ROBERT AZENCOTT

Une approche probabiliste du théorème de l'indice (Atiyah-Singer)

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 633, p. 7-18
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__7_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 633 Novembre 1984

UNE APPROCHE PROBABILISTE DU THÉORÈME DE L'INDICE (ATIYAH-SINGER)
[d'après J.-M. Bismut]

par Robert AZENCOTT

1. Glossaire : structure spin et opérateur de Dirac

1.1. Spineurs : Soit V un espace euclidien de dimension $n=2k$. Soit $J \in \mathrm{End}(V)$, antisymétrique, tel que $J^2=-I$. On a alors $V = W \oplus JW$ avec $\dim W = k$ et V est $\mathbb{R}$-isométrique au complexifié $\tilde{W}$ de W, muni du produit scalaire hermitien évident.

L'algèbre extérieure complexe $S = \Lambda(\tilde{W})$, de dimension 2^k sur $\mathbb{C}$, munie du produit scalaire hermitien usuel s'écrit $S = S^+ \oplus S^-$, où S^+ (resp. S^-) est formé des éléments de degré pair (resp. impairs) ; l'espace hermitien S est celui des *spineurs* en dimension n.

1.2. L'algèbre de Clifford : Pour $v \in V$ la *multiplication de Clifford* $A_v \in \mathrm{End}(S)$ s'écrit $A_v = \mathcal{M}_v - \mathcal{M}_v^*$, où $\mathcal{M}_v$ est la multiplication extérieure par v, et vérifie $A_v^2 = -\|v\|^2 I$. Les A_v, $v \in V$ engendrent une sous-algèbre réelle Cl_n de $\mathrm{End}(S)$, l'*algèbre de Clifford*. La sous-algèbre Cl_n^+ de Cl_n engendrée par les produits d'ordre pair $A_{v_1}A_{v_2}\dots A_{v_{2r}}$, $r \le k$, laisse S^+ et S^- *invariants*.

1.3. Le groupe $G = \mathrm{Spin}(n)$: C'est le groupe des $g \in Cl_n^+$ vérifiant $g^*g = gg^* = I$, et $gA_vg^{-1} = A_{\sigma(g).v}$ pour tout $v \in V$, avec $\sigma(g) \in \mathrm{End}(V)$. On sait que σ est un homomorphisme de G sur $SO(n)$ de noyau réduit à deux éléments.

1.4. Structure spin : Soit M *une variété riemannienne*, compacte, connexe, orientée, de classe C^∞ et de dimension $n = 2k$. Soit $N \xrightarrow{\pi} M$ le fibré des repères orthonormés orientés sur M. Supposons M *munie d'une structure spin*, c'est-à-dire d'un fibré principal $\bar{N} \xrightarrow{\bar{\pi}} M$ de groupe structurel G avec la factorisation $\bar{\pi} = \pi \circ \bar{\sigma}$ où $\bar{\sigma} : \bar{N} \to N$ vérifie $\bar{\sigma}(\bar{u}g) = \bar{\sigma}(\bar{u})\sigma(g)$ pour tout $\bar{u} \in \bar{N}$, $g \in G$.

Comme G opère à gauche sur les espaces de spineurs S, S^+, S^-, on définit *trois fibrés vectoriels hermitiens* F, F^+, F^- par $F = (\bar{N} \times S)/G$ etc... Chaque $\bar{u} \in \bar{N}$ s'identifie à une isométrie de S sur la fibre F_x en $x = \bar{\pi}(\bar{u})$, telle que $\overline{ug}.v = \bar{u}.gv$ pour tout $g \in G$, $v \in S$. De plus $\bar{u}$ envoie S^+, S^- sur F_x^+, F_x^-. De même les $u \in N$ sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ sur T_xM avec $x = \pi u$.

1.5. Un fibré auxiliaire : Soit ξ *un fibré vectoriel hermitien* quelconque sur M, de dimension ℓ. Sur le fibré X des repères unitaires de ξ, de groupe structurel $U(\ell)$, on choisit une connexion arbitraire λ ; on munit le fibré produit $\bar{N} \times_M X$ du produit de la connexion de Levi-Civita sur $\bar{N}$ par la connexion λ. On note ∇ *l'opérateur de dérivée covariante* sur le fibré $F \otimes \xi$, et $\Gamma(Z)$ *l'ensemble des sections* C^∞ d'un fibré quelconque Z.

1.6. Opérateur de Dirac à coefficients dans ξ : C'est l'opérateur différentiel D, d'ordre 1, agissant sur les sections f de $F \otimes \xi$ par

$$Df(x) = \sum_{1\leq i\leq n} (A_{v_i} \otimes I)\nabla_{v_i} f(x) , \qquad x \in M \tag{1}$$

où (v_i) est une base orthonormée (arbitraire) de T_xM et $A_{v_i} \in \mathrm{End}(F_x)$ est la multiplication de Clifford. L'opérateur D est autoadjoint sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ et envoie $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^- \otimes \xi)$, ainsi que $\Gamma(F^- \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$. Soient D^+, D^- les restrictions de D à ces espaces. Il s'agit de calculer l'*indice* $\mathrm{Ind}(D^+) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$.

2. Densité de l'indice et noyau de la chaleur

2.1. Formule de l'indice : Les travaux de Atiyah-Singer, Atiyah-Bott-Patodi, Gilkey, Getzler, et altri fournissent la formule $\mathrm{Ind}(D^+) = \int_M \mathfrak{I}(x)dx$, avec identification précise de $\mathfrak{I}(x)$; de plus la classe d'équivalence (en cohomologie de de Rham) de la forme différentielle $\mathfrak{I}(x)dx$ est *indépendante* du choix de la métrique sur M et de la connexion sur X ; la classe de $\mathfrak{I}(x)dx$ se calcule à partir des formes de Pontrjagin sur M et du caractère de Chern $\mathrm{ch}(\xi)$.

2.2. Le semi-groupe $e^{-(t/2)D^2}$: Il agit sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ par

$$e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y) f(y)dy \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi) , \quad x \in M \tag{2}$$

où le noyau $Q_t(x,y)$ est une application linéaire de $(F \otimes \xi)_y$ dans $(F \otimes \xi)_x$. De plus $Q_t(x,x)$ laisse $F_x^+ \otimes \xi_x$ et $F_x^- \otimes \xi_x$ invariants ; pour tout $A \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ ayant la même propriété notons A^+, A^- les restrictions de A à ces sous-espaces et $\rho(A) = \mathrm{tr}(A^+) - \mathrm{tr}(A^-)$. On a alors d'après [1]

$$\mathrm{Ind}\, D^+ = \int_M \rho[Q_t(x,x)]dx$$

d'où la densité de l'indice

$$\mathfrak{I}(x) = \lim_{t\to 0} \rho[Q_t(x,x)] . \tag{3}$$

2.3. L'approche de Bismut : Comme $e^{-(t/2)D^2}$ est subordonné au semi-groupe de la chaleur, Bismut [7] estime $Q_t(x,y)$ grâce à *une version approchée* $\hat{P}$ de la loi de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ sur M conditionnée par $\{x_0 = x , x_t = y\}$ et utilise un mouvement *brownien auxiliaire* W_t sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Il obtient une expression probabiliste de $\mathfrak{I}(x)$ à partir de W et d'un pont brownien $\hat{w}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'élégants calculs différentiels stochastiques permettent de découpler les variables indépendantes W et $\hat{w}$ et d'identifier ainsi $\mathcal{J}(x)dx$ au terme de plus haut degré dans le *produit* de deux formes obtenues séparément par les homomorphismes de Chern-Weil de TM et ξ .

L'efficacité et la finesse du calcul sont remarquables, mais la méthode est un peu alourdie par l'estimation $\hat{P}$ dont la construction requiert un travail technique considérable (Bismut [6]). Nous avons préféré remplacer l'utilisation de $\hat{P}$ par un simple développement de Taylor trajectoriel du brownien conditionné, dans l'esprit de [3]. Ce point de vue s'applique aussi au calcul de Bismut [7] concernant les formules de point fixe de Lefschetz (Atiyah-Singer [2]).

Signalons enfin une belle démonstration récente (Berline-Vergne [4]) des formules de l'indice, basée sur l'étude (non probabiliste !) du noyau de la chaleur sur le fibré des repères.

3. Expression probabiliste de $e^{-(t/2)D^2}$

3.1. L'opérateur D^2 et le laplacien horizontal : Pour $f \in \Gamma(F \otimes \xi)$, le *laplacien horizontal* Δ^H agit sur f par

$$\Delta^H f(x) = \sum_{1\leq i\leq n} (\nabla_{v_i})^2 f(x) , \qquad x \in M$$

où $v_1 \ldots v_n$ est une base orthonormée quelconque de T_xM . Un calcul formel classique (cf. [10], [7]) donne pour $x \in M$

$$-\frac{1}{2} D_x^2 = \frac{1}{2} \Delta_x^H + C_x$$

avec $C_x \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ donné par

$$C_x = -\frac{1}{8} K(x) I - \frac{1}{2} \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{v_i} A_{v_j} \otimes L_x(v_i, v_j) . \tag{4}$$

Ici $K(x)$ est la courbure scalaire de M en x ; les v_i forment une base orthonormée quelconque de T_xM , les $A_v \in \mathrm{End}(F_x)$ sont les multiplications de Clifford (cf. 1.2); L est le tenseur de courbure du fibré ξ et les $L_x(v_i, v_j)$ sont des endomorphismes antihermitiens de ξ_x .

3.2. Différentielles stochastiques : Lorsque φ_t est une semi martingale brownienne nous notons $d\varphi_t$ sa différentielle stochastique de Stratonovitch, $\delta\varphi_t$ sa différentielle d'Ito. Dans tout le contexte des semi martingales browniennes à valeurs dans des variétés, l'*interprétation formelle* " $d\varphi_t = \varphi_t' dt$ " est *cohérente* et justifiée par Malliavin [12], Bismut [5] ; c'est celle qui sous-tend toutes les notations adoptées ici. L'indice t sera *occasionnellement omis* dans les équations stochastiques. Les ∂_ε , ∂_x ... désignent les *dérivées (déterministes !) usuelles*.

3.2. Brownien sur M et transport parallèle : Soit $w_t : \Theta \to \mathbb{R}^n$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^n$ défini sur l'espace de probabilité (Θ, P) . Construisons le mouvement brownien x_t sur M par la méthode de Malliavin. A tout $v \in \mathbb{R}^n$ on associe le *champ de vecteurs horizontal standard* $B(v)$ sur le fibré des repères N , défini par $\pi^* B_u(v) = u.v$ pour tout $u \in N$. L'unique solution $u_t : \Theta \to N$ de l'équation différentielle stochastique suivante, avec condition initiale $u_0 \in N$,

(5) $$du_t = B_{u_t}(dw_t)$$

a pour projection $x_t = \pi u_t$ mouvement brownien sur M issu de $x_0 = \pi u_0$, et solution de

(6) $$dx_t = u_t . dw_t \ .$$

De plus le transport parallèle de $T_{x_0}M$ sur $T_{x_t}M$ le long de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ vaut $u_t u_0^{-1}$.

Plus généralement le *transport parallèle* τ_t de $(F \otimes \xi)_{x_t}$ sur $(F \otimes \xi)_{x_0}$ le long de la trajectoire $x_{[0t]}$ parcourue *en sens inverse du temps* vérifie l'équation de Stratonovitch (cf. [5])

(7) $$d\tau_s f(x_s) = \tau_s \nabla_{dx_s} f(x_s) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi)$$

et donc l'équation d'Ito

(8) $$\delta\tau_s f(x_s) = \tau_s (\nabla_{\delta x_s} f_s(x_s) + \frac{1}{2} \Delta^H f(x_s) ds) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi).$$

En particulier on voit que

(9) $$e^{(t/2)\Delta^H} f(x_0) = E_{x_0}[\tau_t f(x_t)] \ .$$

3.4. <u>La formule de Feymann-Kac</u> <u>"matricielle"</u> : Par analogie avec le cas où $C \in \mathrm{End}\,\Gamma(F \otimes \xi)$ est scalaire on cherche une formule du type

$$e^{-(t/2)D^2} f(x_0) = e^{t((1/2)\Delta^H + C)} f(x_0) = E_{x_0}[V_t \tau_t f(x_t)]$$

avec $V_t \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_0}$, non anticipatif, de classe C^1 en t , et $V_0 = I$. La formule d'Ito et (8) donnent

$$E_{x_0}[V_t \tau_t f(x_t)] - f(x_0) = \int_0^t E_{x_0}[(V'_s \tau_s f(x_s) + V_s \tau_s (\tfrac{1}{2} \Delta^H f(x_s))] ds$$

d'où le choix de V_s comme solution de

$$V'_s = V_s \tau_s C_{x_s} \tau_s^{-1} \quad ; \quad V_0 = I \ ,$$

et donc d'après (4) $V_s = k_s U_s$ avec $U_s \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_0}$, $k_s \in \mathbb{R}$

(10) $$\begin{cases} k_t = \exp[-\frac{1}{8} \int_0^t K(x_s) ds] \\ U'_s = -\frac{1}{2} U_s \Big(\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \alpha^{ij} \otimes L_s^{ij} \Big) \quad \text{et} \quad U_0 = I \ , \end{cases}$$

où $\alpha^{ij} = A_{u_0 e_i} A_{u_0 e_j}$, $L_s^{ij} = \tau_s L_{x_s}(u_s e_i, u_s e_j) \tau_s^{-1}$, et (e_i) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$; dans ce calcul on utilise (4) avec $v_i = u_t e_i$. On obtient donc

(11) $$e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y) f(y) dy = E_x[k_t U_t \tau_t f(x_t)]$$

4. <u>Pont brownien et calcul probabiliste du noyau de</u> $e^{-(t/2)D^2}$

4.1. <u>Pont brownien</u> : Soit $p(t,x,y)$ la densité de transition du brownien (x_t) sur M , c'est-à-dire le noyau de la chaleur sur M . Pour a , b fixés dans M

et $t > 0$ donné, on peut définir (cf. [3], [13]) le processus de Markov $\hat{x}_s$ $0 \leq s \leq t$ non homogène en temps, à valeurs dans M, tel que la loi de $\hat{x}_{[0t]}$ coïncide avec une loi conditionnelle, celle de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ conditionnée par $\{x_0 = a \; ; \; x_t = b\}$. La densité de transition $\hat{p}$ de $\hat{x}$ s'écrit, pour $0 \leq s_1 < s_2 < t$,

$$\hat{p}(s_1, s_2, x, y) = \frac{p(s_2 - s_1, x, y)\, p(t - s_2, y, b)}{p(t - s_1, x, b)} \; .$$

Le générateur infinitésimal spatial de $\hat{x}$ au temps s vaut (cf. [3])

(12) $$\frac{1}{2}\Delta_x + \operatorname{grad}_x \log p(t-s,x,b) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq s < t \; , \; x \in M .$$

De plus $\hat{x}$ est à trajectoires p.s. continues sur $[0t]$ avec $\hat{x}_0 = a$, $x_t = b$.

Pour $s \in [0t[$ considérons le champ de vecteurs V_s sur M défini par

(13) $$V_s(x) = \operatorname{grad}_x \log p(t-s,x,b) \qquad x \in M .$$

Soit $\overline{V}_s$ le relevé horizontal de V_s sur le fibré des repères N. Alors on peut construire $\hat{x}$ en résolvant le *système* d'équations stochastiques suivant où $\hat{u}_s \in N$ et $\hat{x}_s = \pi \hat{u}_s$

(14) $$\begin{cases} d\hat{u}_s = B_{\hat{u}_s}(dw_s) + \overline{V}_s(\hat{x}_s)ds \\ d\hat{x}_s = \hat{u}_s . dw_s + V_s(\hat{x}_s)ds \end{cases}$$

avec $\hat{x}_0 = a$ et $\hat{u}_0 = u_0 \in \pi^{-1}(a)$. La loi conditionnelle de $u_{[0t]}$ étant donné $\{x_0 = a \; ; \; x_t = b\}$ est celle de $\hat{u}_{[0t]}$ d'où la formule, pour ψ fonctionnelle mesurable (sur l'espace des chemins à valeurs dans N)

(15) $$\int_\Theta \psi(u_{[0t]})dP = \int_M db\, p(t,a,b) \int_\Theta \psi(\hat{u}_{[0t]})dP \; .$$

4.2. <u>Expression probabiliste de</u> $Q_t(a,b)$: Appliquons (15) à la fonctionnelle $\psi(u_{[0t]}) = k_t U_t \tau_t f(x_t)$ définie par (7), (10), pour transformer (11) en

(16) $$\int_M Q_t(a,b) f(b) db = \int_M db\, p(t,a,b) \int_\Theta \hat{k}_t \hat{U}_t \hat{\tau}_t f(\hat{x}_t) dP$$

avec la définition

(17) $$\begin{cases} \hat{k}_t \; , \; \hat{U}_t \; , \; \hat{\tau}_t \text{ sont les solutions de (7), (10)} \\ \text{lorsqu'on remplace } x_t \; , \; u_t \text{ par } \hat{x}_t \; , \; \hat{u}_t \; . \end{cases}$$

Ceci entraîne, f étant arbitraire, et puisque $\hat{x}_t = b$, P p.s.,

(18) $$Q_t(a,b) = p(t,a,b) \int_\Theta \hat{k}_t \hat{U}_t \hat{\tau}_t dP \; .$$

Il est bien connu que $\lim_{t \to 0} t^{n/2} p(t,a,a) = 2\pi^{-n/2}$; d'autre part la courbure scalaire K étant bornée, on a $k_t = 1 + o(t)$. Puisque la différence des traces ρ est linéaire, on conclut, grâce à (3), (18) que

(19) $$\mathcal{J}(a) = \lim_{t \to 0} \rho[Q_t(a,a)] = \lim_{t \to 0} (2\pi t)^{-n/2} \int_\Theta \rho(\hat{U}_t \hat{\tau}_t) dP \; ,$$

où $(\hat{x}_{[0t]}, \hat{u}_{[0t]})$ sont les conditionnés de $(x_{[0t]}, u_{[0t]})$ par $\{x_0 = x_t = a\}$.

5. Changement de temps

Fixons $a \in M$ et soit $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0. Posons

(20) $$V_s^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mathrm{grad}_x \log p(\varepsilon^2(1-s),x,a) \qquad 0 \le s \le 1$$

et soit $\bar{V}_s^\varepsilon$ le champ horizontal sur N relevé de V_s^ε. Notons $(\hat{x}_s^\varepsilon, \hat{u}_s^\varepsilon)$, $0 \le s \le \varepsilon^2$ le pont brownien obtenu en conditionnant (x_s, u_s) par $\{x_0 = x_{\varepsilon^2} = a\}$. Soient $\hat{U}^\varepsilon$, $\hat{\tau}^\varepsilon$ les solutions de (17) associées à $(\hat{x}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon)$ sur $[0,\varepsilon^2]$. Soit $\mathcal{P}^\varepsilon$ le processus $(\hat{x}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon, \hat{U}^\varepsilon, \hat{\tau}^\varepsilon)$. Comme les browniens $s \to w_{s\varepsilon^2}$ et $s \to \varepsilon w_s$ ont même loi, il est évident que le processus $s \to \mathcal{P}^\varepsilon_{s\varepsilon^2}$, $0 \le s \le 1$, a même loi que la solution $(Y_s, \Phi_s, S_s, \vartheta_s)$ du système d'équations suivant, déduit de (17), (14)

(21) $$\begin{cases} d\Phi_s = \varepsilon B_{\Phi_s}(dw_s) + \bar{V}_s^\varepsilon(Y_s)\,ds \\ dY_s = \varepsilon \Phi_s . dw_s + V_s^\varepsilon(Y_s)\,ds \end{cases},$$

avec $\Phi_0 = u_0$, $Y_0 = Y_1 = a$, $Y_s = \pi\Phi_s$, $Y_s \in M$, $\Phi_s \in N$,

(22) $$\begin{cases} d\vartheta_s f(Y_s) = \vartheta_s \nabla_{dY_s} f(Y_s) \\ dS_s = -\frac{\varepsilon^2}{2} S_s\left(\sum\limits_{1\le i<j\le n} \alpha^{ij} \otimes \vartheta_s L_{Y_s}(\Phi_s e_i, \Phi_s e_j)\vartheta_s^{-1}\right) ds \end{cases},$$

avec $S_0 = \vartheta_0 = I$, $S_s \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_a$, ϑ_s^{-1} transport parallèle de $(F\otimes\xi)_a$ sur $(F\otimes\xi)_{Y_s}$ le long de $Y_{[0s]}$.

Par construction $\rho(\hat{U}_{\varepsilon^2}\hat{\tau}_{\varepsilon^2})$ et $\rho(S_1\vartheta_1)$ ont même loi, donc (19) entraîne

(23) $$\mathcal{J}(a) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \int_\Theta \rho(S_1\vartheta_1)\,dP .$$

6. Découplage d'une équation différentielle

6.1. Découplage probabiliste d'équation déterministe : Soit J un ensemble fini d'indices et soient φ^ν, ψ^ν, $\nu \in J$ des fonctions continues sur $[01]$ à valeurs dans $\mathrm{End}(A)$ et $\mathrm{End}(B)$ où A, B sont deux espaces vectoriels hermitiens. Soit $H_t \in \mathrm{End}(A \otimes B)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$H_t' = H_t\left(\sum_{\nu\in J} \varphi_t^\nu \otimes \psi_t^\nu\right) \qquad \text{avec } H_0 = I .$$

Soit W_t un brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^J$, défini sur l'espace de probabilité auxiliaire $(\tilde{\Theta},\tilde{P})$; notons W_t^ν les coordonnées de W_t, et $H_t^A \in \mathrm{End}(A)$, $H_t^B \in \mathrm{End}(B)$ les solutions des équations d'*Ito*

$$\begin{cases} \delta H_t^A = H_t^A\left(\sum_\nu \varphi_t^\nu \delta W_t^\nu\right) & H_0^A = I^A \\ \delta H_t^B = H_t^B\left(\sum_\nu \psi^\nu \delta W_t^\nu\right) & H_0^B = I^B . \end{cases}$$

On a alors

$$H_t = \int_{\tilde{\Theta}} H_t^A \otimes H_t^B \, d\tilde{P}(W) ,$$

ce qui se déduit trivialement de la formule d'Ito.

6.2. Application au calcul de $\rho(S_1\vartheta_1)$: L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $SO(n)$, l'espace vectoriel $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, et $\mathbb{R}^J$ avec $J = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, munis de leurs produits scalaires usuels sont naturellement isométriques.

Le brownien auxiliaire W sera donc ici le brownien standard $W_t : \widetilde{\Theta} \to \mathcal{G}$ et sera *choisi indépendant* du brownien $w_t : \widetilde{\Theta} \to \mathbb{R}^n$. Le lemme 6.1 donne alors d'après (22)

$$S_t = \int_{\widetilde{\Theta}} S_t^F \otimes S_t^\xi \, d\widetilde{P}(W) \tag{24}$$

avec $S_t^F \in End(F_a)$ et $S_t^\xi \in End(\xi_a)$ définis par

$$\begin{cases} \delta S_t^F = -\frac{\varepsilon^2}{2} S_t^F\Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha^{ij}\delta W_t^{ij}\Big) & \text{avec } S_0^F = I \\ \delta S_t^\xi = S_t^\xi\Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} \vartheta_t L_{Y_t}(\Phi_t e_i, \Phi_t e_j)\vartheta_t^{-1}\delta W_t^{ij}\Big) & \text{avec } S_0^\xi = I . \end{cases} \tag{25}$$

Pour $B \in End(\xi_a)$, et pour $A \in End(F_a)$ laissant F_s^+ , F_a^- invariants, on a $\rho(A \otimes B) = \chi(A)\,tr(B)$ avec $\chi(A) = tr\, A^+ - tr\, A^-$. Les restrictions ϑ_t^F , ϑ_t^ξ de ϑ_t à F et ξ vérifiant $\vartheta_t^F \otimes \vartheta_t^\xi = \vartheta_t$, on tire finalement de (24)

$$\rho(S_1\vartheta_1) = \int_{\widetilde{\Theta}} \chi(S_1^F\vartheta_1^F)\,tr(S_1^\xi\vartheta_1^\xi)\,d\widetilde{P}(W)$$

et W , w étant indépendants, (23) donne

$$\mathcal{J}(a) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\int_{\Theta\times\widetilde{\Theta}} \chi(S_1^F\vartheta_1^F)\,tr(S_1^\xi\vartheta_1^\xi)\,dP(w)\,d\widetilde{P}(W) \ . \tag{26}$$

7. Asymptotique du pont brownien en temps petit

Il s'agit d'estimer (Y_s, Φ_s) à l'ordre 2 en ε , pour en déduire le développement d'ordre 2 du transport parallèle inverse ϑ_1^F le long de $Y_{[01]}$.

7.1. La fonction $V_s^\varepsilon(x)$: Soit $a \in M$. Pour $\mathcal{V}$ voisinage assez petit de a , la géodésique minimisante allant de a à tout point de $\mathcal{V}$ est unique. Si $d(u,a)$ est la distance riemannienne, on sait que le noyau p de la chaleur vérifie pour $s > 0$, $x \in \mathcal{V}$

$$p(s,x,a) = s^{-n/2}\exp\Big(-\frac{d^2(x,a)}{2s}\Big)\psi(s,x,a) \ , \tag{27}$$

où ψ *est* C^∞ *en* $s \geq 0$, $x \in \mathcal{V}$, *avec* $\psi(0,x,a) > 0$. On notera l'*inclusion de* $s = 0$ dans le domaine de régularité de ψ . Pour une preuve de (27) renvoyons à Kanaï [11]. On en déduit que *la fonction* $V_s^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 grad_x \log p(\varepsilon^2(1-s),x,a)$ *est* C^∞ *en* $\varepsilon \geq 0$, $x \in \mathcal{V}$ *pour* $0 \leq s < 1$. De plus (27) donne en $\varepsilon = 0$, $x \in \mathcal{V}$, $0 \leq s < 1$

$$V_s^0(x) = \frac{n(x,a)}{1-s} \tag{28}$$

où $n(x,a)$ est la vitesse en x de la géodésique joignant x et a en temps 1 . La parité de V_s^ε en ε , et (28) donnent

$$\partial_\varepsilon V_s^0(x) = 0 \quad ; \quad vert[\partial_x V_s^0(a).z] = -\frac{1}{1-s} z \qquad \text{pour } z \in T_a M \tag{29}$$

où $vert[v]$ représente la partie verticale d'un vecteur v tangent à TM .

7.2. Développement de Taylor du brownien conditionné : Soit $\gamma_t \in \mathbb{R}^n$ la solution de l'équation stochastique

(30) $$d\gamma = \varepsilon dw + \Phi^{-1}V^{\varepsilon}(Y)dt \qquad \text{avec } \gamma_0 = 0$$

de sorte que (21) s'écrit

(31) $$d\Phi = B_{\Phi}(d\gamma) \quad \text{et} \quad dY = \Phi.d\gamma \quad .$$

Il est légitime (cf. [12], [5], [3]) de différentier (30), (31) en ε , d'où

(32) $$\begin{cases} d(\partial_{\varepsilon}\gamma) = dw + \{(\partial_{\varepsilon}\Phi^{-1})V^{\varepsilon}(Y) + \Phi^{-1}[\partial_{\varepsilon}V^{\varepsilon}(Y) + \partial_x V^{\varepsilon}(Y).\partial_{\varepsilon}Y]\}dt \\ d(\partial_{\varepsilon}\Phi) = B_{\Phi}[d(\partial_{\varepsilon}\gamma)] + (B'_{\Phi}.\partial_{\varepsilon}\Phi).d\gamma \\ d(\partial_{\varepsilon}Y) = \partial_{\varepsilon}\Phi.d\gamma + \Phi.d(\partial_{\varepsilon}\gamma) \end{cases} \quad .$$

Grâce à (28), (29) on voit immédiatement que *pour* $\varepsilon = 0$ *on a*

(33) $$\gamma_t \equiv 0 \quad ; \quad \Phi_t \equiv u_0 \quad ; \quad Y_t \equiv a \ ,$$

(34) $$\begin{cases} d(\partial_{\varepsilon}\gamma_t) = dw_t - \frac{1}{1-t}u_0^{-1}\partial_{\varepsilon}Y_t dt \\ d(\partial_{\varepsilon}Y_t) = u_0.d(\partial_{\varepsilon}\gamma_t) \\ d(\partial_{\varepsilon}\Phi_t) = B_{u_0}[d(\partial_{\varepsilon}\gamma_t)] \end{cases} \quad .$$

Rappelons que *le pont brownien standard* $\hat{w}_t$ *sur* $\mathbb{R}^n$, obtenu en conditionnant w_t par $\{w_0 = w_1 = 0\}$, vérifie

(35) $$d\hat{w}_t = dw_t - \frac{1}{1-t}\hat{w}_t dt \quad .$$

De (33), (34) on conclut que *pour* $\varepsilon = 0$,

(36) $$\partial_{\varepsilon}\gamma_t = \hat{w}_t \quad ; \quad \partial_{\varepsilon}Y_t = u_0.\hat{w}_t \quad ; \quad \partial_{\varepsilon}\Phi_t = B_{u_0}(\hat{w}_t) \ .$$

7.3. Développement de Taylor du transport parallèle conditionné ϑ_1^F : Soit ω la forme différentielle d'ordre 2 sur le fibré des repères N , à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, définissant la connexion de Levi-Civita sur N . Posons $\Phi_1 = u_0 e^{L(\varepsilon)}$ où $L(\varepsilon) \in \mathcal{G}$. De (33), (36) on déduit $L(\varepsilon) = \varepsilon^2\mu + o(\varepsilon^2)$ avec $\mu \in \mathcal{G}$, d'où par définition de ω , $\langle\omega,\partial_{\varepsilon}\Phi_1\rangle = 2\varepsilon\mu + o(\varepsilon)$ et $\mu = \frac{1}{2}(\partial_{\varepsilon}\langle\omega,\partial_{\varepsilon}\Phi_1\rangle)_{\varepsilon=0}$. L'homomorphisme σ de G sur $SO(n)$ fournit $\sigma\vartheta_1^F = \Phi_0\Phi_1^{-1}$, et donc $\bar{u}_0 \in \bar{N}$ au dessus de u_0 , tel que

(37) $$\vartheta_1^F = \bar{u}_0(I - \varepsilon^2\mu + o(\varepsilon^2))\bar{u}_0^{-1} \ .$$

7.4. Dérivée spatiale Φ' du brownien horizontal : La donnée $\Phi_0 = q \in N$ et (31) fournissent un difféomorphisme $q \longrightarrow \Phi_t(q)$ de N dont la dérivée $\Phi'_t(q) = \partial_q\Phi_t$ vérifie, par différentiation de (31),

$$d\Phi'(q)z = (B'_{\Phi(q)}.\Phi'(q)z).d\gamma \qquad \text{pour tout } z \in T_qN \ .$$

Par "variation de la constante z ", (32) montre que

$$\partial_{\varepsilon}\Phi_t = [\Phi_t^* Z(t)]_{\Phi_t}$$

où Φ_t^* , Φ_t^{*-1} sont les actions évidentes du difféomorphisme Φ_t sur les champs de vecteurs, et $Z(t)$ est le champ de vecteurs sur N

$$Z(t) = \int_0^t \Phi_s^{*-1}(B[d(\partial_\varepsilon \gamma_s)]) \; .$$

7.4. Calcul de μ, transport parallèle infinitésimal : On a vu que $\mu = \frac{1}{2}\partial_\varepsilon \eta(\varepsilon,t)$ en $\varepsilon = 0$, $t = 1$ avec $\eta(\varepsilon,t) = \langle\omega,\partial_\varepsilon \Phi_t\rangle_{\Phi_t}$. Par 7.3 on a $\eta(\varepsilon,t) = g(t,\Phi_t)$ avec

$$g(t,q) = \langle\omega,\Phi_t^* Z(t)\rangle_q \qquad q \in N$$

d'où la différentielle stochastique de $\eta(\varepsilon,\cdot)$

$$d_t \eta = d_t g + \partial_q g . d\Phi_t = d_t g + [B(d\gamma)g(t,\cdot)]_{\Phi_t} \; .$$

Pour tout champ fixe Z sur N, la définition du crochet de Lie donne $d\Phi_t^* Z = [\Phi_t^* Z, B(d\gamma)]$, et donc

$$d\Phi_t^* Z(t) = [\Phi_t^* Z(t), B(d\gamma)] + \Phi_t^* dZ(t)$$

$$d_t g(t,q) = \langle\omega, d\Phi_t^* Z(t)\rangle_q = \langle\omega,[\Phi_t^* Z(t), B(d\gamma)]\rangle_q \; .$$

Soit Ω *le tenseur de courbure équivariant de la connexion* ω *sur* N. Si Z^1, Z^2 sont des champs de vecteurs sur N, on sait que

$$\langle\omega,[Z^1,Z^2]\rangle = [\omega(Z^1),\omega(Z^2)] + Z^1.\omega(Z^2) - Z^2.\omega(Z^1) - \Omega(Z^1,Z^2)$$

d'où facilement $d_t g$ et

(38) $$d_t \eta(\varepsilon,t) = \Omega_{\Phi_t}(B(d\gamma_t),\partial_\varepsilon \Phi_t) \; .$$

Différentions (38) par ∂_ε. *Pour* $\varepsilon = 0$ on a $d\gamma_t \equiv 0$ et $d_t \partial_\varepsilon \eta(0,t)$ coïncide donc avec $\Omega_{\Phi_t}(B(d\partial_\varepsilon \gamma_t),\partial_\varepsilon \Phi_t)$, qui par (33), (36) vaut $\Omega_{u_0}(B(d\hat{w}_t),B(\hat{w}_t))$. D'où le résultat

(39) $$\mu = \frac{1}{2}\,\partial_\varepsilon \eta(0,1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Omega_{u_0}(B(d\hat{w}_t),B(\hat{w}_t)) \; .$$

8. Passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$

8.1. Apparition du Pfaffien : Pour $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2k})$ la fonction polynomiale $Pf(A)$ définie par

(40) $$A^{\wedge k} = k!Pf(A)e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k}$$

est invariante par $\mathrm{ad}\,O(n)$. Si φ_s est un chemin C^1 à valeurs dans $G = \mathrm{Spin}(2k)$, avec $\varphi_0 = I$, on a [7], [1] élémentairement, χ étant la différence des traces sur S^+, S^-

(41) $$\lim_{s\to 0} s^{-k}\chi(\varphi_s) = i^k Pf(\varphi_0')$$

où $\varphi_0' \in \mathcal{G} \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^k)$.

8.2. Le terme $\varepsilon^{-n}\chi(S_1^F \vartheta_1^F)$ pour $\varepsilon = 0$: L'action de $e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{G}$ sur l'espace des spineurs S s'écrit $\frac{1}{2}A_{e_i}A_{e_j}$. L'endomorphisme $\left(\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n}\alpha^{ij}W_t^{ij}\right)$ de $F_a = \bar{u}_0 S$ vaut donc $\bar{u}_0 W_t \bar{u}_0^{-1}$ avec $W_t \in \mathcal{G} \subset \mathrm{End}(S)$. L'équation d'Ito (25) donne alors, avec $R_t \in G$

$$(42)\qquad \begin{cases} S_t^F = \exp\left(\dfrac{\varepsilon^4 n(n-1)}{16}\, t\right)\bar{u}_0 R_t \bar{u}_0^{-1} \\ dR_t = -\,\varepsilon^2 R_t . dW_t \quad \text{et} \quad R_0 = I \\ R_1 = \exp(-\varepsilon^2 W_1) = I - \varepsilon^2 W_1 + o(\varepsilon^2)\ . \end{cases}$$

Regroupant (42), (37), (41) on conclut

$$(43)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \chi(S_1^F \vartheta_1^F) = (-i)^k \mathrm{Pf}(\mu + W_1)\ .$$

8.3. <u>Expression probabiliste de la densité de l'indice</u> : Pour $\varepsilon = 0$ on a clairement $\vartheta_1^\xi = I$, et $S_t^\xi = \beta_t \in \mathrm{End}\ \xi_a$ donné par (cf. (25))

$$(44)\qquad \begin{cases} \delta\beta_t = \beta_t\left(\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} L^{ij}\delta W_t^{ij}\right) \quad \text{avec} \quad \beta_0 = I \\ L^{ij} = L_a(u_0 e_i, u_0 e_j) \in \mathrm{End}\ \xi_a\ . \end{cases}$$

Passant à la limite en $\varepsilon = 0$ dans l'expression (26) de $\mathfrak{I}(a)$, on a alors

$$(45)\qquad \mathfrak{I}(a) = \int_{\Theta\times\tilde{\Theta}} \mathrm{Pf}[-\frac{i}{2\pi}(\mu + W_1)]\,\mathrm{tr}\ \beta_1\ dP(w)\, d\tilde{P}(W)$$

où l'intégrale stochastique μ ne dépend que de w (cf. (39)).

9. <u>Calcul stochastique sur l'algèbre extérieure</u>

9.1. <u>L'exponentielle extérieure</u> : Pour $A \in \Lambda^2(T_a M)$ on définit

$$\exp^\wedge A = 1 + A + \ldots + \frac{A^{\wedge k}}{k!}$$

élément de $\Lambda^+(T_a M)$, algèbre *commutative* des formes différentielles de degré pair. Pour B , B' dans cette algèbre, *on note* $B \underset{n}{=} B'$ *quand* B , B' *ont même composante de degré* n . En particulier pour $A, A' \in \Lambda^2(T_a M)$ on a

$$(A + A')^{\wedge k} \underset{n}{=} k!\ \exp^\wedge(A + A') = k!(\exp^\wedge A) \wedge (\exp^\wedge A')\ .$$

9.2. <u>Magie extérieure</u> : <u>découplage des browniens</u> w <u>et</u> W : Considérons $(\mu + W_1)$ comme un élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2k}) \simeq \mathfrak{g}$. L'image par u_0 de la forme différentielle

$$\mathrm{Pf}(\mu + W_1) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k} = \frac{1}{k!}\ (\mu + W_1)^{\wedge k}$$

est d'après 9.1 le terme de degré n dans $(\exp^\wedge u_0 \mu u_0^{-1}) \wedge (\exp^\wedge u_0 W_1 u_0^{-1})$. L'image de $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2k}$ par u_0 étant *la forme volume* da *sur* M , (45) implique donc, grâce à l'*indépendance* de μ et (W_1, β_1)

$$(46)\qquad \mathfrak{I}(a)\, da \underset{n}{=} \left[\int_\Theta \exp^\wedge(-\frac{i}{2\pi}\, u_0 \mu u_0^{-1})\, dP(w)\right] \wedge \left[\int_{\tilde{\Theta}} \exp^\wedge(-\frac{i}{2\pi}\, u_0 W_1 u_0^{-1})\,\mathrm{tr}\ \beta_1 d\tilde{P}(W)\right]$$

9.3. <u>L'homomorphisme de Weil de</u> TM : Il envoie l'algèbre des polynômes complexes sur $\mathfrak{g}$ invariants par l'action adjointe de $O(n)$ dans l'algèbre des formes différentielles sur M . Si q est un tel polynôme, son image est l'unique forme $\tilde{q}$ sur M qui se relève en $q(\Omega)$ sur le fibré des repères N , où Ω est la courbure équivariante de N . Cet homomorphisme se prolonge trivialement aux séries entières ad $O(n)$-invariantes.

9.4. L'intégrale en w : La fonction $q : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ définie par

$$q(A) = \int_\Theta \exp\left[-\frac{i}{4\pi}\int_0^1 \langle A\hat{w}_t, d\hat{w}_t\rangle\right] dP(w) \tag{47}$$

est évidemment invariante par $\operatorname{ad} O(n)$, grâce aux symétries de la mesure de Wiener. Après diagonalisation de A , une formule d'aire aléatoire de Paul Lévy donne facilement

$$q(A) = \varphi\left(-\frac{iA}{2\pi}\right) \qquad \text{avec} \quad \varphi(A) = \det\left(\frac{\operatorname{sh}(A/2)}{A/2}\right)^{-1/2} . \tag{48}$$

Pour $\bar{v}, \bar{v}' \in T_{u_0}(N)$ et $v = \pi^*\bar{v}$, $v' = \pi^*\bar{v}'$, les tenseurs de courbure R_a et Ω_{u_0} de M et N vérifient

$$\begin{aligned}\langle\Omega_{u_0}(\bar{v},\bar{v}')\hat{w}_t, d\hat{w}_t\rangle &= \langle R_a(v,v')u_0\hat{w}_t, u_0 d\hat{w}_t\rangle = \langle R_a(u_0 d\hat{w}_t, u_0\hat{w}_t), v\wedge v'\rangle \\ &= \langle u_0\Omega_{u_0}(B(d\hat{w}_t), B(\hat{w}_t))u_0^{-1}, \bar{v}\wedge\bar{v}'\rangle ,\end{aligned}$$

d'où l'image $\tilde{q}$ de q par l'homomorphisme de Weil, grâce à (47), (39)

$$\tilde{q}_a = q(\Omega_{u_0}) = \int_\Theta \exp^\wedge\left(-\frac{i}{2\pi}u_0\mu u_0^{-1}\right) dP(w) . \tag{49}$$

Pour une intéressante *interprétation de* $\varphi(A)$ *voir Berline-Vergne* [4].

9.5. L'intégrale en W : Comme le brownien W_t est à valeurs dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, on a pour α fixé dans $\mathbb{C}$ la différentielle *d'Ito*

$$\delta \exp^\wedge \alpha W_t = \alpha(\exp^\wedge\alpha W_t)\wedge\delta W_t = \alpha(\exp^\wedge W_t)\wedge\left(\sum_{1\le i<j\le n} e_i\wedge e_j\ \delta W_t^{ij}\right)$$

car dans la formule d'Ito le terme $\delta W_t \wedge \delta W_t$ est nul (les carrés des $e_i\wedge e_j$ sont nuls et les termes croisés sont Ito-négligeables). Puisque $\beta_t \in \operatorname{End}\xi_a$ vérifie (cf. (44))

$$\delta\beta_t = \beta_t\left(\sum_{1\le i<j\le n} L^{ij}\delta W_t^{ij}\right) ,$$

le calcul d'Ito donné au § 6.1 montre que

$$H_t = \int_{\tilde{\Theta}} (\exp^\wedge\alpha W_t)\otimes\beta_t\ d\tilde{P}(W) \tag{50}$$

vérifie $H_t' = \alpha H_t K$ avec $K = \sum_{1\le i<j\le n}(e_i\wedge e_j)\otimes L^{ij}$, d'où

$$H_t = \exp(\alpha t K) . \tag{51}$$

L'application $\psi : A\otimes B \longrightarrow (u_0 A u_0^{-1})\operatorname{tr} B$ étant linéaire, (50), (51) entraînent

$$\int_{\tilde{\Theta}} (\exp^\wedge \alpha u_0 W_1 u_0^{-1})\operatorname{tr}\beta_1 d\tilde{P}(W) = \psi(\exp\alpha K) = \operatorname{tr}\exp\alpha\mathcal{L} , \tag{52}$$

où $\mathcal{L} = \sum_{1\le i<j\le n} L^{ij}.(u_0 e_i \wedge u_0 e_j)$ est une forme différentielle d'ordre 2 sur T_aM à valeurs dans $\operatorname{End}\xi_a$. Noter que $\exp\mathcal{L}$ se calcule en faisant les produits des L^{ij} dans $\operatorname{End}\xi_a$ et des formes $u_0 e_i\wedge u_0 e_j$ dans $\Lambda(T_aM)$.

La définition (44) des L^{ij} montre que $\mathcal{L}$ est la projection sur T_aM de la courbure équivariante $\Omega^X_{r_0}$ du fibré X (repères unitaires de ξ), avec $r_0 \in X$ pris dans la fibre de a . Pour $\alpha = -\frac{i}{2\pi}$ on identifie ainsi l'intégrale (52) avec l'image du polynôme $A \longrightarrow \operatorname{tr}\exp\left(-\frac{iA}{2\pi}\right)$ par l'homomorphisme de Chern-Weil. Cette classe n'est autre que le caractère de Chern $\operatorname{ch}(\xi)$ du fibré ξ .

9.4. Formule de l'indice : On a donc obtenu

$$\mathcal{J}(a)\,da \underset{n}{=} \varphi\left(-\frac{i}{2\pi}\Omega_{u_0}\right)\wedge ch(\xi)$$

avec $\varphi(A) = \left(\det \frac{sh(A/2)}{A/2}\right)^{-1/2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATIYAH, R. BOTT, V. PATODI - *Heat equation and index theorem*, Invent. Math. 19(1973), 279-330.

[2] M. ATIYAH, I. SINGER - *Index of elliptic operators I, II*, Ann. Math. 87(1968), 484-530, 546-604.

[3] R. AZENCOTT - *Densité des diffusions en temps petit*, Sém. Proba. XVIII, Lect. Notes in Math. 1059(1984), 402-498.

[4] N. BERLINE, M. VERGNE - *Calcul de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac par la méthode de la chaleur*, à paraître.

[5] J.-M. BISMUT - *Mécanique Aléatoire*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag 1981.

[6] J.-M. BISMUT - *Large deviations and Malliavin calculus*, Birkhäuser 1984.

[7] J.-M. BISMUT - *The Atiyah-Singer theorems : a probabilistic approach I, II*, J. Funct. Anal. 57(1984), 56-98, 329-348.

[8] E. GETZLER - *Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. 92(1983), 163-178.

[9] P. GILKEY - *Curvature and eigenvalues of the Laplacian*, Adv. in Math. 10(1973), 344-382

[10] N. HITCHIN - *Harmonic Spinors*, Adv. in Math. 14(1974), 1-55.

[11] KANAÏ - *Short time asymptotics for fundamental solutions of partial differential equations*, Comm. Part. Diff. Equ. 2(1977), 781-830.

[12] P. MALLIAVIN - *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, Proc. Int. Conf. Stoch. Diff. Equ. Kyoto 1976, 195-263, N.Y. Wiley 1978.

[13] S. MOLCHANOV - *Diffusions and Riemannian geometry*, Russ. Math. Surveys 30 (1975), 1-63.

Robert AZENCOTT

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX