YVES MEYER

Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. n° 662, p. 209-223

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__209_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1986
38ème année, 1985-86, n° 662

PRINCIPE D'INCERTITUDE, BASES HILBERTIENNES ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

par Yves MEYER

1. INTRODUCTION

La recherche de bases hilbertiennes reliées au principe d'incertitude est motivée, de la façon suivante, par R. Balian ([1]). "On peut avoir intérêt, en théorie des communications, à représenter un signal oscillant comme superposition d'ondelettes élémentaires, dont chacune possède à la fois une fréquence et une localisation dans le temps assez bien définies. L'information utile est, en effet, souvent véhiculée à la fois par les fréquences émises et par la structure temporelle du signal (l'exemple de la musique est caractéristique). La représentation d'un signal comme fonction du temps exhibe mal le spectre des fréquences en jeu, alors qu'au contraire son analyse de Fourier masque l'instant d'émission et la durée de chacun des éléments du signal. Une représentation adéquate devrait combiner les avantages de ces deux descriptions complémentaires, tout en présentant un caractère discret mieux adapté à la théorie des communications.

Un problème analogue se pose en mécanique quantique, mais cette fois pour des ondes de probabilité.

Le principe d'incertitude interdit de préciser à la fois la position et l'impulsion d'une particule. Mais il peut être commode, pour des raisons pédagogiques ou pour mieux comprendre certains phénomènes à l'aide de concepts de la mécanique classique, de travailler dans une représentation intermédiaire dont chaque fonction de base serait assez bien définie à la fois en position et en impulsion".

Désignons par $x \in \mathbb{R}^n$ la variable de position (variable notée q en mécanique quantique) et par $\xi \in \mathbb{R}^n$ la variable d'impulsion (qui correspond à la fréquence dans le cas de la musique). Rappelons l'énoncé du principe d'incertitude. On désigne par $\psi(x)$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n;dx)$ normalisée par $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \|\psi\|_2 = 1$. On suppose, en outre que $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx$ converge, ainsi que $\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi$ où $\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-ix.\xi} \psi(x)dx$ est la transformée de Fourier de ψ . Dans ces conditions, on définit les valeurs moyennes x_0

et ξ_0 de x et ψ relativement aux mesures de probabilité $|\psi(x)|^2 dx$ et $|\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$ par $x_0 = \int x|\psi(x)|^2 dx$ et $\xi_0 = \int \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$. On calcule ensuite les variables et les écarts-types correspondants par :

(1.1) $$(\Delta x)_\psi = \left(\int |x-x_0|^2 |\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

et

(1.2 $$(\Delta \xi)_\psi = \left(\int |\xi-\xi_0|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^n}\right)^{1/2} .$$

Le principe d'incertitude donne une limite numérique à la possibilité de localiser simultanément ψ autour de x_0 et $\hat{\psi}$ autour de ξ_0. On a $(\Delta x)_\psi (\Delta \xi)_\psi \geq \frac{n}{2}$ et le minimum est atteint lorsque $\psi(x)$ est une gaussienne. Le problème que nous allons résoudre est le suivant. Peut-on trouver une base hilbertienne ψ_i, $i \in I$, de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et une constante C telles que l'on ait, pour tout $i \in I$,

(1.3) $$(\Delta x)_{\psi_i} (\Delta \xi)_{\psi_i} \leq C .$$

Les états cohérents de la mécanique quantique (dont nous allons rappeler la définition) fournissent une version continue de la base que nous cherchons à construire. Ces états cohérents seront obtenus par l'action unitaire d'un groupe localement compact G sur un vecteur $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ choisi de sorte que $(\Delta x)_{\varphi_0} (\Delta \xi)_{\varphi_0}$ soit fini. Cette action de groupe préservera ce produit.

Le passage à la construction d'une base hilbertienne est plus délicat. On remplace G par un réseau convenable $\Lambda \in G$ et φ_0 par un ensemble fini de $2^n - 1$ fonctions $\psi^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$.

Soit donc G un groupe localement compact (dont les éléments seront notés g), dg une mesure de Haar invariante à gauche sur G et U une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H. La représentation U est dite de carré intégrable si elle est irréductible et s'il existe un vecteur non nul $\varphi_0 \in H$ tel que $\int_G |\langle U(g)\varphi_0,\varphi_0\rangle|^2 dg$ converge. On note $c(\varphi_0)$ la valeur de cette intégrale et l'on a alors l'identité remarquable

(1.4) $$f = \frac{1}{c(\varphi_0)} \int_G \langle f,U(g)\varphi_0\rangle\, U(g)\varphi_0\, dg .$$

permettant de représenter tout vecteur $f \in H$ comme une combinaison de vecteurs de l'orbite de φ_0 sous l'action unitaire de G. On a, en conséquence, la "formule de Parseval"

(1.5) $$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{c(\varphi_0)} \int_G \langle f_1,U(g)\varphi_0\rangle \overline{\langle f_2,U(g)\varphi_0\rangle}\, dg .$$

Soient G le groupe des transformations affines $g(y) = ty+x$ de $\mathbb{R}^n$ $(t>0, x\in\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{G}$ le groupe obtenu en adjoignant à G les transformations orthogonales $\rho \in O_n$. La mesure de Haar invariante à gauche sur $\tilde{G}$ est alors $dg = dx\,t^{-n-1}dt\,d\rho$ lorsque $g(y) = t\rho(y)+x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\rho \in O_n$. La mesure de Haar $d\rho$ sur O_n est normalisée par $\rho(O_n) = 1$.

On considère la représentation unitaire U de $\tilde{G}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par

(1.6) $$U(g)f(y) = t^{-n/2} f(g^{-1}(y)) \quad \text{si} \quad g(y) = t\rho(y) + x \ .$$

Si $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a une décroissance à l'infini et une régularité suffisantes pour que $(\Delta x)_{\varphi_0}$ et $(\Delta\xi)_{\varphi_0}$ soient tous deux finis, alors, avec les notations précédentes $(\Delta x)_{U(g)\varphi_0} = t(\Delta x)_\varphi$ tandis que $(\Delta\xi)_{U(g)\varphi_0} = t^{-1}(\Delta\xi)_{\varphi_0}$.

