens, variantes de la théorie de Nevanlinna, ...) ne permettent de traiter qu'un nombre restreint de cas. On doit à Y. Nesterenko d'avoir dégagé, au début des années 70, une méthode suffisamment souple d'approche du problème, ouvrant ainsi la voie aux lemmes de zéros de la théorie des nombres transcendants.

Dans la situation qu'il considère en liaison avec le théorème de Siegel-Shidlovsky sur les E-fonctions, Nesterenko note que la nullité de ξ entraîne la présence d'une singularité d'ordre élevé commune à plusieurs hypersurfaces algébriques, de degrés contrôlés, d'un espace projectif. Il traduit alors le problème en termes d'algèbre commutative, et le résout au moyen d'un raffinement effectif de la théorie des formes de Chow [36]. Son travail est poursuivi par D. Brownawell et D. Masser [7], qui utilisent à la place la théorie du degré des idéaux homogènes. Une tentative de synthèse de ces deux techniques a par la suite été entreprise dans [6], mais c'est sur la seule théorie du degré que reposent les lemmes de zéros de Masser, Masser - Wüstholz, Moreau, Wüstholz et Philippon dont il s'agira dans la première partie de cet exposé.

Les lemmes de zéros se sont révélés particulièrement efficaces en transcendance (voir [29]), et rares sont désormais les démonstrations de cette théorie qui n'y font pas appel. Plutôt que d'en dresser la liste, il a semblé préférable, dans la deuxième partie de l'exposé, d'en détailler deux applications : la version multidimensionnelle du théorème des 6 exponentielles, obtenue par M. Waldschmidt en réponse à des questions de Weil et de Serre, et l'extension, par G. Wüstholz, de la théorie de Baker aux intégrales abéliennes les plus générales. On mesurera le chemin parcouru grâce aux lemmes de zéros en confrontant ces résultats à ceux de [20] et [44].

Les applications, tout aussi remarquables, des lemmes de zéros à l'indépendance algébrique ne sont donc pas mentionnées dans cet exposé. Nous renvoyons à leur propos à la bibliographie de [29], ainsi qu'aux récents résultats de Y. Nesterenko [38] et de P. Philippon [39], dont les techniques d'élimination effective prouvent d'ailleurs à l'envi que la théorie des formes de Chow n'a pas dit son dernier mot.

Pour donner une cohérence au texte (et lui garder une taille raisonnable), nous n'avons souvent décrit que partiellement les énoncés cités en référence. Que leurs auteurs veuillent bien ici nous en excuser.

I. LEMMES DE ZÉROS

§ 1. LE CADRE GÉNÉRAL

a) *Position du problème* : soient N un entier > 0, et $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif de dimension N sur le corps $\mathbb{C}$ (ou sur tout corps algébriquement clos de caractéristique 0). Dans ce texte, les sous-variétés de $\mathbb{P}^N$ en sont les sous-schémas intègres [15], les hypersurfaces sont les sous-schémas (non nécessairement intègres) $Z(P)$ de $\mathbb{P}^N$ associés aux éléments homogènes non constants P de l'anneau $R = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$, les intersections sont prises au sens des schémas ([13], B. 2.3), et on désigne d'une barre supérieure l'adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^N$. Enfin, si X est un sous-schéma fermé non vide de $\mathbb{P}^N$, on note I_X l'idéal homogène (saturé) de X, et on convient d'appeler *composantes irréductibles* de X, les sous-schémas fermés de X associés aux composantes primaires *isolées* de I_X.

Soient V une sous-variété de $\mathbb{P}^N$, et Y un sous-schéma fermé de V distinct de V. Par *lemme de zéros*, on entend une minoration, aussi précise que possible, du plus petit degré $\omega(Y,V)$ des hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ qui admettent Y pour sous-schéma sans contenir V. Lorsque Y n'est pas réduit, on parle parfois de *lemme de multiplicités*.

On recherche de telles minorations de $\omega(Y,V)$ en fonction d'invariants numériques associés à Y et à V. Les plus couramment utilisés sont le degré et la dimension de sous-schémas construits à partir de Y et V. Rappelons que si X est un sous-schéma fermé non vide de $\mathbb{P}^N$, la fonction de Hilbert de X associe à tout entier $d \geq 0$ le nombre maximal $H(X,d)$ de polynômes homogènes de degré d de R dont les images dans R/I_X sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Si X est projectivement normal, c'est également la dimension de $H^0(\mathcal{O}_X(d))$, ce qui permet de rapprocher l'étude des lemmes de zéros des calculs de postulation en géométrie algébrique (voir [17]). Pour d suffisamment grand (des précisions sur cette expression sont données dans [14]), $H(X,d)$ est la valeur en d d'un polynôme dont le degré est la dimension $\dim X$ de X et le terme constant le quotient par $(\dim X)!$ du degré $\deg X$ de X. Le degré de X est égal à la somme des degrés de ses composantes irréductibles $X_1, \dots, X_\nu$ de dimension maximale, et pour $i = 1, \dots, \nu$, le degré de X_i est le produit de la longueur de I_{X_i} par le degré du schéma réduit $(X_i)_{red}$ associé à X_i.

Pour tester un lemme de zéros, il convient d'obtenir d'abord des majorations de $\omega(Y,V)$. Un simple argument d'algèbre linéaire montre, pour V fermée, que $\omega(Y,V)$ est majoré par le plus petit entier $\tilde{\omega}$ tel que

$$H(V,\tilde{\omega}) > H(Y,\tilde{\omega}) .$$

Comme les fonctions de Hilbert sont difficiles à évaluer pour les petites valeurs de d, cette estimation n'est en fait guère maniable. Un premier pas pour remédier à cette difficulté a été réalisé par Nesterenko [37], qui obtient, pour une *sous-variété* fermée Y de $\mathbb{P}^N$, la majoration

$$H(Y,d) \leq (\deg Y)(4d)^{\dim Y} ,$$

valable pour *tout* entier $d \geq 1$. De la minoration (banale) de $H(\bar{V},d)$ par $\binom{d+\dim V}{\dim V}$, on déduit alors :

PROPOSITION 1 ([37], cor. 1).- *Soient* V *une sous-variété de* $\mathbb{P}^N$ *de dimension* $r > 0$, *et* Y *une sous-variété fermée de* V *de dimension* $s < r$. *Alors :*

$$\omega(Y,V) \leq (4r)^{r/(r-s)} (\deg \bar{Y})^{1/(r-s)} .$$

b) *Le cas des sous-schémas ponctuels* : c'est le plus important pour les applications (voir I, § 2). En voici un exemple. Supposons donné un ensemble $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_\sigma\}$ de points lisses de V, et désignons, pour tout entier $t \geq 1$, par $\Gamma^{[t]}$ le sous-schéma de V dont les composantes irréductibles sont les voisinages infinitésimaux d'ordre t de ces différents points dans V. On note alors $\omega_t(\Gamma,V)$ le nombre $\omega(\Gamma^{[t]},V)$. Si $r = \dim V$, chacune des composantes de $\Gamma^{[t]}$ est de longueur $\binom{t+r-1}{r}$, et on déduit des remarques précédentes la majoration

$$\omega_t(\Gamma,V) \leq \sigma^{1/r}(t+r) .$$

Pour $V = \mathbb{P}^N$, l'étude du comportement de $\omega_t(\Gamma,\mathbb{P}^N)$ en fonction de t, qui apparaît dans les travaux de Nagata sur le 14e problème de Hilbert (voir [35], III, prop. 1), a été considérablement développée au moyen de la théorie des fonctions plurisousharmoniques, en liaison avec le théorème de Bombieri (voir [49], § 7.5 et [9]). Des théorèmes d'annulation, et les techniques développées au § 2 ci-dessous, ont depuis permis d'aboutir aux résultats suivants :

PROPOSITION 2.- *Soient* r *la dimension de* V, ω *le nombre* $\omega(\Gamma,V)$ *et* t *un entier* ≥ 1.

i) ([10]) *pour* $V = \mathbb{P}^N$, *on a:* $\omega_t(\Gamma,\mathbb{P}^N) \geq \frac{\omega+1}{N} t$ (*si* $N \geq 2$) ;

ii) ([53]) *dans le cas général,* $\omega_t(\Gamma,V) \geq \frac{H(\overline{V},\omega-1)}{(\deg \overline{V})\omega^{r-1}}\, t$ (*si* $r \geq 1$).

On renvoie à [17] pour l'étude d'un problème d'interpolation, soulevé par Masser, en dualité avec ces lemmes de multiplicités (voir aussi [27]).

Mais les démonstrations d'approximations diophantiennes amènent à considérer des sous-schémas ponctuels plus généraux que $\Gamma^{[t]}$, ainsi que des situations multihomogènes. Comme l'a remarqué Bombieri, c'est en particulier le cas du théorème de Roth, où l'on se donne un ensemble Γ de $\sigma \geq 2$ points de l'espace affine $V = \mathbb{C}^N$, des nombres réels $a_1, \dots, a_N \geq 0$ et, pour tout point γ de Γ , un nombre réel $\tau_\gamma \geq 0$. On suppose qu'il existe des entiers $D_1, \dots, D_N > 0$ et un polynôme $P(x_1, \dots, x_N)$ de degrés partiels majorés par $D_1, \dots, D_N$, appartenant pour tout point γ de Γ , à l'idéal I_γ engendré par les monômes $\prod_{j=1}^{N} (x_j - \gamma_j)^{t_j}$ où on suppose $\sum_{j=1}^{N} a_j t_j > \tau_\gamma$, ou de façon équivalente, à l'idéal I'_γ engendré par ceux de ces monômes de degrés partiels $\leq D_1, \dots, D_N$. Notons $\lambda(I'_\gamma)$ le volume usuel de l'ensemble $\left\{\xi \in \mathbb{R}^n ;\ 0 \leq \xi_j \leq D_j ;\ \sum_{j=1}^{N} a_j \xi_j \leq \tau_\gamma\right\}$, qui, pour I'_γ primaire, se comporte comme la longueur de I'_γ . Généralisant à $N \geq 2$ variables les résultats obtenus à propos du lemme de Dyson par Bombieri [4] grâce à un calcul de wronskien, et par Viola [47] par voie géométrique, H. Esnault et E. Viehweg établissent dans [11] la version algébrique suivante du lemme de Roth, qui fournit une nouvelle démonstration du théorème de Roth :

THÉORÈME 1 ([11]).- *On suppose que les projections sur chaque axe de coordonnées de* $\mathbb{C}^N$ *séparent les points de* Γ , *que* $D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_N > 0$, *et que* P *n'est pas nul. Alors*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda(I'_\gamma) \leq D_1 \dots D_N \prod_{j=1}^{N} \left(1 + (\sigma-2) \sum_{i=j+1}^{N} \frac{D_i}{D_j}\right).$$

[Bien qu'elle ne soit pas ici vérifiée, on pourra rapprocher l'hypothèse faite sur les projections de Γ de la condition de disjonction des lemmes de zéros multihomogènes de [32] et [40] - voir aussi [47].]

c) *Généralisations* : soient maintenant V un sous-schéma fermé non nécessairement intègre de $\mathbb{P}^N$, de dimension r , et, comme en a), Y un sous-schéma fermé de V de dimension $s < r$. On formalise ici trois problèmes auxquels conduit naturellement l'étude des lemmes de zéros.

Le premier consiste, à l'instar des minima successifs de la géométrie des nombres, à évaluer, pour tout entier $i = 1, \dots, r-s$, la borne inférieure $\omega^{(i)}(Y,V)$ des entiers D vérifiant la propriété suivante : il existe i hypersurfaces $Z_1, \dots, Z_i$ de $\mathbb{P}^N$ de degrés $\leq D$ telles que $V \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_i$ soit un sous-schéma de V de codimension i admettant Y pour sous-schéma. On déduit du théorème de Bézout ([15], I.7.7 ; [7], lemme 3 ; [13], 12.3.1 joint à [7], lemme 5) les inégalités

$$\deg Y \le \deg V \,.\, \omega^{(1)}(Y,V) \qquad \text{si} \quad r-s=1 \,,$$

$$\deg Y \le \deg V \,.\, \prod_{i=1}^{r-s} \omega^{(i)}(Y,V) \qquad \text{si} \quad V \text{ est de Cohen-Macaulay} \,.$$

Lorsque V est une puissance d'une courbe elliptique, et que Y en est un sous-groupe algébrique, une majoration des $\omega^{(i)}(Y,V)$, particulièrement fructueuse pour les applications, a été obtenue par Masser et Wüstholz ([31], th. III) en imposant de plus aux hypersurfaces Z_i de rencontrer V suivant l'un de ses sous-groupes algébriques. Elle se comporte, pour $i = 1$, comme celle de la proposition 1.

En deuxième lieu, on souhaite estimer le minimum $\omega_\infty(Y,V)$ des entiers D tels qu'il existe une famille d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ de degrés $\le D$ dont l'intersection commune avec V coïncide avec Y. Pour $V = \mathbb{P}^N$, cette question revient à rechercher une bonne base de l'idéal I_Y, et s'accompagne de l'étude des syzygies correspondantes (voir [31], th. IV, et les travaux d'A. Galligo et de D. Lazard cités à ce sujet dans [14]).

La dernière question est directement commandée par les lemmes de zéros du paragraphe suivant. Notons $\varpi(Y,V)$ le plus petit des entiers D pour lesquels il existe une famille $\{Z_i \,;\, i \in I\}$ d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ de degrés $\le D$ telles que, *quelles que soient leurs dimensions*, chacune des composantes irréductibles du schéma Y soit une composante irréductible du schéma $V \cap (\bigcap_{i\in I} Z_i)$. Dans ces conditions :

PROPOSITION 3.- i) ([31], th. II) : *on suppose* Y *de dimension pure, et on désigne par* δ *un majorant de* $\omega_\infty(V,\mathbb{P}^N)$. *Alors,* $\deg V$ *est* $\le \delta^{N-r}$, *et pour tout entier* $D \ge \sup(\delta, \varpi(Y,V))$, *on a :*

$$\deg Y \le \delta^{N-r} D^{r-s} \,.$$

ii) ([40]) : *on suppose* Y *et* V *réduits, et on note* $Y_1,\dots,Y_\nu, V_1,\dots,V_\mu$ *leurs composantes irréductibles. Pour tout entier* $D \ge \varpi(Y,V)$, *on a :*

$$\sum_{i=1}^{\nu} (\deg Y_i)\, D^{\dim Y_i} \le \sum_{j=1}^{\mu} (\deg V_j)\, D^{\dim V_j} \,.$$

La démonstration de i) [31] repose sur une localisation simultanée aux différentes composantes de Y_{red}, et sur le théorème de Bézout, joint à des techniques d'évitement des idéaux premiers déjà élaborées dans [36], lemme 14 et [7], prop. B. Comme me l'a indiqué A. Hirschowitz, il suffit d'établir ii) pour une famille $\{Z_i\}$ formée d'un seul élément Z, le réduit d'une intersection de schémas fermés coïncidant avec celui de leurs réduits ; on note alors que, pour tout indice j, $(V_j \cap Z)_{red}$ est de dimension $\dim V_j$ et de degré $\deg V_j$ si $Y_1^{(j)} = V_j \subset Z$, et admet dans le cas contraire des composantes irréductibles $Y_k^{(j)}$ de dimension $(\dim V_j) - 1$, dont les degrés vérifient, d'après Bézout :

$$\sum_{Y_k^{(j)} \subset V_j \cap Z} \deg Y_k^{(j)} \leq D \deg V_j \ .$$

On a donc, dans tous les cas :

$$\sum_{Y_k^{(j)} \subset V_j \cap Z} (\deg Y_k^{(j)})\ D^{\dim Y_k^{(j)}} \leq (\deg V_j)\ D^{\dim V_j} \ ,$$

et on conclut en sommant sur j, puisque toute composante Y_i de Y apparaît au moins une fois dans la famille $\left\{Y_k^{(j)}\right\}_{j,k}$.

Les multiplicités d'intersections ne peuvent, en toute généralité, se calculer à l'aide des seules longueurs (voir [48], 0.5 ; [13] 7.1.5). On ne peut de ce fait remplacer D par $\varpi(Y,V)$ dans l'énoncé i) [31], ni supprimer l'hypothèse de réduction dans ii). Philippon parvient néanmoins ([40], prop. 3.3) à étendre ii) au cas général en supposant que le schéma V est une intersection complète[(1)]. Il serait intéressant de préciser le lien entre ces résultats et les théorèmes de Bézout raffinés de Vogel [48] et de Fulton-Lazarsfeld (voir [13], 12.3.7 pour V de Cohen-Macaulay). Enfin, nous renvoyons à [32], lemme 6 et à [40] pour les versions multihomogènes de ces estimations.

§ 2. LEMMES DE ZÉROS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

a) *Enoncé des résultats* : soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur $\mathbb{C}$. Comme l'a montré Serre ([45], § 1), on peut supposer que G est une sous-variété quasiprojective d'un espace projectif $\mathbb{P}^N$, pour lequel nous reprenons les notations du § 1, que $\bar{G}$ est lisse et que l'addition sur G se prolonge en un morphisme, noté $+$, de $\bar{G} \times G$ sur $\bar{G}$. On note d la dimension de G, et t_G l'espace tangent à l'origine de G, identifié de la façon usuelle à l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}\, G$ de G ; ses éléments agissent sur les anneaux locaux de $\bar{G}$. On désigne enfin par δ un majorant de $\omega_\infty(\bar{G},\mathbb{P}^N)$, et par a un entier vérifiant la propriété suivante : il existe un recouvrement ouvert de $\bar{G} \times G$ et, pour chaque ouvert affine U de ce recouvrement, une famille F_U de $N+1$ polynômes bihomogènes en $2(N+1)$ variables, de degrés par rapport aux $(N+1)$ premières variables majorés par a, telle que pour tout point (γ,g) de U, représenté par des systèmes de coordonnées projectives $X(\gamma)$, $X(g)$, les valeurs de F_U en $(X(\gamma), X(g))$ forment un système de coordonnées projectives de $\gamma + g$. Grâce à [19] et [22][(2)], on peut, tout en conservant une dimension de plongement N raisonnable, choisir δ et a égaux à 2.

Les lemmes de zéros (et de multiplicités) sur les groupes algébriques qu'utilise la théorie des nombres transcendants sont relatifs à des sous-schémas ponctuels Y de G définis au moyen de translations et d'opérateurs différentiels invariants sur G . De façon précise, associons à tout ensemble $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\}$ de points de G et à tout entier $\sigma \geq 0$ la partie $\Gamma[\sigma]$ de G formée des points de la forme

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i\gamma_i \ ; \ m_i \in \mathbb{Z}\ ,\ m_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{\ell} m_i \leq \sigma\ .$$

Parallèlement, désignons, pour tout sous-espace vectoriel Δ de t_G et tout entier $\tau \geq 0$, par $\Delta[\tau]$ l'ensemble des opérateurs différentiels invariants sur G d'ordre $\leq \tau$ engendrés par Δ : si $\partial_1, \ldots, \partial_k$ désigne une base de Δ , c'est un espace vectoriel de dimension $\binom{\tau+k}{k}$ engendré par les opérateurs

$$\partial_1^{t_1} \ldots \partial_k^{t_k} \ ; \ t_i \in \mathbb{Z}\ ,\ t_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{k} t_i \leq \tau\ .$$

Si γ est un point de G , les éléments f de l'anneau local $\mathcal{O}_{\gamma,G}$ tels que $\partial f(\gamma) = 0$ pour tout élément ∂ de $\Delta[\tau]$ forment un idéal de $\mathcal{O}_{\gamma,G}$ de longueur égale à $\dim \Delta[\tau]$, qui définit un sous-schéma $\gamma^{\Delta[\tau]}$ de G (pour $\Delta = t_G$, c'est le τ-ième voisinage infinitésimal de γ dans G , et on peut dans ce cas confronter les résultats qui suivent à la proposition 2. ii) de I, § 1). On dira qu'un élément homogène P de l'anneau $R = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ *s'annule à un ordre* $> \tau$ *le long de* Δ *en* γ si l'hypersurface $Z(P)$ admet $\gamma^{\Delta[\tau]}$ pour sous-schéma. On cherche donc des minorations de $\omega(Y,G)$ pour des sous-schémas Y de la forme

$$\Gamma[\sigma]^{\Delta[\tau]} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma[\sigma]} \gamma^{\Delta[\tau]}\ .$$

On doit à Masser [26] le premier lemme de zéros obtenu dans ce cadre, et un schéma de démonstration valable pour tous les lemmes de zéros sur les groupes algébriques établis par la suite. Masser suppose dans [26] que $\tau = 0$ et que G est une puissance du groupe additif $\mathbb{G}_a$ ou du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ (un résultat partiel, portant sur $\mathbb{G}_a^2$, avait auparavant été obtenu par G. Chudnovsky). La seconde hypothèse disparaît dans le lemme de zéros de Masser et Wüstholz [30]. Une démonstration géométrique de cet énoncé, étendue aux schémas en groupes par M. Brown [5], a depuis été donnée par Moreau [34]. Masser et Wüstholz obtiennent dans [31] et [32] divers raffinements de leur lemme de zéros, chaque fois riches de conséquences, et qui permettent en particulier de considérer des situations multihomogènes, des schémas dont le support $\Gamma[\sigma]$ contient des points de torsion (voir également [28]) et des schémas non réduits, pourvu que Δ soit de dimension 1 .

La première minoration générale de $\omega(\Gamma[\sigma]^{\Delta[\tau]}, G)$ est enfin établie par Wüstholz (voir [54], [59]). Le lemme de multiplicités de Wüstholz suffit pour les généralisations de la théorie de Baker traitées en II, § 2.a ci-dessous, mais introduit des conditions sur l'ensemble des sous-variétés fermées de G difficiles à vérifier en toute généralité. En combinant les techniques précédentes avec une meilleure utilisation des opérateurs différentiels, Philippon est récemment parvenu à ne les faire porter que sur les sous-groupes algébriques de G. Son énoncé, beaucoup plus maniable, a un large champ d'applications. En voici la version homogène, qui englobe, en les raffinant, l'essentiel des résultats (homogènes) mentionnés plus haut. On reprend les notations N, d, δ, a du début de ce paragraphe, et on désigne, pour tout sous-groupe algébrique H de G, par $\deg H$ le degré de $\bar{H}$, et par $\pi_{G/H}$ (resp. $d\pi_{G/H}$) la projection de G sur le groupe algébrique G/H (resp. sa différentielle à l'origine).

THÉORÈME 2 ([40], th. 2.1).- *Soient* $D \geq 1, \sigma, \tau \geq 0$ *des entiers,* Γ *une partie de* G, Δ *un sous-espace vectoriel de* t_G, *et* P *un polynôme homogène en* $N+1$ *variables, de degré* $\leq D$. *On suppose que* P *s'annule à un ordre* $> d\tau$ *le long de* Δ *en chaque point de* $\Gamma[d\sigma]$ *sans être identiquement nul sur* G *(de sorte que* D *est* $\geq \omega(\Gamma[d\sigma]^{\Delta[d\tau]}, G)$ *). Il existe alors un sous-groupe algébrique connexe* H *de* G *distinct de* G *tel que*

$$\dim((d\pi_{G/H}\Delta)[\tau]).\operatorname{card}((\pi_{G/H}\Gamma)[\sigma]).\deg H \leq \delta^{N-d}(aD)^{\dim G/H}.$$

Nous discutons de l'optimalité du théorème de Philippon à la fin du paragraphe suivant. Signalons que sa démonstration fournit l'information supplémentaire suivante sur H : il est contenu dans un translaté de $G \cap Z(P)_{red}$, et vérifie $\varpi(\bar{H},\bar{G}) \leq aD$ (voir également [31], th. I).

b) *Esquisse de la démonstration* : pour clarifier les idées, nous traitons tout d'abord le cas *réduit* $\tau = 0$, en empruntant librement à [34], [32], [40].

Si g est un point de G, on note ρ_g le morphisme de translation par g sur $\bar{G}$. Si X est un (sous-schéma intègre) fermé de G, le fermé $\rho_g^*\bar{X} = \bar{X} - g$ de $\bar{G}$ rencontre G en $\rho_g^* X = X - g$, et son degré est égal à celui de $\bar{X}$.

Soit alors Z le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^N$ associé au polynôme P de l'énoncé. Considérons la suite décroissante des fermés de G définis, pour $r \geq 1$, par

$$X_r = \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma[(r-1)\sigma]} \rho_\gamma^*(Z \cap G)_{red}\Big)_{red}.$$

Comme Z passe par $\Gamma[d\sigma]$ sans contenir G, la dimension de X_1 vaut $d-1$, et X_{d+1} contient au moins le point 0. Il existe donc un indice $r \leq d$ tel que X_r et X_{r+1} admettent une composante irréductible commune V de dimension $\dim X_r$. Soit H la composante neutre du stabilisateur

$$\tilde{H} = \{g \in G,\ V = \rho_g^* V\}$$

de V dans G. On va voir que H, qui est bien un sous-groupe algébrique connexe de G distinct de G, vérifie la conclusion du théorème 2.

Tout d'abord, H et $\tilde{H}$ ont même dimension, et

$$\operatorname{card}((\pi_{G/H}\Gamma)[\sigma]) \,.\, \deg H \leq \operatorname{card}((\pi_{G/\tilde H}\Gamma)[\sigma]) \deg \tilde H \;,$$

puisque le degré de $\tilde H$ est égal au produit de son nombre $[\tilde H : H]$ de composantes connexes par le degré de H . En deuxième lieu, le fibré principal sous $\tilde H$

$$\mathcal{H} = \{g \in G \;,\; V \subset \rho_g^* X_r\} = \Big(\bigcap_{v \in V} \rho_v^* X_r\Big)_{\mathrm{red}}$$

est composé d'un nombre fini de translatés de $\tilde H$, et contient $\Gamma[\sigma]$, puisque $X_{r+1} = \Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma[\sigma]} \rho_\gamma^* X_r\Big)_{\mathrm{red}}$. Par conséquent :

$$\operatorname{card}((\pi_{G/\tilde H}\Gamma)[\sigma]) \,.\, \deg \tilde H \leq \deg \bar{\mathcal{H}} \;.$$

Il reste à majorer le degré de $\bar{\mathcal{H}}$. Par définition, $\mathcal{H}$ est l'intersection des fermés $\rho_{v+\gamma}^*(Z \cap G)_{\mathrm{red}}$, où v (resp. γ) parcourt V (resp. $\Gamma[(r-1)\sigma]$) . En l'absence (à ma connaissance - mais voir [13], 12.3.1) d'un théorème de Bezout convenable par les intersections en nombre quelconque d'hypersurfaces de G , on associe aux comorphismes représentant chaque translation ρ_g une famille d'homomorphismes $\{[\rho_{g,\alpha}] \;,\; \alpha \in \mathbb{A}_g\}$ de l'anneau R , envoyant les formes de degré D sur des polynômes homogènes de degrés $\leq aD$, et tels que $\rho_g^*(Z(P) \cap G)_{\mathrm{red}}$ soit l'intersection avec G de la famille des hypersurfaces $Z([\rho_{g,\alpha}]P)$, où α décrit $\mathbb{A}_g$. Dans ces conditions, $\mathcal{H}$ est l'intersection avec G de la famille des hypersurfaces $Z([\rho_{v+\gamma,\alpha}]P)$, où v, γ, α parcourent V , $\Gamma[(r-1)\sigma]$, $\mathbb{A}_{v+\gamma}$, et les composantes de $\bar{\mathcal{H}}$ forment une partie (en général stricte) de l'ensemble des composantes de leur intersection avec $\bar G$. On déduit donc de la proposition 3 ii) la majoration

$$\deg \bar{\mathcal{H}} \leq (\deg G) \;(aD)^{\dim G - \dim \mathcal{H}} ,$$

qui, après regroupement, fournit l'inégalité du théorème 2, où l'on a même remplacé δ^{N-d} par $\deg G$.

Passons au cas général [40], en supposant, pour alléger, G *complet*. L'invariance des éléments de Lie G permet d'associer à tout point g de G , tout entier $t \geq 0$ et tout élément ∂ de $\Delta[t]$ une famille $\{[\partial_{g,\alpha}] \;,\; \alpha \in \mathbb{B}_g\}$ d'opérateurs $\mathbb{C}$-linéaires sur R , envoyant encore les polynômes homogènes de degré D sur des polynômes homogènes de degrés $\leq aD$, et vérifiant les propriétés suivantes : si P s'annule en g' à un ordre $> t'$ le long de Δ , les polynômes $[\partial_{g,\alpha}]P$ s'annulent en $g'-g$ à un ordre $> t'-t$ le long de Δ ; d'autre part, pour tout sous-schéma fermé X de G , le sous-schéma fermé $(\Delta_g^t)^* X$ de X d'idéal de définition

$$([\partial_{g,\alpha}]Q \;;\; Q \in I_X \;,\; \partial \in \Delta[t] \;,\; \alpha \in \mathbb{B}_g)$$

ne dépend que de X , g et t, coïncide avec $\rho_g^* X$ (qui est encore bien défini en tant que schéma - voir [13], B.2.3) si $t = 0$, et vérifie :

$$\left(\Delta_{g+g'}^{t+t'}\right)^* X = \left(\Delta_g^t\right)^* \left(\left(\Delta_{g'}^{t'}\right)^* X\right) \;.$$

Dans ces conditions, considérons la suite décroissante des sous-schémas fermés de G définis, pour $r \geq 1$ et $Z = Z(P)$, par

$$X_r = \bigcap_{\gamma \in \Gamma[(r-1)\sigma]} \left(\Delta_\gamma^{(r-1)\tau}\right)^* (Z \cap G) \ .$$

L'hypothèse faite sur P entraîne de nouveau l'existence d'un indice $r \leq d$ tel que $(X_r)_{red}$ et $(X_{r+1})_{red}$ admettent une composante irréductible commune V de dimension $\dim X_r$, pour laquelle on reprend les notations H, $\tilde{H}$, $\mathcal{H}$ du cas réduit. Parallèlement à $\mathcal{H}$, on introduit le sous-schéma fermé

$$Y = \bigcap_{v \in V} \rho_v^* X_r \ ,$$

dont $\mathcal{H}$ est le sous-schéma réduit associé, de sorte que Y est de dimension $h = \dim H$, et dont le degré vérifie, en vertu de la proposition 3 i) et des propriétés des opérateurs $[\partial_{g,\alpha}]$:

$$\deg Y \leq \delta^{N-d} \, (aD)^{d-h} \ .$$

Il reste à minorer ce degré. On considère pour cela le fermé

$$\mathcal{H}_\tau = \left(\bigcap_{v \in V} \left(\Delta_v^\tau\right)^* X_r\right)_{red} \ .$$

D'après les propriétés de $(\Delta_g^t)^*$, c'est un fibré principal sous H, qui contient $\Gamma[\sigma]$ puisque $X_{r+1} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma[\sigma]} (\Delta_g^\tau)^* X_r$, et est inclus dans $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}_\tau = ((\Delta_0^\tau))^* Y)_{red}$, chacune de ses composantes connexes est donc un sous-schéma commun aux schémas Y et $(\Delta_0^\tau)^* Y$, et on déduit de la formule de Leibniz que pour toute composante connexe $\gamma + H$ de $\mathcal{H}_\tau$, il existe une composante irréductible Y_γ du schéma Y telle que $(Y_\gamma)_{red}$ et $((\Delta_0^\tau)^* Y_\gamma)_{red}$ coïncident avec $\gamma + H$. La proposition 4 ci-dessous fournit alors une minoration de la longueur de I_{Y_γ}, d'où l'on déduit en définitive :

$$\operatorname{card}((\pi_{G/H}\Gamma)[\sigma]) \, . \, \dim((d\pi_{G/H}\Delta)[\tau]) \, . \deg H \leq \deg Y \ ,$$

et le théorème 2 est établi.

PROPOSITION 4 ([54], lemme 3).- *Soient* H *un sous-groupe algébrique connexe de* G, X *un sous-schéma fermé de* G *d'idéal* I_X *primaire et* t *un entier* ≥ 0. *On suppose que les sous-schémas réduits associés à* X *et à* $(\Delta_0^t)^* X$ *sont tous deux égaux à* H. *Alors, la longueur de* I_X *est au moins égale à* $\dim((d\pi_{G/H}\Delta)[t])$.

Cette proposition est en fait établie par Wüstholz dans le cas d'un sous-schéma intègre H de G quelconque. On peut l'interpréter comme une minoration de la longueur des "*voisinages infinitésimaux d'ordre* t *le long de* Δ" des sous-variétés H de G (voir [33] pour la notation $\int I_H d(\Delta[t])$ relative aux idéaux de ces voisinages, et pour le lien avec les puissances symboliques d'idéaux primaires). Sa démonstration repose, comme celle de la proposition 2 ii), sur la construction d'un système de paramètres convenable de l'anneau local $\mathcal{O}_{H,G}$.

Comme me l'a indiqué P. Philippon, le théorème 2 est, aux constantes près, *optimal* : un simple argument d'algèbre linéaire montre en effet qu'étant donnés un sous-groupe algébrique connexe N de G distinct de G, un système de représentants $\tilde{\Gamma}$ de $\pi_{G/N}\Gamma$ dans Γ, un sous espace vectoriel $\tilde{\Delta}$ de Δ se projetant isomorphiquement sur $d\pi_{G/N}\Delta$ et des entiers D, σ, τ tels que

$$\dim((d\pi_{G/N}\Delta)[d\tau]) \,.\, \mathrm{card}((\pi_{G/N}\Gamma)[d\sigma]) \,.\, \mathcal{H}(\overline{N}, aD) < \mathcal{H}(\overline{G}, D) ,$$

(relation qu'on peut rendre effective au moyen des inégalités précédant la proposition 1), il existe, pour tout choix α_g d'un indice dans chacun des ensembles $\mathcal{B}_g$ introduits plus haut, au moins un élément homogène P de R, d'image non nulle dans $R/I_{\overline{G}}$ et de degré D, tel que

$$[\partial_{\gamma,\alpha_\gamma} P] \in I_{\overline{N}} \quad \text{pour tout} \quad \partial \in \tilde{\Delta}[d\tau] , \; \gamma \in \tilde{\Gamma}[d\sigma] ,$$

et on vérifie aisément que, pour un choix convenable des indices α_γ, un tel polynôme s'annule aux points de $\Gamma[d\sigma]$ à un ordre $> d\tau$ le long de Δ.

II. APPLICATIONS

§ 1. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES SIX EXPONENTIELLES

a) *Enoncé des résultats* : le théorème des 6 exponentielles peut s'énoncer de la façon suivante. Soit t un nombre complexe irrationnel, et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois nombres algébriques non nuls, tels que $\alpha_1^t, \alpha_2^t, \alpha_3^t$ soient algébriques. Alors, les déterminations ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 des logarithmes des α_i ayant servi à définir les expressions α_i^t sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{Z}$ (voir [20]). On conjecture que trois peut être remplacé par deux dans cette assertion : c'est le problème des 4 exponentielles.

Le théorème des 6 exponentielles a été étendu par Waldschmidt [50] aux valeurs de fonctions exponentielles en plusieurs variables, grâce au lemme de zéros de Masser [26], puis, à l'aide du lemme de zéros de Masser et Wüstholz [30], à l'exponentielle des groupes algébriques généraux [51]. Avant de décrire ce résultat, nous introduisons des définitions qui seront utilisées dans toute la suite du texte.

Si L/K est une extension de corps, et V une variété algébrique définie sur K, on note $V(L)$ l'ensemble des points de $V \otimes L$. Soit par ailleurs G un groupe algébrique défini sur K. On convient d'appeler K-*enveloppe algébrique* d'une partie S de $G(L)$ le plus petit sous-groupe algébrique H de G défini sur K tel que $H(L)$ contienne S. On rappelle que l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}\, G$, qu'on identifie comme en I, § 2, à l'espace tangent à l'origine t_G, est naturellement munie d'une K-structure. En particulier, tout sous-groupe algébrique H de $G \otimes L$ dont l'algèbre de Lie est définie sur K est lui-même défini sur K, et la notion de K-*algèbre de Lie algébrique* pour désigner les sous-algèbres de Lie de (Lie G) $\otimes$ L de ce type est dépourvue d'ambiguïté. Enfin, si K est la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, on note $\exp_G$ l'application exponentielle de $t_G(\mathbb{C})$ dans $G(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_G$ le sous-groupe $\exp_G^{-1}(G(\bar{\mathbb{Q}}))$ de $t_G(\mathbb{C})$ formé par les "*logarithmes*" des points algébriques de G. Soit alors V un sous-espace vectoriel de $t_G \otimes \mathbb{C}$. Si V contient une $\bar{\mathbb{Q}}$-algèbre de Lie algébrique non nulle, son intersection avec $\mathcal{L}_G$ a un rang (sur $\mathbb{Z}$) arbitrairement grand. Le théorème de Waldschmidt mesure la "proximité" de V à l'ensemble des $\bar{\mathbb{Q}}$-algèbres de Lie algébriques en fonction du rang de $V \cap \mathcal{L}_G$, et le théorème de Wüstholz (traité au paragraphe suivant) précise cet énoncé lorsqu'on suppose V défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$(3).

On reprend la notation $\pi_{G/H}$ de I, § 2, et on pose $\rho = 1$ si G est un groupe linéaire, $\rho = 2$ sinon.

THÉORÈME 3. ([51], th. 1.1).- *Soient* G *un groupe algébrique commutatif de dimension* d *défini sur* $\bar{\mathbb{Q}}$, *et* V *un sous-espace vectoriel de* $t_G \otimes \mathbb{C}$ *de dimension* n. *On suppose que la* $\bar{\mathbb{Q}}$-*enveloppe algébrique de* $\exp_G(V(\mathbb{C}))$ *coïncide avec* G, *et que le rang* ℓ *de* $V \cap \mathcal{L}_G$ *vérifie l'inégalité* $\ell d > n(\ell + d\rho)$. *Alors il existe un sous-espace vectoriel* W *de* V, *de codimension* n_1, *tel que la codimension* d_1 *dans* G *de la* $\bar{\mathbb{Q}}$-*enveloppe algébrique de* $\exp_G(W(\mathbb{C}))$ *et le corang* ℓ_1 *dans* $V \cap \mathcal{L}_G$ *de* $W \cap \mathcal{L}_G$ *vérifient les inégalités* :

$$n_1 d < d_1 n \quad et \quad \ell_1 d_1 \le n_1(\ell_1 + d_1\rho) .$$

En d'autres termes, la plupart des éléments de $V \cap \mathcal{L}_G$ appartiennent à une $\bar{\mathbb{Q}}$-algèbre de Lie algébrique qui est presque contenue dans V.

Lorsque G est un tore, et que V est un hyperplan de t_G, le théorème 3 revêt une forme plus familière :

COROLLAIRE 1 ([50], cor. 1.2).- *Soient* $\{(\ell_{ij})_{i=1,\dots,n} ; j=1,\dots,\ell\}$ *une famille de* ℓ *points de* $\mathbb{C}^n$ *linéairement indépendante sur* $\mathbb{Z}$, *et* $t_1, \dots, t_n$ *des nombres complexes. On suppose que les* $\ell(n+1)$ *nombres*

$$\alpha_{ij} = \exp(\ell_{ij})\,[i=1,\dots,n\ ;\ j=1,\dots,\ell]\ ,\quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{t_i} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\,\ell_{ij}\Big)[j=1,\dots,\ell]$$

sont algébriques et que $\ell > n(n+1)$. *Alors, les nombres* $1, t_1, \dots, t_n$ *sont linéairement dépendants sur* $\mathbb{Z}$.

On en déduit aisément que si les ℓn nombres ℓ_{ij} sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, chacun des nombres $t_1, \dots, t_n$ est rationnel. Ce résultat fournit une caractérisation des caractères de type (A) (et (A_0)) au sens de Weil :

COROLLAIRE 2 ([50], cor. 1.3).- *Soit* χ *un Grössencharacter d'un corps de nombres. Si la série* L *de Hecke attachée à* χ *a tous ses coefficients algébriques,* χ *est un caractère de type* (A).

Soit maintenant p un nombre premier. Le théorème 3 admet un analogue p-adique, dont le corollaire 1 correspondant ([50], th. 2.2.p) complète un programme proposé par Serre pour étudier les représentations continues ρ du groupe de Galois $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ d'un corps de nombres K dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V :

COROLLAIRE 3 ([16], th. 4 ; [46]).- *Soit* $\rho : \Gamma_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *une représentation* p-*adique abélienne, semi-simple, et rationnelle. Alors,* ρ *est de type Hodge-Tate en chaque place de* K *au-dessus de* p *. En particulier,* $\mathrm{Lie}(\rho(\Gamma_K))$ *est une* $\mathbb{Q}_p$-*sous-algèbre de Lie algébrique de* $\mathrm{End}(V)$.

L'analogue p-adique du théorème 3 fournit également une réponse partielle à la conjecture de Leopoldt sur le rang p-adique du groupe des unités de K (voir [50], cor. 2.2.p, [52]).

b) *Principe de la démonstration* : l'une des étapes des démonstrations de transcendance consiste à extrapoler, grâce à diverses variantes du lemme de Schwarz, les valeurs d'une fonction analytique dont on connaît de nombreux zéros. Si leurs multiplicités sont petites, ces lemmes de Schwarz requièrent en toute généralité (à plusieurs variables) des hypothèses de répartition *métriques*. C'est ainsi qu'un coefficient de densité apparaît dans la première extension, due à Serre [43], du théorème des 6 exponentielles.

Les lemmes de zéros permettent de remplacer ces hypothèses par des conditions de répartition *linéaires* (voir [49], § 1.3) : si G est un groupe algébrique commutatif, et $\mathcal{E}$ un sous-groupe de points de G de rang fini, on pose

$$\mu(\mathcal{E},G) = \inf_{H\neq G}(\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}\, \pi_{G/H}(\mathcal{E}) \,/\, (\dim(G/H))$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des sous-groupes algébriques de G distincts de G , de sorte que $\mu(\mathcal{E},G) \leq (\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}\, \mathcal{E}) \,/\, (\dim G)$. Le théorème 2 entraîne alors, pour tout système générateur Γ de $\mathcal{E}$:

$$\omega(\Gamma[\sigma],G) \geq (a \deg G)^{-1}\, \sigma^{\mu(\mathcal{E},G)} .$$

Montrons comment intervient ce coefficient, en esquissant la démonstration du corollaire 1 ci-dessus, sous la forme équivalente suivante (leur équivalence se déduit aisément de la description des sous-tores de G à partir des caractères de $\mathbb{G}_m$, l'hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$ d'équation $z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$ ne contenant de sous-espace vectoriel non nul défini sur $\mathbb{Q}$ que si $1, t_1, \dots, t_n$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$).

PROPOSITION 5.- *Soient* G *le groupe algébrique* $\mathbb{G}_m^{n+1}$ *et* V *un hyperplan de* $t_G \otimes \mathbb{C}$. *On suppose que* $V \cap \mathcal{L}_G$ *contient un sous-groupe* Y *de rang* $\ell > n(n+1)$. *Alors,* V *contient une sous-algèbre de Lie algébrique non nulle.*

Démonstration ([50],[51]).- A tout entier D suffisamment grand, on associe une fonction F_D régulière sur G, non nulle et représentée par un polynôme de degré $\leq D$, à coefficients entiers pas trop grands, à laquelle on impose un zéro d'ordre élevé en l'élément neutre de G (ce précisément pour n'avoir à faire appel qu'à un lemme de Schwarz à une variable). Un système générateur Γ du groupe $\mathcal{E} = \exp_G(Y)$ ayant été fixé, on déduit de l'algébricité des éléments de $\mathcal{E}$ que F s'annule sur $\Gamma[\sigma]$, où σ est beaucoup plus grand que $D^{1/n}$ ([51], p. 637), et le lemme de zéros entraîne :

$$\mu(\mathcal{E},G) \leq n .$$

Supposons alors que la conclusion de la proposition soit mise en défaut. En particulier, la restriction à V de $\exp_G$ est injective (sans quoi V contiendrait l'algèbre de Lie d'un $\mathbb{G}_m$), et le rang de $\mathcal{E}$ vaut ℓ. D'après l'hypothèse faite sur ℓ, $\mu(\mathcal{E},G)$ ne peut donc prendre sa valeur maximale $\ell/(n+1)$, et il existe ([51], lemme 3.2) un sous-groupe algébrique H de G de dimension $n'+1 > 0$ tel que le groupe $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap H$, de rang ℓ', vérifie :

$$\mu(\mathcal{E}',H) = \frac{\ell'}{n'+1} > \frac{\ell}{n+1} .$$

Mais comme V ne contient pas d'algèbre de Lie algébrique non triviale, V et t_H engendrent $t_G \otimes \mathbb{C}$ et $V_H = V \cap t_H$ est un *hyperplan* de $t_H \otimes \mathbb{C}$. De plus, la description des sous-tores de G montre que l'intersection Y_H de Y avec V_H contient au moins $\ell' - \dim(G/H)$ éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, de sorte que le sous-groupe $\mathcal{E}_H = \exp_G(Y_H)$ de H est de rang $\geq \ell' - \dim(G/H)$ et vérifie :

$$\mu(\mathcal{E}_H,H) \geq \mu(\mathcal{E}',H) - \dim(G/H) .$$

La première partie du raisonnement, appliquée à Y_H, V_H et H, entraîne alors

$$\mu(\mathcal{E}_H,H) \leq n' ,$$

ce qui, après regroupement, fournit sur ℓ la contradiction souhaitée.

Avec les notations de la proposition 5, le théorème de Baker ([44], th. 1) revient à dire que si V est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, l'hypothèse $\ell \geq 1$ suffit à assurer que V contient une sous-algèbre de Lie algébrique non nulle. C'est sous cette forme qu'il sera généralisé au paragraphe suivant (proposition 6). Mais comme l'a remarqué Waldschmidt, la méthode précédente, jointe au lemme de zéros multihomogène de [32], permet de retrouver certains énoncés de la théorie de Baker, et peut même s'avérer plus performante que ses premières variantes (voir [60]).

§ 2. GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DE BAKER

a) *Énoncé des résultats qualitatifs* : soient $\ell_1, \ldots, \ell_n$ des (déterminations de) logarithmes de nombres algébriques non nuls, et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres algébriques tels que le nombre $\beta_1\ell_1 + \ldots + \beta_n\ell_n$ soit algébrique. D'après Baker

([44],[3]), il est alors nul, et si les ℓ_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, les β_i sont tous nuls ; de façon équivalente, si les β_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, les ℓ_i sont tous nuls. On dispose, d'après Masser (voir par exemple [24]) de résultats similaires pour plusieurs types d'intégrales abéliennes. Grâce à son lemme de multiplicités [54], Wüstholz a pu étendre ces énoncés aux logarithmes des groupes algébriques généraux. On reprend les notations du début du paragraphe précédent.

THÉORÈME 4 ([56], th. 1 ; [55], rem. 2).- *Soient* G *un groupe algébrique commutatif défini sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *et* u *un point de* $t_G(\mathbb{C})$ *tel que* $\gamma = \exp_G(u)$ *appartienne à* $G(\overline{\mathbb{Q}})$. *Alors, le plus petit sous-espace vectoriel* V_u *de* t_G *défini sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *et tel que* $V_u(\mathbb{C})$ *contienne* u *est l'espace tangent à l'origine d'un sous-groupe algébrique* H_u *de* G *défini sur* $\overline{\mathbb{Q}}$.

En d'autres termes, la $\overline{\mathbb{Q}}$-enveloppe algébrique d'un élément u de $\mathcal{L}_G$ dans t_G (vu comme un groupe algébrique défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$) est une sous-algèbre de Lie algébrique. On notera à ce propos que la composante neutre de H_u contient en général strictement celle de la $\overline{\mathbb{Q}}$-enveloppe algébrique H_γ de γ dans G.

En choisissant convenablement G et u, on déduit du théorème 4 tous les énoncés d'indépendance linéaire fournis par les diverses variantes de la théorie de Baker, ou d'ailleurs par d'autres méthodes (voir [25]). Nous renvoyons à [55], [56], et [59], § 7 pour une liste précise. Mais le théorème 4 admet bien d'autres conséquences, qu'on déduit aisément de la description explicite des sous-groupes algébriques de G (voir [42], VII, § 1, (7)) et de l'application $\exp_G$ (voir par exemple [12], joint à la construction de Barsotti, précisée dans [8], de fonctions thêta de dérivées à l'origine algébriques), et qui permettent à leur tour d'étudier les 1-formes sur les variétés algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (Wüstholz), les formes automorphes (Scholl, Wolfart), les valeurs de fonctions thêta, etc. En voici deux exemples, généralisant des résultats de Baker, Coates, Masser et de Laurent. On note $\mathrm{End}\, G$ l'anneau des endomorphismes du groupe algébrique $G/\overline{\mathbb{Q}}$.

COROLLAIRE 1 ([58], th. 2).- *Soient* $E_1, \dots, E_n$ *des courbes elliptiques définies sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *et non isogènes. Le* $\overline{\mathbb{Q}}$*-espace vectoriel engendré dans* $\mathbb{C}$ *par les périodes de leurs formes de deuxième espèce définies sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *est de dimension*

$$4 \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} (\mathrm{End}\, E_i))^{-1}$$

et ne contient pas π.

COROLLAIRE 2 ([59], § 8 ; [57]).- *Soient* C *une courbe algébrique définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *et* ξ *une forme différentielle rationnelle sur* C *définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$. *Les périodes non nulles de* ξ *sont des nombres transcendants.*

Démontrons la première assertion du corollaire 1, en supposant pour fixer les idées que toutes les courbes elliptiques E_i ont des multiplications complexes. Si $\omega(i)$ (resp. $\eta(i)$) désigne la forme de 1ère (resp. 2e) espèce usuelle sur E_i, et ω_i (resp. η_i) une de ses périodes non nulles, il s'agit de voir qu'une combinaison linéaire

$$\Lambda = \beta_1\omega_1 + \ldots + \beta_n\omega_n + \alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_n\eta_n ,$$

à coefficients algébriques non tous nuls, est non nulle. Si G désigne l'extension de la variété abélienne $A = E_1 \times \ldots \times E_n$ par $\mathbb{G}_a$ définie par la classe η de $\alpha_1\eta(1) + \ldots + \alpha_n\eta(n)$ dans $H^1(A, \mathcal{O}_A)$, il existe un $\bar{\mathbb{Q}}$-isomorphisme de t_G sur $t_A \times t_{\mathbb{G}_a}$ tel que le point u correspondant à $(\omega_1, \ldots, \omega_n, \alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_n\eta_n)$ appartienne à $\mathcal{L}_G$. Supposons alors que Λ soit nul. Le théorème 4 entraîne l'existence d'un sous-groupe algébrique H de G *distinct de* G, tel que $t_H(\mathbb{C})$ contienne u. En particulier, $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ appartient à $d\pi_{G/\mathbb{G}_a} t_H(\mathbb{C})$ et $\pi_{G/\mathbb{G}_a} H$ coïncide avec A, d'après l'hypothèse de non-isogénie faite sur les E_i. On aboutit à une contradiction si η n'est pas nulle, l'extension G n'admettant alors pas de section. Dans le cas contraire, tous les α_i sont nuls, et le raisonnement précédent, appliqué au point $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de $\mathcal{L}_A$, fournit également une contradiction.

Remarque 1.- Le corollaire 1 s'étend aux variétés abéliennes, où on peut l'exprimer de la façon suivante. Soient A une variété abélienne de dimension g définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et (ω_{ij}) la matrice carrée d'ordre $2g$ formée par les périodes d'une base de $H^1_{DR}(A/\bar{\mathbb{Q}})$ relativement à une base de $H_1(A, \mathbb{Z})$. L'ensemble des relations de dépendance *linéaire* sur $\bar{\mathbb{Q}}$ liant les $4g^2$ nombres ω_{ij} est entièrement déterminé par l'ensemble des *sous-variétés abéliennes* des différentes puissances de A, et le nombre π *n'appartient pas* au $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel qu'ils engendrent dans $\mathbb{C}$ [(4)]. On rapprochera ce résultat d'une conjecture de Grothendieck (voir [1], th. 1 (6)), en vertu de laquelle l'ensemble des relations de dépendance *algébrique* sur $\mathbb{Q}$ liant les $4g^2 + 1$ nombres ω_{ij}, π serait entièrement déterminé par l'ensemble des *cycles de Hodge* sur les différentes puissances de A.

b) *Principe de démonstration* : le théorème 4 est, par passage aux quotients de G, corollaire immédiat de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6 ([54], th. X).- *Soient* G *un groupe algébrique commutatif défini sur* $\bar{\mathbb{Q}}$ *et* V *un hyperplan de* t_G *défini sur* $\bar{\mathbb{Q}}$. *On suppose que* $V(\mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_G$ *contient un point* u *non nul. Alors,* V *contient une* $\bar{\mathbb{Q}}$*-sous-algèbre de Lie algébrique non nulle.*

En effet, u est alors un point complexe de la plus grande $\bar{\mathbb{Q}}$-sous-algèbre de Lie algébrique Lie $H(V)$ contenue dans V, et le groupe $H_u = \cap H(V)$, où V parcourt l'ensemble des hyperplans de t_G contenant V_u, vérifie la conclusion du théorème 4 ([56]). (On aurait pu, dans l'esprit du théorème 3, préciser de façon similaire la conclusion de la proposition 5.)

Esquissons la démonstration [55] de la proposition 6, en supposant, pour alléger, que le point $\gamma = \exp_G(u)$ est d'ordre infini dans G (dans le cas contraire, on introduit, comme dans les premiers travaux de Baker sur cette situation [2], des points de division d'ordre convenable de u). On note d la dimension de G, et Δ la sous-algèbre de Lie de Lie G, de dimension $d-1$, correspondant à V. A tout entier D suffisamment grand, on associe trois entiers S_0, S, T, tels que

$$T^{d-1}S_0 < c_1 D^d < c_1 c_2 T^{d-1} S \ , \ D < c_3 T \ , \ c_4 S < S_0 \ ,$$

pour des constantes $c_1, \ldots, c_4$ très petites, et on construit, avec les notations de I, § 2.a, un polynôme P_D de degré $\leq D$, non identiquement nul sur G, à coefficients entiers pas trop grands, auquel on impose de s'annuler à un ordre $> 2dT$ le long de Δ aux points de l'ensemble $\gamma[S_0]$. On fait alors appel à la *méthode de Baker* usuelle (voir [3]), lemme 9 ; [23], lemme 4.4) : puisque, par hypothèse, le champ de vecteur ∂_u défini par u appartient à $\Delta \otimes \mathbb{C}$, sa technique d'extrapolation, qui, de nouveau, n'utilise qu'un lemme de Schwarz à une variable, jointe à l'algébricité de γ et de Δ, entraîne que P_D s'annule à un ordre $> dT$ le long de Δ aux points de $\gamma[dS]$. (Noter que, contrairement aux constructions classiques de Baker et de Masser, S n'est pas beaucoup plus grand que S_0 : de ce fait, l'ordre des fonctions méromorphes représentant $\exp_G$ importe peu ici.)

D'après le théorème 2, il existe donc un sous-groupe algébrique connexe H de $G \otimes \mathbb{C}$ de codimension > 0 tel que

$$T^{\dim(V/V \cap t_H)} . \operatorname{card} \pi_{G/H}(\gamma[S]) . \deg H \leq c_5 \, D^{\dim G/H} \qquad (*)$$

où c_5 ne dépend pas de la construction de P_D. Par hypothèse, $\gamma[S]$ a S éléments, et D^d est beaucoup plus petit que $T^{d-1}S$, de sorte que H ne peut être le sous-groupe 0. Supposons alors que la conclusion de la proposition 6 soit mise en défaut. Comme V est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $V \otimes \mathbb{C}$ ne contient pas non plus de $\mathbb{C}$-sous-algèbre de Lie algébrique non triviale (en reprenant la démonstration du théorème 2, on voit d'ailleurs que le sous-groupe algébrique H fourni par sa conclusion est défini sur tout corps de définition algébriquement clos commun à G, Δ, Γ et $Z(P)$, donc ici sur $\overline{\mathbb{Q}}$). Par conséquent, V et t_H engendrent t_G, et la codimension de $V \cap t_H$ dans V est égale à celle de H dans G. Mais l'inégalité (*) entraîne alors: $T < c_5^{1/d} D$, ce qui contredit la condition $D < c_3 T$.

Remarque 2.- Le théorème 4 admet une version p-adique, qu'on peut énoncer de la façon suivante : si γ est un point de $G(\overline{\mathbb{Q}})$ où la fonction logarithme p-adique $\log_G$ de G est définie, la *$\overline{\mathbb{Q}}$-enveloppe algébrique* V_γ *de* $\log_G(\gamma)$ *dans* t_G *est l'algèbre de Lie* Lie H_γ de la $\overline{\mathbb{Q}}$-enveloppe algébrique H_γ de γ dans G. Supposons maintenant que G soit le *produit* d'un tore par une variété abélienne définie sur un corps de nombres K , et soit $T_p(G)$ le module de Tate attaché à la partie p-primaire $G(p)$ du sous-groupe de torsion de G . A tout point γ de $G(K)$, on peut associer un homomorphisme λ_γ du groupe de Galois de $\bar{K}$ sur $K(G(p))$ dans $T_p(G)$ en posant :

$$\lambda_\gamma(\sigma) = \{\sigma(\gamma/p^n) - (\gamma/p^n)\}_{n\geq 1} ,$$

les points de division de γ ayant été fixés arbitrairement. Dans ces conditions (voir [41]), *l'image* ν_γ *de* λ_γ *dans* $T_p(G)$ *est commensurable au module de Tate* $T_p(H_\gamma)$ de la composante neutre de H_γ . Ce type de résultat constituait jusqu'à présent l'un des ingrédients des démonstrations de la théorie de Baker (c'est l'argument galoisien mentionné dans l'introduction). Il ne reste plus qu'une analogie d'énoncés (qui ne s'étend d'ailleurs pas sans précautions aux groupes algébriques généraux)...

c) *Minorations de formes linéaires* : comme il est bien connu, ce sont les énoncés quantitatifs de la théorie de Baker qui s'y sont révélés les plus féconds. On sait ainsi que si $A_1 , \dots , A_n , B$ sont des nombres réels ≥ 4 , $b_1 , \dots , b_n$ des entiers rationnels de valeurs absolues $\leq B$, $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls de hauteurs $\leq A_1 , \dots , A_n$, dont on note $\ell_1 , \dots , \ell_n$ les déterminations principales des logarithmes, et si $b_1\ell_1 + \dots + b_n\ell_n$ n'est pas nul, alors

$$|b_1\ell_1 + \dots + b_n\ell_n| > \exp\left(- c \log B . \prod_{i=1}^{n} \log A_i . \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log\log A_i\right)\right) ,$$

où c ne dépend (de façon effective) que de n et du degré de $\mathbb{Q}(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ sur $\mathbb{Q}$ (voir [3], th. 2) ; de cette inégalité découlent des algorithmes de résolution tant d'équations diophantiennes que d'équations diophantiennes exponentielles.

Le théorème de Wüstholz admet de même des versions quantitatives (et effectives). On y minore, en la supposant non nulle, la distance d'un point u de $\mathfrak{t}_G$ à un sous-espace vectoriel V de t_G défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, en fonction des hauteurs de V et du point $\gamma = \exp_G(u)$ et des degrés des corps de définition de V et de γ . Lorsque V ne contient pas de sous-algèbre de Lie algébrique non nulle (ce qui, dans la situation ci-dessus, revient à remplacer $b_1 , \dots , b_n$ par des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, voir la proposition 5 de II, § 1), ces estimations ne posent pas de difficultés : en niant la minoration recherchée, on vérifie, avec les notations de l'alinea précédent, que le champ de vecteurs ∂_u est suffisamment proche de $\Delta(\mathbb{C})$ pour que le procédé d'extrapolation de Baker s'applique encore. On déduit ainsi du théorème 2 le résultat suivant, où on fixe une norme $\| \ \|$ sur $t_G(\mathbb{C})$, et où on convient d'appeler *hauteur* d'un point de $G(\bar{\mathbb{Q}})$ (resp. d'une forme différentielle invariante sur $G/\bar{\mathbb{Q}}$) l'*exponentielle* de la hauteur de Weil (voir [49], § 1.1.d) du point qu'il définit dans

$\mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}})$ (resp. dans $\bar{\mathbb{Q}}^d$, après choix d'une base).

PROPOSITION 7 (voir [54], th. Z).- *Soient* B *et* U *deux nombres réels* ≥ 4 , u *un point de* $\mathfrak{L}_G$ *non nul dont l'image* γ *par* $\exp_G$ *soit de hauteur* $\leq U$ *et* L *une forme linéaire sur* t_G , *définie sur* $\bar{\mathbb{Q}}$, *de hauteur* $\leq B$. *On suppose que le noyau* V *de* L *ne contient pas de sous-algèbre de Lie algébrique non nulle*(5). *Alors :*

$$|L(u)| > \exp(-c\,(\log B)^{d+2}(\log U)^{d}(\log\log U)^{d+2}) ,$$

où c *est effectivement calculable en fonction de la dimension* d *de* G , *de* $||u||$, *du degré des corps de définition de* G, γ *et* L , *et du maximum des hauteurs et des degrés d'un système générateur de l'idéal* $I_{\bar{G}}$.

[La version multihomogène que donne Philippon du théorème 2 dans [40] permettrait du reste de raffiner cette minoration ; même remarque pour les énoncés qui suivent.]

Mais les questions de géométrie diophantienne amènent plutôt à étudier ceux des sous-espaces vectoriels V de t_G qui contiennent, ou sont eux-mêmes, des algèbres de Lie algébriques. Le théorème de Philippon, joint aux méthodes de [31], chap. III, qui relient le degré des sous-groupes algébriques H de G aux équations de t_H dans t_G , permet encore de traiter ces situations. En voici un exemple.

PROPOSITION 8.- *On considère une variété abélienne* A *de dimension* g , *définie sur un corps de nombres* K *plongé dans* $\mathbb{C}$, *un entier* $n > 0$, *et un domaine borné* $\mathfrak{U}$ *de* $t_A(\mathbb{C})$. *Il existe un nombre réel* $\varkappa > 0$ (*resp.* $c > 0$) , *effectivement calculable en fonction de* n *et* g (*resp. de* $n, g, [K:\mathbb{Q}], A$ *et* $\mathfrak{U}$), *vérifiant la propriété suivante. Soient* B *et* U *deux nombres réels* ≥ 3 , $b_1, \dots, b_n$ *des entiers rationnels de valeurs absolues* $\leq B$, *et* $u_1, \dots, u_n$ *des éléments de* $\mathfrak{U}$ *dont les images par* $\exp_A$ *soient des points de* A(K) *de hauteurs* $\leq U$. *Alors*

$$||b_1u_1 + \dots + b_nu_n|| > \exp(-c\,(\log B)^{\varkappa}(\log U)^{\varkappa})$$

dès que $b_1u_1 + \dots + b_nu_n$ *n'est pas nul.*

Indiquons le point clef de la démonstration, en supposant pour simplifier que l'anneau End A des endomorphismes de $A/\bar{\mathbb{Q}}$ est réduit à $\mathbb{Z}$. On désigne par V l'espace tangent à l'origine, supposé distinct de t_{A^n} , du noyau de l'homomorphisme de A^n dans A associé à $(b_1, \dots, b_n)$. On nie la conclusion de la proposition 8, et on choisit en conséquence des paramètres D , S , T dépendant polynômialement de log B et log U . On peut alors suivre la démonstration de la proposition 6, jusqu'à l'inégalité (*), qui entraîne encore que t_H est contenu dans V , et où l'apparition du degré de H est maintenant fondamentale. On en déduit en effet que H contient une sous-variété abélienne A' isogène à A et de degré borné en fonction de D , d'où (voir [31], lemme 7) l'existence d'entiers $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls, de valeurs absolues majorées par $c'(\deg A')^{1/2g}$, donc par une puissance de $(\log B)(\log U)$, tels que $b_1a_1 + \ldots + b_na_n = 0$. En d'autres termes, on a su *quantifier* de façon non triviale le fait, ici évident, que V contient une sous-algèbre de Lie algébrique non nulle. Une récurrence sur l'entier n permet de conclure (et de choisir, par exemple, $\varkappa = (6gn)!$; une majoration de $\varkappa$ linéaire en n vient d'ailleurs d'être annoncée par Wüstholz)(6) .

Soient alors C une courbe algébrique de genre $g \geq 1$, définie sur un corps de nombres K , φ une fonction K-rationnelle sur C non constante, et S un ensemble fini de places de K contenant toutes ses places archimédiennes. D'après le théorème de Siegel - Mahler - Lang, les points de C(K) où φ est définie et prend des valeurs entières hors de S forment un ensemble $C(K, S, \varphi)$ fini. Suivant un programme proposé par Lang [21], et développé par Masser [24], on déduit de la proposition 8 et de son analogue p-adique une nouvelle démonstration de ce théorème, dont le caractère ineffectif ne provient plus "que" d'un recours au théorème de Mordell - Weil (rappelons à ce propos qu'on dispose également, grâce aux travaux de Robinson et Roquette -voir [18]-, d'une démonstration du théorème de Siegel - Mahler - Lang dont l'ineffectivité n'est due qu'au théorème de Thue - Siegel - Roth). Si J désigne la jacobienne de C , et r le rang du groupe J(K) , on peut énoncer :

COROLLAIRE (voir [59], § 7 ; [29], § 4).- *Soit* $R_{J/K}$ *(resp.* N_S *) un majorant* ≥ 1 *du régulateur de* J(K) *(resp. des normes des places finies de* S *). Les points de* $C(K, S, \varphi)$ *sont de hauteur au plus égale à*

$$\exp(cN_S^{\varkappa} R_{J/K}^{\varkappa}) ,$$

où $\varkappa$ *désigne un nombre réel* > 0 *effectivement calculable en fonction de* g *et* r *, et* c *ne dépend (de façon effective*(7)*) que de* g , r , $[K:\mathbb{Q}]$, End J , *et du maximum des hauteurs et des degrés de* φ *et des équations de définition de* C .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. ANDRÉ - *Sur certaines algèbres de Lie associées aux schémas abéliens*, C.R.A.S., Paris, 299, 1984, 137-140.

[2] A. BAKER - *On the periods of the Weierstrass* $\wp$*-function*, Symposia Math., 4, 1968, 155-174.

[3] A. BAKER - *The theory of linear forms in logarithms*, in "Transcendence theory : Advances and Applications", Acad. Press, 1977, chap. I.

[4] E. BOMBIERI - *On the Thue - Siegel - Dyson theorem*, Acta math., 148, 1982, 255-296.

[5] M. BROWN - *Schémas en groupes et lemmes de zéros*, in "Problèmes diophantiens 84-85", Publ. Univ. Paris VI, 1985, exp. n° 3.

[6] D. BROWNAWELL - *Zero estimates for solutions of differential equations*, Birkhäuser Prog. Math., 31, 1983, 67-94.

[7] D. BROWNAWELL - D. MASSER - *Multiplicity estimates for analytic functions, II*, Duke Math. J., 47, 1980, 273-295.

[8] M. CANDILERA - V. CRISTANTE - *Biextensions associated to divisors on abelian varieties and theta functions*, Ann. Sc. N. S. Pisa, 10, 1983, 437-491.

[9] G. CHUDNOVSKY - *Singular points on complex hypersurfaces and multidimensional Schwarz lemma*, Birkhäuser Prog. Math., 12, 1981, 29-69.

[10] H. ESNAULT - E. VIEHWEG - *Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points*, Math. Ann., 263, 1983, 75-86.

[11] H. ESNAULT - E. VIEHWEG - *Dyson's lemma for polynomials in several variables (and the theorem of Roth)*, Invent. Math., 78, 1984, 445-490.

[12] G. FALTINGS - G. WÜSTHOLZ - *Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihre Eigenschaften*, Crelle, 354, 1984, 175-205.

[13] W. FULTON - *Intersection Theory*, Springer Erg. Math., 1984.

[14] M. GIUSTI - *Some effective problems in polynomial ideal theory*, Springer L.N. in Computer Sciences, 174, 1984, 159-171.

[15] R. HARTSHORNE - *Algebraic Geometry*, Springer G.T.M., 1977.

[16] G. HENNIART - *Représentations l-adiques abéliennes*, Birkhäuser Prog. Math., 22, 1982, 107-126.

[17] A. HIRSCHOWITZ - *La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscripta math., 50, 1985, 337-388.

[18] E. KANI - *Non standard diophantine geometry*, Queen's papers p. appl. maths, 54, 1980, 129-179.

[19] F. KNOP - H. LANGE - *Commutative algebraic groups and intersections of quadrics*, Math. Ann., 267, 1984, 555-571.

[20] S. LANG - *Nombres transcendants*, Séminaire Bourbaki 1965-66, exp. n° 305, Benjamin, 1966.

[21] S. LANG - *Diophantine approximation on toruses*, Amer. J. Math., 86, 1964, 521-533.

[22] H. LANGE - *Translations sur les groupes algébriques commutatifs*, C.R.A.S., Paris, 300, 1985, 255-258.

[23] M. LAURENT - *Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, II*, Crelle, 333, 1982, 144-161.

[24] D. MASSER - *Linear forms in algebraic points of abelian functions, III*, Proc. London M.S. 33, 1976, 549-564.

[25] D. MASSER - *A note on Baker's theorem*, in "Recent Progress in Analytic Number Theory", Acad. Press, 1981, vol. 2, chap. 31.

[26] D. MASSER - *On polynomials and exponential polynomials in several complex variables*, Invent. math., 63, 1981, 81-95.

[27] D. MASSER - *Interpolation on group varieties*, Birkhäuser Prog. Math., 31, 1983, 151-171.

[28] D. MASSER - *Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety*, Compositio Math., 53, 1984, 153-170.

[29] D. MASSER - *Zero estimates on group varieties*, Proc. I.C.M., Warszawa, 1983, vol. 1, 493-502.

[30] D. MASSER - G. WÜSTHOLZ - *Zero estimates on group varieties, I*, Invent. math., 64, 1981, 489-516.

[31] D. MASSER - G. WÜSTHOLZ - *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Invent. math., 72, 1983, 407-464.

[32] D. MASSER - G. WÜSTHOLZ - *Zero estimates on group varieties, II*, Invent. math., 80, 1985, 233-267.

[33] D. MASSER - G. WÜSTHOLZ - *Another note on Baker's theorem*, Prep. Univ. Ann Arbor, 1985.

[34] J.-C. MOREAU - *Démonstrations géométriques de lemmes de zéros, II*, Birkhäuser Prog. Math., 31, 1983, 191-197.

[35] M. NAGATA - *On the fourteenth problem of Hilbert*, Tata Inst. L.N., 1965.

[36] Y. NESTERENKO - *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers*, Math. USSR Izv. 11, 1977, 239-270.

[37] Y. NESTERENKO - *Bornes pour la fonction caractéristique d'un idéal premier*, Mat. Sb., 123, 1984, 11-34 [en russe].

[38] Y. NESTERENKO - *Measures of algebraic independence of numbers and functions*, Journées arithmétiques de Besançon (1985, à paraître dans Astérisque).

[39] P. PHILIPPON - *Critères d'indépendance algébrique*, Prep. Ecole polytechnique, 1984.

[40] P. PHILIPPON - *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. SMF, 114, 1986, n° 3.

[41] K. RIBET - *Kummer theory on extensions of abelian varieties by tori*, Duke Math. J., 46, 1979, 745-761.

[42] J.-P. SERRE - *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1959.

[43] J.-P. SERRE - *Dépendance d'exponentielles p-adiques*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 7, 1965-66, exp. n° 15.

[44] J.-P. SERRE - *Travaux de Baker*, Séminaire Bourbaki 1969-70, exp. n° 368, Springer L.N., 180, 1971.

[45] J.-P. SERRE - *Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs*, Astérisque 69-70, 1979, 191-202.

[46] J.-P. SERRE - *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, 1968. [Voir aussi Astérisque, 65, 1979, 155-188.]

[47] C. VIOLA - *On Dyson's lemma*, Ann. Sc. N.S. Pisa, 12, 1985, 105-135.

[48] W. VOGEL - *Results on Bezout's theorem*, Tata Inst. L.N., 1984.

[49] M. WALDSCHMIDT - *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque, 69-70, 1979.

[50] M. WALDSCHMIDT - *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables*, Invent. math., 63, 1981, 97-127.

[51] M. WALDSCHMIDT - *Sous-groupes analytiques de groupes algébriques*, Ann. Math., 117, 1983, 627-657.

[52] M. WALDSCHMIDT - *Dépendance de logarithmes dans les groupes algébriques*, Birkhäuser Prog. Math., 31, 1983, 279-328.

[53] G. WÜSTHOLZ - *Nullstellenabschätzungen auf Varietäten*, Birkhäuser Prog. Math., 22, 1982, 359-362.

[54] G. WÜSTHOLZ - *Multiplicity estimates on group varieties*, Prep. Max Planck Inst., 1984.

[55] G. WÜSTHOLZ - *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen*, Prep. Max Planck Inst., 1984.

[56] G. WÜSTHOLZ - *Some remarks on a conjecture of Waldschmidt*, Birkhäuser Prog. Math., 31, 1983, 329-336.

[57] G. WÜSTHOLZ - *Transzendenzeigenschaften von Perioden elliptischer Integrale*, Crelle, 354, 1984, 164-174.

[58] G. WÜSTHOLZ - *Zum Periodenproblem*, Invent. math., 78, 1984, 381-391.

[59] G. WÜSTHOLZ - *Recent progress in transcendence theory*, Springer L.N., 1068, 1984, 280-296.

[60] K.R. YU - *Linear Forms in elliptic logarithms*, J. Number Th., 20, 1985, 1-69.

Daniel BERTRAND

Université de Paris 6
U.E.R. de Mathématiques, T. 46
4, place Jussieu
F-75230 PARIS CEDEX 05

[Ajouté en Septembre 1986]

Les sujets abordés ici ont connu plusieurs développements depuis Octobre dernier. En particulier :

(1) C'est précisément une hypothèse de type Cohen - Macaulay qu'on trouvera dans la version définitive de [40] (voir aussi D. Brownawell : *Note on a paper of P. Philippon*, Prep. IAS, Princeton, 1986). Elle permet, dans la conclusion du théorème 2, de remplacer δ^{N-d} par deg G .

(2) Il s'agit ici d'une version relative du résultat de [22], également établie par H. Lange (*Families of translations of commutative algebraic groups*, Prep. Univ. Erlangen, 1985).

(3) En introduisant la dimension t du plus grand sous-espace vectoriel de V défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, M. Waldschmidt (*On Gel'fond - Schneider's method in several variables*, Proc. Conf. Durham, 1986) est parvenu à recouvrir d'un énoncé les théorèmes 3 et 4. Dans la situation de la proposition 5, il obtient ainsi l'inégalité : $\ell \leq (n-t)(n+1)$, d'où le résultat de la proposition 6 pour $t = n$.

(4) Pour une application de ce principe aux valeurs de fonctions hypergéométriques, voir J. Wolfart : *Fonctions hypergéométriques : arguments exceptionnels et groupe de monodromie*, in "Problèmes diophantiens 85-86", Publ. Univ. Paris VI, 1986, exp. n° 9.

(5), (6) Comme l'ont démontré P. Philippon et M. Waldschmidt (*Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs*, Prep. Univ. Paris VI, 1986), la restriction imposée à V à la proposition 7 peut être levée dans tous les cas (sous réserve, bien entendu, d'admettre dans la conclusion la possibilité que $L(u)$ soit nulle). Leur méthode permet, à la proposition 8, de remplacer l'exposant de $\log U$ par n'importe quel nombre réel $> n$ et de supprimer la référence à End J dans son corollaire.

(7) Cette dépendance pourrait être explicitée, grâce aux estimations de hauteurs sur l'espace de Siegel établies par D. Masser pour obtenir une version modulaire de [28] (voir : *Specializations of finitely generated subgroups of abelian varieties*, Prep. Univ. Ann Arbor, 1986).