Donc le produit qui intervient dans le principe d'incertitude de Heisenberg ne change pas sous l'action unitaire de $\tilde{G}$. La représentation U est irréductible et (1.4) a lieu dès que $\int_{\tilde{G}} |\langle U(g)\varphi_0, \varphi_0\rangle|^2 dg$ converge.
Supposons, pour simplifier, φ_0 radiale et posons $\psi_t(y) = t^{-n}\varphi_0(t^{-1}y)$. La condition sur φ_0 équivaut à la convergence de $\int_0^\infty (\hat{\varphi}_0(t\xi))^2 \frac{dt}{t}$ pour $\xi \neq 0$. Alors cette intégrale ne dépend pas de $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et sera notée $c(\varphi_0)$. Finalement (1.4) s'écrit

(1.7) $$f = \frac{1}{c(\varphi_0)} \int_0^\infty f * \psi_t * \psi_t \frac{dt}{t} \ .$$

Les identités du type (1.7) ont été introduites et utilisées par A.P. Calderon, dès les années 60, en théorie de l'interpolation.

Si φ_0 est radiale et vérifie $|\varphi_0(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-1}$, alors (1.7) équivaut à $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx = 0$. L'exemple que nous avons en vue est donné par $\varphi_0(x) = c_n \frac{|x|^2 - n}{(|x|^2+1)^{(n+3)/2}}$ où c_n est choisie de sorte que $\hat{\varphi}_0(\xi) = |\xi|\exp(-|\xi|)$. Si $g(y) = ty + x$, on a $\langle f, U(g)\varphi_0\rangle = t^{n/2}(f * \psi_t)(x) = t^{n/2}\, v(x,t)$ où $v(x,t) = -t \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ et où $u(x,t)$ est la solution du problème de Dirichlet usuel dans le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \,]0,+\infty[$ avec $f(x) = u(x,0)$.

La théorie de Littlewood - Paley - Stein nous a appris à décrire les espaces fonctionnels classiques par des conditions portant sur la norme du gradient du prolongement harmonique (ou, plus simplement, sur $|v(x,t)|$) . La représentation des fonctions en série d'ondelettes nous permettra d'obtenir un analogue discret de la théorie de Littlewood - Paley - Stein : les espaces fonctionnels classiques seront caractérisés par les modules des coefficients d'ondelettes (théorème 3 ci-dessous).

Comme on peut le deviner, nous obtiendrons une base hilbertienne compatible avec le principe d'incertitude en remplaçant (1.4) par une version discrète où l'intégrale sur G devient une somme sur le réseau dyadique $\Lambda \subset G$, que nous allons maintenant définir.

Le réseau dyadique est l'ensemble de toutes les transformations affines de $\mathbb{R}^n$ de la forme $D_j R_k$ où $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $R_k(y) = y + k$ et $D_j(y) = 2^j y$. Désignons par $K \subset G$ l'ensemble compact des transformations affines $\alpha x + \beta$ où $1 \leq \alpha \leq 2$ et $0 \leq \beta_j \leq 1$ $(1 \leq j \leq n)$. Alors il est facile de voir que les parties compactes λK , $\lambda \in \Lambda$, forment une partition de G , à des ensembles de mesure nulle près. C'est pourquoi Λ est appelé un réseau.

2. ONDELETTES ET BASES HILBERTIENNES

Nous nous proposons d'établir une version discrète de (1.4), à savoir

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{\varepsilon\in E} \langle f, U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)}\rangle \, U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)} \, , \tag{2.1}$$

où E est un ensemble fini contenant 2^n-1 éléments, Λ est le réseau dyadique et où les vecteurs $U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)}$, $\lambda \in \Lambda$, $\varepsilon \in E$, forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Comme, de plus, nous allons appliquer (2.1) à des distributions tempérées f , nous exigerons que les fonctions $\psi^{(\varepsilon)}$ appartiennent à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz. Il en résulte que les $\psi^{(\varepsilon)}$ appartiendront au sous-espace $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ des fonctions dont tous les moments sont nuls.
Contrairement à ce qui se passe dans le cas continu, nous ne disposons, à l'heure actuelle, d'aucune méthode générale pour construire les fonctions $\psi^{(\varepsilon)}$. L'existence d'algorithmes ayant les propriétés que nous venons de décrire semble un accident.
Les différentes fonctions $U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)}$ vérifient, uniformément en $\lambda \in \Lambda$, la condition (1.3). Ces fonctions seront appelées des "ondelettes". La raison de cette terminologie est qu'en dimension 1, la transformée de Fourier de ψ est supportée par $\frac{2\pi}{3} \le |\xi| \le \frac{8\pi}{3}$; est donc assez bien localisée en fréquences et il en est de même pour les fonctions $U(\lambda)\psi$ à condition d'employer une échelle exponentielle (les octaves en musique ...). La localisation de ψ elle-même est la meilleure possible, compte tenu de celle de $\hat{\psi}$. Comme G. David l'a montré, on peut, dans la définition du réseau Λ , remplacer 2 par $\vartheta = 1 + \frac{1}{m}$; $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 1$ et ψ doit être changée en conséquence. Dans le choix que nous ferons ci-dessous, les fréquences apparaissant dans chaque terme $U(\lambda)\psi$ couvrent exactement deux octaves, ce qui n'est pas très précis. Dans le choix de G. David, ces deux octaves deviendront (dans l'échelle exponentielle des fréquences) un intervalle arbitrairement petit.

Désignons par $Q = Q(j,k)$ le cube dyadique défini par $2^j x - k \in [0,1[^n$, par Q_j l'ensemble de tous les cubes $Q(j,k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et par Q la réunion des Q_j , $j \in \mathbb{Z}$. Si $\lambda(x) = 2^{-j}(x+k)$, alors $U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)}$ a la même position relativement à $Q(j,k)$ que $\psi^{(\varepsilon)}$ relativement à $[0,1[^n$. Pour cette raison, nous écrirons $U(\lambda)\psi^{(\varepsilon)} = \psi_Q^{(\varepsilon)}$.

Entrons maintenant dans les détails de la construction de nos bases hilbertiennes.
Nous commençons par définir des fonctions remarquables $\vartheta(t)$, $\alpha(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ d'une variable réelle, appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz, en ce qui concerne les trois dernières. Nous imposons à $\vartheta(t)$ d'être impaire, indéfiniment dérivable, égale à $\frac{\pi}{4}$ si $t \ge \frac{\pi}{3}$ (et donc à $-\frac{\pi}{4}$ si $t \le -\frac{\pi}{3}$) .
Nous construisons ensuite $\alpha(t)$ qui est indéfiniment dérivable, à support compact

et paire. Cette fonction $\alpha(t)$ est, en outre, nulle si $0 \le t \le \frac{2\pi}{3}$ ou si $t \ge \frac{8\pi}{3}$. Enfin $\alpha(t) = \frac{\pi}{4} + \vartheta(t-\pi)$ si $\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3}$ et $\alpha(2t) = \frac{\pi}{2} - \alpha(t)$ pour ces mêmes valeurs de t. Finalement $\psi \in S(\mathbb{R})$ est définie par sa transformée de Fourier $\hat{\psi}(t) = e^{-it/2} \sin \alpha(t)$ tandis que $\varphi \in S(\mathbb{R})$ est donnée par $\hat{\varphi}(t) = \cos \alpha(t)$ si $|t| \le \frac{4\pi}{3}$ et $\hat{\varphi}(t) = 0$ si $|t| \ge \frac{4\pi}{3}$. On a donc

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos((x-\tfrac{1}{2})t) \sin \alpha(t)\, dt \,. \tag{2.4}$$

La fonction $\psi(x)$ est réelle, à décroissance rapide et vérifie $\psi(1-x) = \psi(x)$. Nous désignons par I la collection de tous les intervalles dyadiques $I(j,k) = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$ et nous poserons alors $\psi_I(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. On a alors

THÉORÈME 1.- *La collection des ondelettes* ψ_I, $I \in I$, *est une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R})$.

Pour le montrer, on définit une suite remarquable E_j d'opérateurs régularisants imitant les opérateurs E_j d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu F_j engendrée par les intervalles $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, $k \in \mathbb{Z}$.
On définit, pour toute distribution tempérée $f \in S'(\mathbb{R})$, la moyenne "adoucie" de f sur l'intervalle $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$ par $\lambda_{(j,k)}(f) = 2^j \int \varphi(2^j x - k) f(x)\, dx$.
On construit alors l'opérateur régularisant d'approximation E_j, $j \in \mathbb{Z}$, par

$$E_j(f)(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{(j,k)}(f) \varphi(2^j x - k) \,, \tag{2.5}$$

la somme étant prise en k. On montre sans peine la convergence de $E_j(f)$ vers f, pour toutes les normes d'espaces fonctionnels homogènes, quand j tend vers $+\infty$.
Appelons $D_{(j,k)} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur de projection orthogonale sur l'ondelette ψ_I, $I = I(j,k)$; c'est-à-dire que $D_{(j,k)}(f) = \langle f, \psi_I \rangle \psi_I$. On a alors l'identité remarquable suivante (où la somme est prise par rapport à k)

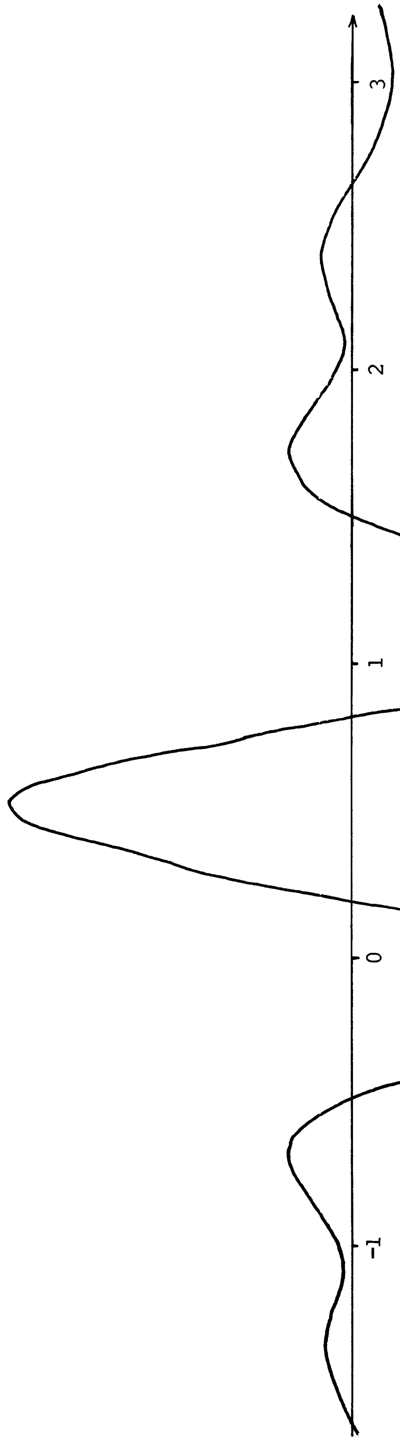
$$\sum_{-\infty}^{\infty} D_{(j,k)} = E_{j+1} - E_j \,. \tag{2.6}$$

Si f appartient à $L^2(\mathbb{R})$, alors $\lim_{j \downarrow +\infty} \|E_j(f)\|_2 = 0$ et $\lim_{j \uparrow +\infty} \|f - E_j(f)\|_2 = 0$.
On a donc

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} D_{(j,k)} = 1 \,. \tag{2.7}$$

Passons alors à la preuve du théorème 1. L'orthogonalité entre les ψ_I, $I \in I$, se vérifie à la main, tandis que la complétude résulte de (2.7).
Pour mieux situer la base que nous allons construire en dimension n, il est préférable de rappeler la construction du système de Haar pour $L^2(\mathbb{R}^n)$. On appelle $h^{(0)}(x)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1[$ et $h^{(1)}(x)$ la fonction égale à 1 si $0 \le x < \frac{1}{2}$, à -1 si $\frac{1}{2} \le x < 1$ et à 0 ailleurs.

Graphe de la fonction $\psi(t)$



On désigne par E l'ensemble des $2^n - 1$ suites $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de 0 ou de 1, à l'exception de la suite ne comprenant que des zéros. On définit successivement $h^{(\varepsilon)}(x) = h^{(\varepsilon_1)}(x_1) \ldots h^{(\varepsilon_n)}(x_n)$ puis $h_Q^{(\varepsilon)}(x) = 2^{nj/2} h^{(\varepsilon)}(2^j x - k)$ lorsque le cube dyadique Q est défini par $2^j x - k \in [0,1[$. Alors la collection des $h_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$; c'est le système de Haar. Il convient d'observer que $(\Delta\xi)_{h_Q^{(\varepsilon)}} = +\infty$

Désignons par D_j l'opérateur défini par $D_j(f) = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \langle f, \psi_Q^{(\varepsilon)} \rangle \psi_Q^{(\varepsilon)}$. Alors $D_j = E_{j+1} - E_j$ où E_j est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu F_j engendrée par les cubes $Q \in \mathcal{Q}_j$.

Nous allons imiter cette construction en introduisant une régularité de classe C^∞. On pose $\psi^{(0)}(x) = \varphi(x)$, $\psi^{(1)}(x) = \psi(x)$ puis, cette fois sur $\mathbb{R}^n$, $\psi^{(\varepsilon)}(x) = \psi^{(\varepsilon_1)}(x_1) \ldots \psi^{(\varepsilon_n)}(x_n)$ où $\varepsilon \in E$. Finalement pour tout cube dyadique Q défini par $2^j x - k \in [0,1[^n$, on pose $\psi_Q^{(\varepsilon)}(x) = 2^{nj/2} \psi^{(\varepsilon)}(2^j x - k)$.

THÉORÈME 2.- *La collection des* $\psi_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, *est une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Montrons comment ce résultat découle du théorème 1. Pour la commodité des notations, on se limitera à $n = 2$. On écrit, alors, en reprenant l'identité (2.6),

$$\begin{aligned} E_{j+1} \otimes E_{j+1} - E_j \otimes E_j &= \sum_k \sum_{k'} D_{j,k} \otimes D_{j,k'} \\ &+ \sum_k \sum_{k'} E_{j,k} \otimes D_{j,k'} + \sum_k \sum_{k'} D_{j,k} \otimes E_{j,k'} . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous avons désigné par $E_{j,k}$ (resp. $D_{j,k}$) l'opérateur de projection orthogonale sur $2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ (resp. $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$). Les trois termes du second membre de (2.7) correspondent à $\varepsilon = (1,1)$, $\varepsilon = (0,1)$ et $\varepsilon = (1,0)$.

L'orthogonalité entre les différentes fonctions $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ est facile et laissée au lecteur.

G. David a remarqué que la construction précédente peut se généraliser. On remplace l'échelle dyadique 2^j par ϑ^j où $\vartheta = 1 + \frac{1}{m}$, $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$. L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ qui intervient dans la construction de la fonction $\vartheta(t)$ est alors remplacée par $\left[-\frac{m\pi}{2m+1}, \frac{m\pi}{2m+1}\right]$ et, de même, les nombres $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$ qui interviennent dans la construction de $\hat{\psi}$ deviennent $m\pi - \frac{m\pi}{2m+1}$, $m\pi + \frac{m\pi}{2m+1}$ $(m+1)\pi + \frac{(m+1)\pi}{2m+1}$. Enfin $\hat{\psi}(t) = |\hat{\psi}(t)| e^{-it/2}$.

La fonction φ est définie par sa transformée de Fourier qui est égale à 1 sur l'intervalle $\left[-m\pi + \frac{m\pi}{2m+1}, m\pi - \frac{m\pi}{2m+1}\right]$ et à 0 hors de $\left[-m\pi - \frac{m\pi}{2m+1}, m\pi + \frac{m\pi}{2m+1}\right]$.

Les détails sont laissés au lecteur.

3. ONDELETTES ET BASES INCONDITIONNELLES

Nous venons d'établir l'identité fondamentale

(3.1) $$f = \sum_{\varepsilon\in E} \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \langle f,\psi_Q^{(\varepsilon)}\rangle\, \psi_Q^{(\varepsilon)}$$

donnant la décomposition d'une fonction arbitraire $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dans la base hilbertienne des ondelettes. Cet algorithme a une propriété remarquable qui le distingue de toute autre décomposition dans une base hilbertienne : la régularité de f est caractérisée par la décroissance des modules des coefficients d'ondelettes et si f appartient à un des espaces fonctionnels classiques servant à mesurer cette régularité, la série (3.1) converge vers f pour la norme correspondante. Pour préciser ce qui vient d'être dit, nous allons introduire une échelle d'espaces fonctionnels homogènes. Commençons par décrire le "bas de l'échelle", à savoir l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont tous les moments sont nuls. On notera V ce sous-espace, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'espace dual V' est l'espace quotient des distributions locales modulo les polynômes.

Les fonctions $f \in V$ sont caractérisées par la décroissance rapide de leurs coefficients d'ondelettes : $\alpha_f(\varepsilon,Q) = \langle f,\psi_Q^{(\varepsilon)}\rangle = 0((1+|k|)^{-m}\, 2^{-m|j|})$ lorsque $|k|+|j|$ tend vers l'infini. La série d'ondelettes converge alors vers f pour la topologie de V.

La convergence de la série d'ondelettes d'une distribution $S \in V'$ a lieu pour la topologie $\sigma(V',V)$. En d'autres termes, il y a convergence numérique après avoir intégré contre $f \in V$. Si S est la constante 1, tous ses coefficients d'ondelettes sont nuls et l'on a bien $1 = 0$ après intégration contre une fonction d'intégrale nulle.

Nous considérons maintenant une situation intermédiaire où $V \subset B \subset V'$, B étant un espace de Banach tel que les deux inclusions soient continues et d'images denses. Nous allons nous restreindre à des espaces B tels que la série d'ondelettes converge pour la norme de B, indépendamment de l'ordre des termes (la série d'ondelettes est une famille sommable). Ceci nous amène aux définitions suivantes.

Les espaces de Banach qui ressemblent le plus aux espaces de Hilbert sont ceux qui possèdent une *base inconditionnelle*. Cela signifie qu'il existe une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de vecteurs de l'espace de Banach B en question, ayant les deux propriétés suivantes.

(3.2) *Tout vecteur* $x \in B$ *s'écrit* $x = \sum_0^\infty \alpha_k e_k$ *où les* α_k *sont des scalaires tels que* $\lim_{m\uparrow+\infty} \|x - \sum_0^m \alpha_k e_k\|_B = 0$, *les* α_k *étant alors uniques.*

(3.3) *Il existe une constante* C *telle que, pour tout* $m \geq 1$ *et toute suite* α_k,

$0 \le k \le m$, *on ait* $\|\sum_0^\infty \lambda_k \alpha_k e_k\|_B \le C\|\sum_0^m \alpha_k e_k\|_B$ *dès que* $\sup_{0\le k\le m}|\lambda_k| \le 1$.

Alors le critère d'appartenance d'une série convergente $\sum_0^\infty \alpha_k e_k$ à B ne dépend que de la suite des $|\alpha_k|$, $k \in \mathbb{N}$. En outre, les séries convergentes en question sont commutativement convergentes.

Une fois exclus les espaces $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et ceux qui s'y rattachent (ils sont exclus parce qu'ils n'ont pas de bases inconditionnelles), la base des ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est une base inconditionnelle pour tous les espaces fonctionnels classiques (L^p , $1 < p < +\infty$, $W^{s,p}$, espaces de Sobolev, espaces de Besov ...).

Beaucoup d'espaces usuels sont des duaux B^* d'espaces de Banach B ayant une base inconditionnelle mais n'ont pas de base inconditionnelle parce qu'ils ne vérifient pas (3.2).

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base inconditionnelle de B . Il existe alors une suite e_k^* , $k \in \mathbb{N}$, d'éléments de B^* , bi-orthogonale à la suite e_k , $k \in \mathbb{N}$. Tout $y \in B^*$ s'écrit, de façon unique, $y = \sum_0^\infty \beta_k e_k^*$ où la série converge pour la topologie $\sigma(B^*,B)$. En général, la convergence n'a pas lieu au sens de la norme de B^* . Cependant on a encore la propriété (3.3). L'appartenance de y à B^* est caractérisée par l'ordre de grandeur des modules $|\beta_k|$ des coefficients.

Les exemples de paires (B,B^*) que nous avons en vue sont (H^1,BMO) ou bien $(B_1^{-r,1},C^r)$ pour $r > 0$. Nous avons désigné par $B_q^{s,p}$ l'espace de Besov homogène défini par $2^{sj}\|\Delta_j(f)\|_p \in l^q(\mathbb{Z})$, avec les notations de [15]. Le dual de $B_1^{-r,1}$ est l'espace de Hölder homogène usuel C^r .

Le cas limite $r = 0$ est aussi intéressant. L'espace de Besov $B_1^{0,1}$ a été systématiquement étudié par G. de Souza et O'Neil. Son dual est, dans sa version complexe, l'espace de Bloch et, dans sa version réelle, l'espace vectoriel engendré par les dérivées premières des fonctions de la classe de Zygmund (définie par $|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)| \le C|y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$).

THÉORÈME 3.- *Une distribution* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *appartient à* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, *si et seulement si ses coefficients d'ondelettes* $\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)$ *vérifient* $\left(\sum_{Q\ni x} |\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)|^2|Q|^{-1}\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n;\, dx)$. *Si* $p = 1$, *cette dernière condition caractérise l'espace* H^1 *de Stein et Weiss. Pour* $s \in \mathbb{R}$, *on a* $f \in W^{s,p}$ $(1 < p < +\infty)$ *si et seulement si ses coefficients d'ondelettes* $\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)$ *vérifient* $\left(\sum_{Q\ni x} |\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)|^2|Q|^{-1}(1+4^j)^s\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}\,;dx)$. *On a* $f \in B_q^{s,p}$ *(espace de Besov homogène) si et seulement si* $\sup_{\varepsilon\in E}|<f,\psi_Q^{(\varepsilon)}>| = \alpha(k,j)$ *vérifie*

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\alpha(k,j))^p\right)^{1/p} 2^{j(s+n(1/2-1/p))}\right\}^q\right)^{1/q} < +\infty ,$$

avec les changements usuels si $p = +\infty$ *ou* $q = +\infty$.

On a $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *, l'espace de John et Nirenberg si et seulement si ses coefficients d'ondelettes* $\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)$ *vérifient la condition de Carleson : il existe une constante* C *telle que, pour tout cube dyadique* R *, on ait* $\sum_{Q \subset R} |\alpha_Q^{(\varepsilon)}(f)|^2 \le C|R|$ *, la somme étant étendue aux sous-cubes dyadiques* $Q \subset R$ *.*

On peut préciser le théorème 3 en définissant un opérateur unitaire $U : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ par $U(\psi_Q^{(\varepsilon)}) = h_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$. Alors U , restreinte à $S_0(\mathbb{R}^n)$, se prolonge en un isomorphisme entre l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ et sa version dyadique.
De même, U est un isomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même pour $1 < p < +\infty$ et U établit (par transposition) un isomorphisme entre l'espace $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ et sa version dyadique ([13]). On retrouve ainsi un théorème célèbre de B. Maurey.

4. LA VERSION LOCALE DES ONDELETTES

Dans la décomposition d'une fonction en série d'ondelettes, il y a deux sommes. L'une est indexée par $k \in \mathbb{Z}^n$ et correspond à un changement d'origine et elle revient à déplacer notre instrument d'analyse ("l'ondelette analysatrice"). L'autre est une somme en $j \in \mathbb{Z}$. L'interprétation de 2^{-j} est la "résolution" : si l'on veut voir des détails de grandeur 2^{-m} $(m \ge 1)$, il convient de pousser jusqu'à $j = m$ la sommation en j . On pose, en effet, $\varphi(x) = \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)$ et l'on appelle respectivement $\alpha^{(\varepsilon)}(k,j)$ les coefficients d'ondelettes de f et $\beta(k,m)$ les produits scalaires de f avec $2^{mn}\varphi(2^m x - k)$. On a alors l'identité

$$\sum_{j<m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\varepsilon\in E} \alpha^{(\varepsilon)}(k,j)\psi_{j,k}^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \beta(k,m)\varphi(2^m x - k) .$$

Cela implique que, tant que j ne dépasse pas m , les sommes obtenues sont trop lisses pour que l'on puisse voir des détails petits et compliqués de taille inférieure à 2^{-m} .

Poussons à l'extrême ce point de vue et supposons que le support singulier de f soit contenu dans une partie compacte K . Alors pour reconstruire f , modulo une erreur indéfiniment dérivable, il suffit, pour tout $\varepsilon > 0$, de restreindre la série d'ondelettes aux cubes Q , de côtés ne dépassant pas ε et dont la distance à K ne dépasse pas ε .

Une seconde version locale des ondelettes est obtenue en définissant les ondelettes périodisées. Ces ondelettes périodisées serviront à analyser les espaces fonctionnels composés de fonctions f , définies par $\mathbb{R}^n$, périodiques de période 1 en chaque variable.

Si $j \ge 0$ et si $r = (r_1,\ldots,r_n)$ est une suite d'entiers telle que $0 \le r_1 < 2^j,\ldots,0 \le r_n < 2^j$, on pose

$$\psi_{j,r}^{(\varepsilon)}(x) = 2^{nj/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi^{(\varepsilon)}(2^j x + 2^j k - r) . \tag{4.1}$$

On rappelle que ε est une suite $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ de 0 ou de 1 , à l'exception de la suite $(0,0,\ldots,0)$ et que $\psi^{(\varepsilon)}(x) = \psi^{(\varepsilon_1)}(x_1)\ldots\psi^{(\varepsilon_n)}(x_n)$ avec $\psi^{(0)}(x) = \varphi(x)$, $\psi^{(1)}(x) = \psi(x)$.

Chaque fonction $\psi_{j,r}^{(\varepsilon)}$ est périodique de période 1 en chaque variable. On a $\psi_{j,r}^{(\varepsilon)}(x) = \vartheta_j^{(\varepsilon)}(x-2^{-j}r)$ et, restreinte à $[-\ell,\ell]^n$, $0<\ell<1$, chaque fonction $\vartheta_j^{(\varepsilon)}(x)$ s'écrit

$$\vartheta_j^{(\varepsilon)}(x) = 2^{nj/2}\,\psi^{(\varepsilon)}(2^j x) + R_j^{(\varepsilon)}(x) \tag{4.2}$$

où, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout entier N , $2^{jN}\partial^\alpha R_j(x)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\ell,\ell]^n$.

En d'autres termes, les ondelettes périodisées sont asymptotiquement des ondelettes tronquées.

Pour finir, nous allons réordonner la suite $\psi_{j,r}^{(\varepsilon)}$. On pose $\gamma_0(x) = 1$; ensuite $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_{2^n-1}(x)$ sont, à l'ordre près, les fonctions $\psi_{0,0}^{(\varepsilon)}(x)$ où $\varepsilon \in E$. Puis si $2^{nj} \le m < 2^{n(j+1)}$, les fonctions $\gamma_m(x)$ sont, à l'ordre près, les $(2^n-1)2^{nj}$ fonctions $\psi_{j,r}^{(\varepsilon)}$ (où $\varepsilon \in E$ et $0 \le r_1 < 2^j$ etc.).

Les propriétés de cette suite $\gamma_m(x)$ de fonctions périodiques sont encore meilleures que celles de la suite des ondelettes. En effet, cette suite $\gamma_m(x)$ est une base pour les espaces limites comme l'indique le théorème suivant.

THÉORÈME 4.- *La suite des fonctions* $\gamma_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, *que nous venons de définir est une base hilbertienne de* $L^2([0,1]^n)$.

C'est une base pour l'espace des fonctions continues, périodiques de période 1 *en chaque variable. C'est également une base pour l'espace des fonctions de classe* C^m , $m \in \mathbb{N}$, *périodiques de période* 1 *en chaque variable. C'est aussi une base pour l'espace* $L^1([0,1]^n)$.

C'est une base inconditionnelle pour les versions périodiques des espaces décrits par le théorème 3 (L^p , $W^{s,p}$, *espaces de Sobolev, espaces de Besov,* H^1 , BMO , C^r *pour* $r \notin \mathbb{N}$ *etc.).*

Il convient d'observer que l'espace BMO-périodique qui intervient ici n'est pas l'espace des restrictions à $[0,1]^n$ des fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$ mais l'espace, plus petit, des restrictions à $[0,1]^n$ des fonctions de BMO périodiques de période 1 en chaque variable (p. ex. la fonction $\log x$, restreinte à $[0,1]$, n'appartient pas à l'espace BMO-périodique).

L'espace H^1-périodique est l'espace H^1 du tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ et n'est pas l'espace des restrictions à $[0,1]^n$ des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Nous ne pouvons résister au plaisir d'écrire la caractérisation des espaces de Hölder C^r (1-périodiques en chaque variable) dans la base des $\gamma_m(x)$. La fonction f appartient à C^r si et seulement si $\langle f,\gamma_m\rangle = O(m^{-(1/2+r/n)})$.

En particulier, toute série $\sum_0^\infty \alpha_m\gamma_m(x)$ telle que $|\alpha_m| = m^{-(1/2+r/n)}$, pour

$m \geq 1$, définit une fonction $f(x)$ de classe C^r , 1-périodique en chaque variable, qui ne vérifie, en aucun point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(x_0) = o(|x-x_0|^r)$. Cette construction est beaucoup plus souple et naturelle que celle de Weierstrass. L'espace C^r , $r > 0$, est défini dans [15]. En particulier si $r = 1$, il convient de remplacer l'espace usuel C^1 par la classe de Zygmund définie dans [15].

5. ONDELETTES ET OPÉRATEURS

Soit V l'espace $S_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de test dont tous les moments sont nuls et soit V' le dual (topologique) de V . Désignons par B , $V \subset B \subset V'$, l'un de ces espaces fonctionnels (décrits par le théorème 3) pour lesquels les ondelettes forment une base inconditionnelle. On peut aussi choisir pour B le dual d'un tel espace.

Appelons φ la fonction associée à ψ par le théorème 1. Posons $\varphi_Q(x) = 2^{nj}\varphi(2^jx-k)$ lorsque Q est défini par $2^jx-k \in [0,1[^n$.

Il existe alors une action remarquable de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur B donnée par :

$$\pi(a,f) = \sum_{\varepsilon\in E}\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \langle a,\varphi_Q\rangle \langle f,\psi_Q^{(\varepsilon)}\rangle \psi_Q^{(\varepsilon)} . \tag{5.1}$$

On a supposé $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f \in B$. En d'autres termes, l'opérateur qui à f associe $\pi(a,f)$ est diagonal dans la base des ondelettes ; les valeurs propres correspondantes étant $\langle a,\varphi_Q\rangle$ sont effectivement bornées. La continuité de cette action résulte de (3.3).

On se propose ensuite de montrer que l'on a

$$\|\pi(f,g)\|_2 \leq C\|f\|_2\|g\|_{BMO} . \tag{5.2}$$

Selon une idée de J.L. Journé, on fixe g dans BMO et l'on étudie l'opérateur qui à f associe $\pi(f,g)$. Son noyau-distribution vérifie $|\partial/\partial y_j\, K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ $(x \neq y$, $1 \leq j \leq n)$. Cet opérateur envoie L^∞ dans BMO . Cela implique (grâce à la décomposition atomique de H^1) qu'il envoie H^1 dans L^1 . Par interpolation, cet opérateur est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on obtient (5.2).

Nous allons maintenant écrire les opérateurs de para-produit de J.-M. Bony ([2]) dans la base des ondelettes. Si $0 < r < 1$ et si $a(x)$ appartient à $C^r(\mathbb{R}^n)$ et à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, le para-produit $\pi(a,f)$ est donné, modulo un opérateur r-régularisant, par l'identité (5.1). Un opérateur est r-régularisant s'il est continu de l'espace de Sobolev H^s dans H^{s+r} pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On peut même, modulo une seconde erreur qui est r-régularisante, remplacer la moyenne adoucie $\langle a,\varphi_Q\rangle$ par la valeur prise par a en $2^{-j}k$. Dans cette réalisation du para-produit, on a donc $\pi_0(a,\psi_Q^{(\varepsilon)}) = a(2^{-j}k)\,\psi_Q^{(\varepsilon)}$.

Si $m < r < m+1$, l'algèbre des opérateurs para-différentiels n'est plus commutative, modulo les opérateurs r-régularisants. Une réalisation $\pi_m(a,\psi_Q^{(\varepsilon)})$ du para-produit est alors donnée par

(5.3) $$\pi_m(a,\psi_Q^{(\varepsilon)}) = \Big(\sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\,(x-2^{-j}k)^{\alpha}\,\partial^{\alpha}a(2^{-j}k)\Big)\psi_Q^{(\varepsilon)}\ .$$

La base des ondelettes permet d'obtenir des résultats inattendus sur certaines algèbres d'opérateurs de Calderon - Zygmund. Rappelons d'abord la définition de l'algèbre $\mathcal{A}$ de P.G. Lemarié ([10], [11], [14]). Un opérateur T appartient à $\mathcal{A}$ si, d'une part, T est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et si, de plus, les deux conditions supplémentaires suivantes sont satisfaites :

(5.4) la restriction à l'ouvert $y \neq x$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ du noyau-distribution $K(x,y)$ de T est une fonction C^∞ vérifiant $|\partial_x^\alpha\,\partial_y^\beta\,K(x,y)| \le C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$

(5.5) T et son adjoint T^* sont des endomorphismes de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

Les opérateurs $T \in \mathcal{A}$ sont caractérisées par leurs matrices dans la base des ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$. Les conditions sur les coefficients $\gamma^{(\varepsilon,\varepsilon')}(Q,R) = \langle T(\psi_Q^{(\varepsilon)})\ ,\ \psi_R^{(\varepsilon')}\rangle$, $Q \in \mathcal{Q}$, $R \in \mathcal{Q}$, sont symétriques en (Q,R) . Appelons $[Q,R]$ le plus petit entier m tel que $mQ \supset R$ et $mR \supset Q$, mQ désignant le cube dont le centre est celui de Q et dont le côté est m-fois celui de Q . Alors les conditions sont tout simplement l'existence d'une suite C_q , $q \in \mathbb{N}$, telle que l'on ait :

(5.6) $$|\gamma^{(\varepsilon,\varepsilon')}(Q,R)| \le C_q[Q,R]^{-q}$$

(pour tout $q \ge 1$, tout Q , tout R , etc.).

Appelons $\mathcal{G}$ le groupe de toutes les permutations g de l'ensemble produit $E \times \mathcal{Q}$ telles que, pour une certaine constante C , on ait $[Q,Q'] \le C$ dès que $g(\varepsilon,Q) = (\varepsilon',Q')$. Soit $U_g : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur unitaire défini, avec ces mêmes notations, par $U_g(\psi_Q^{(\varepsilon)}) = \psi_{Q'}^{(\varepsilon')}$.

Nous venons de construire une représentation de $\mathcal{G}$ par des opérateurs unitaires $U_g \in \mathcal{A}$. Ces opérateurs U_g sont bornés sur tous les espaces H^s . Désignons par $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ l'idéal bilatère formé par les opérateurs T qui, pour un certain $\varepsilon > 0$, envoient H^s dans $H^{s+\varepsilon}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

L'étude du calcul symbolique pour l'algèbre $\mathcal{A}$ revient à celle de l'algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Mais on peut facilement construire deux permutations g_1 et g_2 de $\mathcal{G}$ telles que les opérateurs unitaires correspondants U_1 et U_2 engendrent, modulo $\mathcal{I}$, le groupe libre à deux éléments, ce qui va à l'encontre d'un calcul symbolique au sens habituel.

6. L'HISTOIRE DU SUJET

La transformation en ondelettes (wavelet transform) a été découverte et explicitée, dans sa version continue, par J. Morlet. La motivation des travaux de J. Morlet et de ses collaborateurs a été le traitement numérique du signal en sismique par réflexion (dans le cadre de la recherche pétrolière du groupe Elf-Aquitaine).

On retrouve l'identité (1.7) dans les travaux de A.P. Calderón en théorie de l'interpolation.
Parallèlement et pour des motivations différentes, divers auteurs écrivent des algorithmes discrets utilisant des fonctions de la forme $2^{nj/2}\,\psi(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Par exemple, L. Carleson lisse le système de Haar pour obtenir une base inconditionnelle de l'espace H^1 tandis que Frazier et Jawerth, fidèles au programme de Guido Weiss, écrivent des algorithmes de décomposition atomique pour les espaces de Besov. Il va sans dire que les chemins suivis par ces mathématiciens ne peuvent conduire à la base orthonormale décrite ci-dessus. La découverte de cette base est accidentelle.
Les théorèmes 1 et 2 doivent beaucoup à R.R. Coifman et P.G. Lemarié. Le théorème 3 est essentiellement contenu dans les travaux déjà cités de L. Carleson, M. Frazier et B. Jawerth et le théorème 4 a été découvert par G. David.
A. Grossmann a été notre chef d'orchestre. C'est grâce à lui que les membres de la R.C.P. "Ondelettes" ont pu collaborer efficacement et que ce travail a été réalisé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BALIAN - *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, Série II, 1357-1362 (1er Juin 1981).

[2] J.-M. BONY - *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Sc. E.N.S. 14(1981) 209-246.

[3] A.P. CALDERÓN, A. TORCHINSKY - *Parabolic maximal functions associated with a distribution*, Advances in Mathematics, 16, 1, (1975), 1-64 et 24, 2, (1977) 101-171.

[4] L. CARLESON - *An explicit unconditional basis in* H^1, Bull. des Sciences Math., 104, (1980), 405-416.

[5] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN, Y. MEYER - *Painless non-orthogonal expansions*, (à paraître).

[6] G. DAVID, J.-L. JOURNÉ - *A boundedness criterion for generalized Calderon-Zygmund operators*, Annals of Mathematics, 120 (1984) 371-397.

[7] M. FRAZIER, B. JAWERTH - *Décomposition of Besov spaces* (Dept. of Mathematics, Washington University, St. Louis MO 63130 U.S.A.).

[8] P. GOUPILLAUD, A. GROSSMANN, J. MORLET - *Cycle octave and related transforms in seismic signal analysis*, Geoexploration 23 (1984/1985), Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam 85-102.

[9] A. GROSSMANN and J. MORLET - *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM, J. Math. Anal. 15, 4 (1984).

[10] P.G. LEMARIÉ - *Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières* (à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[11] P.G. LEMARIÉ - Thèse (c/o Mme DUMAS, Bâtiment 425, Faculté des Sciences, 91405 Orsay).

[12] P.G. LEMARIÉ, Y. MEYER - *Ondelettes et bases hilbertiennes*, à paraître à la Revista Ibero-Americana (Universidad Autónoma de Madrid).

[13] B. MAUREY - *Isomorphismes entre espaces* H^1, Acta Mathematica, 145, 1-2 (1980), 79-120.

[14] Y. MEYER - *Real analysis and operator theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 43 (1985), 219-235.

[15] Y. MEYER - *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires*, Sém. Bourbaki 1979-80, exposé n° 560, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 842(1981), 293-302.

[16] Th. PAUL - Thèse (de Doctorat d'Etat), Centre de Physique Théorique, Marseille Luminy (Décembre 1985).

[17] E. STEIN - *Singular integrals and differentiability properties of functions*, (Princeton Univ. Press), 1970.

[18] P. WOJTASZCZYK - *The Franklin system is an unconditional basis in* H , Arkiv för Matematik, 20, 293-300.

Yves MEYER

École Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX