JEAN-PIERRE LABESSE

La formule des traces d'Arthur-Selberg

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 636, p. 73-88
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__73_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 636 Novembre 1984

LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG

par Jean-Pierre LABESSE

En février 1956, à Bombay, A. Selberg [Sl] annonçait une formule des traces pour les espaces riemanniens localement symétriques $\Gamma\backslash G/K$ de volume fini. Il a fallu attendre de nombreuses années pour voir ce programme mené à bien pour l'essentiel, par A. Selberg lui-même puis R. Langlands pour la décomposition spectrale et J. Arthur pour la formule des traces, pour ne citer que les contributions principales.

Pendant longtemps, seuls le cas compact et le cas du rang un avaient été traités complètement. La littérature, même dans ce cadre restreint, est déjà fort abondante. On trouvera une bibliographie assez exhaustive dans [Hj] et une revue dans [V], ce à quoi on ne prétend nullement ici.

Grâce aux travaux d'Arthur, on peut maintenant aborder, dans le cadre adélique, le cas des groupes réductifs de rang quelconque. L'exposé qui suit est basé principalement sur les articles originaux d'Arthur [A 1,2,3,4,5], son exposé à Dijon [A6] et le séminaire de l'I.A.S. de Princeton [CLL].

Après avoir rappelé la problématique de base en traitant le cas compact, nous présentons la formule des traces obtenue par J. Arthur. Nous donnerons quelques indications sur les démonstrations et sur l'extension des résultats au cas non connexe (formule des traces tordue), qui au cours de texte deviendront de plus en plus allusives.

Nous n'aborderons pas la question des espaces $\Gamma\backslash G$ où G est semi-simple réel et Γ de covolume fini ne provenant pas d'une situation adélique, qui fait l'objet en particulier d'un travail d'Osborne et Warner partiellement publié [OW 1,2,3]. Signalons pour terminer que H. Jacquet a tout récemment proposé un élargissement du cadre même de la formule des traces [J].

1. Le cas compact [Sl], [Gl]

1.1. La formule des traces de Selberg est facile à prouver dans la situation suivante : on considère un groupe localement compact G et Γ un sous-groupe discret cocompact. On dispose sur G et sur $X = \Gamma\backslash G$ de mesures G-invariantes à droite dg et dx . Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c^\infty(G)$, c'est-à-dire lisse[(1)] et à support compact, on introduit l'opérateur $\rho(f)$ de $L^2(X)$ dans lui-même

(1) Les fonctions considérées sont ici les fonctions régulières au sens de Bruhat [B].

$$(\rho(f)\varphi)(x) = \int_G \varphi(xg)f(g)dg .$$

Il peut être défini par un noyau K sur $X \times X$

$$(\rho(f)\varphi)(x) = \int_X K(x,y)\varphi(y)dy$$

où

$$K(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) .$$

Comme X est compact un tel noyau est de Hilbert-Schmidt. Grâce au théorème de factorisation de Dixmier-Malliavin [DM] (qui raffine celui de [DL]) on sait que f est somme de produits de convolutions

$$f = \sum_{i=1}^{r} f_{2i} * f_{2i+1}$$

avec $f_j \in \mathscr{C}_c^\infty(G)$ et donc

$$\rho(f) = \sum_{i=1}^{r} \rho(f_{2i})\rho(f_{2i+1})$$

est un opérateur à trace ; de plus

(1) $$\operatorname{tr} \rho(f) = \int_X K(x,x)dx .$$

Ceci implique que la représentation ρ de G dans $L^2(X)$ se décompose en somme discrète avec multiplicités finies $m(\pi)$ de représentations π de G telles que $\pi(f)$ soit à trace et que (si $\hat{G}$ désigne le dual unitaire de G)

(2) $$\operatorname{tr} \rho(f) = \sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi) \operatorname{tr} \pi(f) .$$

Soit $\gamma \in \Gamma$; on note $\Gamma(\gamma)$ (resp. $G(\gamma)$) son centralisateur dans Γ (resp. G); on pose $v(\gamma) = \text{volume}(\Gamma(\gamma)\backslash G(\gamma))$ et on introduit les intégrales orbitales

$$\Phi(f,\gamma) = \int_{G(\gamma)\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)d\dot{g} .$$

On choisit un système de représentants $\{\Gamma\}$ des classes de conjugaison de Γ . Un simple changement de variable fournit l'égalité

(3) $$\int_X K(x,x)dx = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} v(\gamma)\Phi(f,\gamma) .$$

En comparant (1), (2) et (3) on obtient la formule des traces de Selberg dans le cas compact

(4) $$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} v(\gamma)\Phi(f,\gamma) = \sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi) \operatorname{tr} \pi(f) \qquad \text{pour } f \in \mathscr{C}_c^\infty(G),$$

toutes les séries et intégrales étant absolument convergentes.

1.2. Il est souvent utile de prolonger l'égalité de distributions ci-dessus à des espaces fonctionnels plus gros. Nous n'aborderons ici cette question que par la remarque suivante : en vue de calculer la multiplicité $m(\pi)$ il est tentant lorsque π est une série discrète d'appliquer brutalement la formule à un coefficient $f(x) = \langle\pi(x)v,v\rangle$. On peut le justifier lorsque G est semi-simple réel connexe, à centre fini, et f intégrable [L1]. En général, cela est impossible. On peut dans certains cas résoudre la question en faisant appel à des pseudo-coefficients qui sont des fonctions à support compact ayant même transformée de Fourier scalaire dans le spectre tempéré que les coefficients de série discrète. Pour les groupes semi-simples réels algébriques l'existence des pseudo-coefficients résulte d'une élaboration du théorème de Paley-Wiener scalaire [CD]. Pour SL_2 c'est un résultat classique [DL].

2. Le cadre adélique

Nous adopterons les conventions suivantes. Si $\underline{H}$ est un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ on pose $H = \underline{H}(\mathbb{Q})$ et $\mathbb{H} = \underline{H}(\mathbb{A})$ où $\mathbb{A}$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Soit $X(\underline{H})$ le groupe des caractères rationnels de $\underline{H}$; on définit

$$\mathbb{H}^1 = \{h \in \mathbb{H} \mid |\chi(h)| = 1 \text{ pour tout } \chi \in X(\underline{H})\} .$$

Etant donné un groupe $\underline{G}$ réductif connexe sur $\mathbb{Q}$ on se propose d'établir une formule des traces sur $X_G = G\backslash\mathbb{G}^1$, qui est de volume fini, mais n'est pas compact en général. On considère un groupe $\underline{G}'$ sur $\mathbb{Q}$, admettant $\underline{G}$ comme composante neutre, $\varepsilon \in G'$ et on note G_ε le groupe engendré par G et ε. Le groupe $\mathbb{G}^1_\varepsilon = \mathbb{G}^1.G_\varepsilon$ opère sur $X_G = G\backslash\mathbb{G}^1 = G_\varepsilon\backslash\mathbb{G}^1_\varepsilon$, et on s'intéresse au noyau

$$K(x,y) = \sum_{\gamma\in G_\varepsilon} f(x^{-1}\gamma y)$$

défini par une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{G}^1_\varepsilon)$ à support dans l'ensemble $\varepsilon.\mathbb{G}^1$. Seule la classe de ε dans G'/G importe ici.

La représentation de $\mathbb{G}^1_\varepsilon$ dans $L^2(X_G)$ se décompose en un spectre discret L^2_d, qui contient le spectre cuspidal (ou parabolique) et un spectre continu L^2_c. L'opérateur induit par K dans L^2_d est traçable au moins si le $\mathbb{Q}$-rang semi-simple de G est égal à un [D]. (Le cas général pourrait résulter d'un travail en cours d'Arthur et Langlands.) En tout cas le spectre cuspidal est traçable et c'est le principal objet d'intérêt ici.

L'opérateur induit dans L^2_c n'est pas (en général) à trace et l'intégrale de K sur la diagonale diverge. On est conduit à définir diverses troncatures qui rendent les expressions intégrables et permettent, comme dans le cas compact, un développement suivant les classes de conjugaison (semi-simples) de G_ε dans un membre et suivant les données spectrales dans l'autre.

3. Préliminaires combinatoires

3.1. Nous prendrons la liberté d'appeler "parabolique" un "$\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique de G". On choisit un parabolique minimal $\underline{P}_0$, un sous-groupe de Levi $\underline{M}_0$ et on note A_0 la composante neutre du groupe des points réels du tore déployé maximal $\underline{T}_0$ du centre de $\underline{M}_0$. Si $\underline{P}$ est standard, c'est-à-dire s'il contient $\underline{P}_0$, on choisit $\underline{M}_P$ contenant $\underline{M}_0$ comme Levi, et A_P est le sous-groupe de A_0 annihilé par les racines dans $\underline{M}_P$. On peut identifier A_P au quotient $\mathbb{M}_P/\mathbb{M}^1_P$ ce qui fournit un scindage $A_o = A_P \times A_o^P$ compatible avec la structure euclidienne naturelle sur $\mathfrak{a}_o^G = \text{Lie } A_o^G$; on identifiera $\mathfrak{a}_o^G$ et son dual. Si $P \subset Q$ sont deux paraboliques on définit de même A_P^Q , on note $\mathfrak{a}_P^Q$ son algèbre de Lie, a_P^Q sa dimension.

On note Δ_P^Q l'ensemble des formes linéaires non nulles définies sur $\mathfrak{a}_P^Q$ par des racines simples de $\underline{T}_o$ dans $\underline{M}_Q$. L'ensemble Δ_P^Q est une base (du dual) de $\mathfrak{a}_P^Q$; la base duale sera notée $\hat{\Delta}_P^Q$. La propriété essentielle pour nous sera que deux éléments distincts dans Δ_P^Q font un angle obtus ; on en déduit le

Lemme 3.1.– *Soient* $\underline{P} \subset \underline{S} \subset \underline{R}$ *trois paraboliques et* $H \in \mathfrak{a}_P^R$. *On suppose* $\alpha(H) > 0$ *pour* $\alpha \in \Delta_P^S$ (*resp.* $\alpha(H) \leq 0$ *pour* $\alpha \in \Delta_P^R - \Delta_P^S$) *et* $\bar{\omega}(H) > 0$ *pour* $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_S^R$ (*resp.* $\bar{\omega}(H) \leq 0$ *pour* $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_P^R - \hat{\Delta}_S^R$), *alors* $\bar{\omega}(H) > 0$ (*resp.* $\bar{\omega}(H) \leq 0$) *pour tout* $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_P^R$.

3.2. On définit τ_P^Q (resp. $\hat{\tau}_P^Q$) comme la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_o$ qui vérifient $\alpha(H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$ (resp. $\bar{\omega}(H) > 0$ pour tout $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_P^Q$). Il est commode d'introduire une matrice $\tau = (\tau_{P,Q})$ de fonctions sur $\mathfrak{a}_o$ dont les coefficients, indexés par des couples de paraboliques, sont définis par $\tau_{P,Q} = (-1)^{a_P}\tau_P^Q$ si $\underline{P} \subset \underline{Q}$ et 0 sinon. On définit $\hat{\tau}$ de manière analogue. Le lemme suivant gouverne une grande partie de la combinatoire des paraboliques.

Lemme 3.2.– *Les matrices* τ *et* $\hat{\tau}$ *sont inverses l'une de l'autre.*

Il suffit de montrer que

$$\sum_{P \subset Q \subset R} (-1)^{a_P - a_Q} \tau_P^Q \hat{\tau}_Q^R = \delta_P^R$$

où δ_P^R est le symbole de Kronecker. On fixe $H \in \mathfrak{a}_P^R$, il existe $\underline{S}$ entre $\underline{P}$ et $\underline{R}$ tel que $\alpha \in \Delta_P^S$ équivaut à $\alpha(H) > 0$ et $\alpha \in \Delta_P^R$; le premier membre évalué en H se réduit à

$$\sum_{P \subset Q \subset S} (-1)^{a_P - a_Q} \hat{\tau}_Q^R(H) \;;$$

comme les paraboliques $\underline{Q}$ entre $\underline{P}$ et $\underline{S}$ sont en bijection avec les sous-ensembles de Δ_P^S il est élémentaire de prouver que cette somme est nulle sauf si $\bar{\omega}(H) > 0$ et $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_P^R$ équivaut à $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_S^R$. Il résulte du lemme 3.1 que l'on doit avoir simultanément $\bar{\omega}(H) > 0$ et $\bar{\omega}(H) \leq 0$ pour tout $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_P^R$, si le premier membre est non nul, ce qui impose $\underline{P} = \underline{R}$.

3.3. Quitte à modifier $\varepsilon \in G'$ sans changer sa classe dans G'/G , on peut supposer que ε normalise P_o , M_o (et A_o). On dira que $\underline{P}$ est un ε-parabolique si $\underline{P}$ est un parabolique standard normalisé par ε . On notera P_ε (resp. $M_{P,\varepsilon}$) le groupe engendré par P (resp. M_P) et ε lorsque $\underline{P}$ est un ε-parabolique.

Si $\underline{P} \subset \underline{Q}$ est un couple de ε-paraboliques, ε opère sur Δ_P^Q (resp. $\hat{\Delta}_P^Q$) on notera ${}_\varepsilon\Delta_P^Q$ (resp. ${}_\varepsilon\hat{\Delta}_P^Q$) l'ensemble des projections, sur l'espace $(\mathfrak{a}_P^Q)^\varepsilon$ des ε-invariants, de Δ_P^Q (resp. de $\hat{\Delta}_P^Q$). Enfin on pose $a_P^\varepsilon = \dim \mathfrak{a}_P^\varepsilon$. On est alors en mesure de définir des matrices ${}_{\varepsilon}\tau$ et ${}_{\varepsilon}\hat{\tau}$ qui vérifient l'analogue du lemme 3.2.

3.4. On considère un parabolique $\underline{Q}$ et on pose

$$\phi_o^Q = \sum_{P_o \subset R \subset Q} (-1)^{a_R - a_Q} \hat{\tau}_R^ Q \ ;$$

c'est la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_o^Q$ tels que $\bar{\omega}(H) \leq 0$ pour tout $\bar{\omega} \in \hat{\Delta}_o^Q$. Si $\underline{P}$ est fixé on a le

Lemme 3.4.— $$\sum_{P_o \subset Q \subset P} \phi_o^Q \tau_Q^P = 1 \ .$$

Cela résulte immédiatement du lemme 3.2. On a ainsi défini une partition de $\mathfrak{a}_o^P$ en cônes convexes indexée par les paraboliques $\underline{Q}$ entre $\underline{P_o}$ et $\underline{P}$.

3.5. Introduisons ${}_{\varepsilon}\sigma_Q^R$ la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_o$ tels que $\alpha(H) > 0$ si $\alpha \in \Delta_Q^R$, $\alpha(H) \leq 0$ si $\alpha \in \Delta_Q - \Delta_Q^R$ et ${}_{\varepsilon}\bar{\omega}(H) > 0$ si ${}_{\varepsilon}\bar{\omega} \in {}_{\varepsilon}\hat{\Delta}_{\bar{R}}$, où $\underline{\bar{R}}$ est le plus grand ε-parabolique contenu dans $\underline{R}$. Il est (presque) immédiat que pour $\underline{P} \supset \underline{Q}$ fixés on a le

Lemme 3.5.— $$\sum_{R \supset P} {}_{\varepsilon}\sigma_Q^R = \tau_Q^P \, {}_{\varepsilon}\hat{\tau}_P \ .$$

3.6. On définit une matrice ${}_{\varepsilon}\Gamma(.,.)$ de fonctions sur $\mathfrak{a}_o \times \mathfrak{a}_o$ en posant

$${}_{\varepsilon}\Gamma(H,X) = {}_{\varepsilon}\tau(H)\, {}_{\varepsilon}\hat{\tau}(H-X) \ .$$

Grâce au lemme 3.1, on voit que pour X fixé la fonction $H \mapsto {}_{\varepsilon}\Gamma_{P,Q}(H,X)$ qui ne dépend que de la projection de H sur $(\mathfrak{a}_P^Q)^{\varepsilon}$, est à support compact comme fonction sur cet espace ; son intégrale sera notée $(-1)^{a_P^{\varepsilon} - a_Q^{\varepsilon}} {}_{\varepsilon}\gamma_P^Q(X)$, c'est un polynôme en X. Par ailleurs, du lemme 3.2 ou de son analogue ε-invariant on déduit le

Lemme 3.6.— $${}_{\varepsilon}\hat{\tau}_P(H-X) = \sum_{\substack{P \supset Q \\ \varepsilon(P)=P \\ \varepsilon(Q)=Q}} (-1)^{a_Q^{\varepsilon} - a_G^{\varepsilon}} {}_{\varepsilon}\hat{\tau}_P^Q(H)\, {}_{\varepsilon}\Gamma_Q(H,X) \ ,$$

où ${}_{\varepsilon}\Gamma_Q = (-1)^{a_Q^{\varepsilon} - a_G^{\varepsilon}} {}_{\varepsilon}\Gamma_{Q,G}$.

3.7. Soient $\underline{P} \subset \underline{Q}$ deux ε-paraboliques, les éléments de ${}_{\varepsilon}\Delta_P^Q$ définissent des hyperplans dans $(\mathfrak{a}_P^Q)^{\varepsilon}$, les chambres sont en bijection avec l'ensemble $W_Q(\mathfrak{a}_P)^{\varepsilon}$ des éléments $w \in W_Q$ le groupe de Weyl de $\underline{M}_Q$ (relatif à $\underline{T_o}$) tels que $w(\mathfrak{a}_P^{\varepsilon}) = \mathfrak{a}_R^{\varepsilon}$ où $\underline{R}$ est un ε-parabolique dans $\underline{Q}$, et tels que de plus w soit l'élément de longueur minimale dans sa classe modulo W_R ; un tel élément commute à ε. On pose $\underline{P}_w = \underline{R}$ et on voit que

$$\sum_{w \in W_Q(\mathfrak{a}_P^{\varepsilon})} \tau_{P_w}^Q(w(H)) = 1$$

si H n'appartient à aucun hyperplan radiciel dans $(\mathfrak{a}_P^Q)^{\varepsilon}$.

4. Troncatures et identité de base

4.1. Soit $\underline{P}$ un ε-parabolique avec radical unipotent $\underline{N}_P$ et sous-groupe de Levi $\underline{M}_P$, on pose

$$K_P(x,y) = \sum_{\gamma\in M_{P,\varepsilon}} \int_{N_P} f(x^{-1}\gamma ny)\,dy .$$

On choisit un bon sous-groupe compact maximal $\mathbb{K}$; tout $g \in \mathbb{G}^1$ s'écrit $a(g)pk$ avec $p \in \mathbb{P}_0^1$, $k \in \mathbb{K}$ et $a(g) \in A_0^G$. L'élément $a(g)$ est bien déterminé, son logarithme est noté $H(g)$. On choisit $T \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier (c'est-à-dire $\alpha(T) \gg 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$) et on définit une troncature de $K(x,x)$ par

$$_\varepsilon k^T(x) = \sum_{\varepsilon(P)=P} (-1)^{a_P^\varepsilon - a_G^\varepsilon} \sum_{\delta\in P\backslash G} {}_\varepsilon\hat{\tau}_P(H(\delta x)-T)K_P(\delta x,\delta x) .$$

PROPOSITION 4.1 [A1], [CLL].— *L'intégrale de* $_\varepsilon k^T(x)$ *sur* X_G *converge.*

Cette intégrale sera notée $_\varepsilon J^T(f)$. La démonstration repose sur deux types d'arguments. Tout d'abord, au moyen d'un domaine de Siegel (pour P) et de la fonction $\phi_0^Q\tau_Q^P$ (définie en 3.4) translatée par T, on exhibe une fonction caractéristique $\mathcal{C}_Q^P(.,T)$ sur $Q\backslash\mathbb{G}^1$ dont le support est contenu dans le produit d'un compact de $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$ par un cône dans A_P^Q, et qui vu le lemme 3.4 vérifie

$$\sum_{\{Q|P_0\subset Q\subset P\}} \sum_{\xi\in Q\backslash P} \mathcal{C}_Q^P(\xi x,T)) = 1 .$$

De même $\phi_0^Q {}_\varepsilon\sigma_Q^R$ permet de définir une fonction caractéristique $_\varepsilon\mathcal{S}_Q^R(.,T)$ sur $Q\backslash\mathbb{G}^1$ (indépendante de P) qui vu le lemme 3.5 vérifie

$$\sum_{R\supset P} {}_\varepsilon\mathcal{S}_Q^R(x,T) = \mathcal{C}_Q^P(x,T)\,{}_\varepsilon\hat{\tau}_P(H(x)-T) .$$

Pour prouver l'intégrabilité de

$$_\varepsilon k^T(x) = \sum_{\substack{P_0\subset Q\subset P\\ \varepsilon(P)=P}} \sum_{\xi\in Q\backslash G} (-1)^{a_P^\varepsilon - a_G^\varepsilon} \mathcal{C}_Q^P(\xi x,T)\,{}_\varepsilon\hat{\tau}_P(H(\xi x)-T)K_P(\xi x,\xi x) ,$$

il suffit donc de montrer que

$$_\varepsilon\mathcal{S}_Q^R(x,T) \sum_{\substack{Q\subset P\subset R\\ \varepsilon(P)=P}} (-1)^{a_P^\varepsilon} K_P(x,x)$$

est intégrable sur $Q\backslash\mathbb{G}^1$. La présence de $_\varepsilon\mathcal{S}$ ramène à l'intégration dans le produit d'un compact par un cône convexe de $(\mathfrak{a}_Q^G)^\varepsilon$; la somme alternée fait se compenser les termes à croissance lente dans ce cône (estimés au moyen de la formule de Poisson sur $\mathbb{N}_Q$), le reste est à décroissance rapide. Nous nous contenterons d'illustrer cette partie de la preuve par le cas particulier suivant qui en est le prototype : on considère $G = GL_2$ et on se restreint à la contribution de la classe de conjugaison de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in N_0$; on doit montrer la convergence de

$$\int_{\mathbb{N}_0P_0\backslash\mathbb{G}^1} \hat{\tau}_{P_0}(H(x)-T)\left\{\sum_{\xi\in N_0-\{1\}} f(x^{-1}\xi x) - \int_{\mathbb{N}_0} f(x^{-1}nx)\,dn\right\}d\dot{x} ,$$

ce qui comme application de la formule de Poisson est standard [G2].

4.2. Soit $\underline{P}$ un sous-groupe parabolique de radical unipotent N_P et soit $\varphi \in L^1_{loc}(X_G)$, on pose

$$\varphi_P(x) = \int_{N_P\backslash \mathbb{N}_P} \varphi(nx)\,dn \ .$$

Rappelons que φ est dite cuspidale si $\varphi_P = 0$ pour tout P . Soit S un sous-groupe parabolique standard et $T \in \mathfrak{a}_0$, on définit un opérateur de troncature $\Lambda^{T,Q}$ par

$$(\Lambda^{T,Q}\varphi)(x) = \sum_{P_0\subset R\subset Q} (-1)^{a_R-a_Q} \sum_{\xi\in R\backslash Q} \hat{\tau}^Q_R(H(\xi x) - T)\varphi_R(\xi x) \ .$$

On pose $\Lambda^T = \Lambda^{T,G}$ dont les propriétés essentielles, pour T assez régulier, sont les suivantes :

(t_1) Λ^T induit l'identité sur les formes cuspidales ;

(t_2) Λ^T induit un projecteur orthogonal dans $L^2(X_G)$;

(t_3) Λ^T transforme une fonction à croissance lente, ainsi que ses dérivées, en fonction à décroissance rapide.

Si (t_1) est évident, la preuve de (t_2) et (t_3) est délicate ([A2]).

Il résulte de (t_3) que $\Lambda^T K$ est un noyau de Hilbert-Schmidt et par factorisation on en déduit que $\Lambda^T K \Lambda^T$ est à trace, (t_1) montre que la trace dans le spectre parabolique n'est pas altérée ; enfin grâce à (t_2) on peut montrer que

$$\int_{X_G} (\Lambda^T K \Lambda^T)(x,x)\,dx = \int_{X_G} (\Lambda^T K)(x,x)\,dx \ .$$

4.3. On verra plus loin que si la première troncature se prête bien au développement suivant les classes de conjugaison, la seconde convient au développement suivant les données spectrales. Pour l'instant il convient de les comparer. Commençons par le cas connexe (i.e. $\varepsilon = 1$).

THÉORÈME 4.3 [A2].— *Si* T *est assez régulier et* $\varepsilon = 1$, *on a*

$$J^T(f) = \int_{X_G} k^T(x)\,dx = \int_{X_G} (\Lambda^T K)(x,x)\,dx = \mathrm{tr}(\Lambda^T K \Lambda^T) \ .$$

Pour le prouver on exploite tout d'abord "l'identité de base"

$$K_P(x,x) = \sum_{Q\subset P} \sum_{\xi\in Q\backslash P} \tau^P_Q(H(\xi x) - T)\Lambda^{T,Q} K_P(\xi x,\xi x)$$

qui résulte immédiatement de la définition de $\Lambda^{T,Q}$ et du lemme 3.2.

En faisant appel au lemme 3.5 on voit que l'intégrale de k^T sur X_G égale la somme sur les couples de sous-groupes paraboliques $\underline{Q} \subset \underline{R}$ des intégrales sur $Q\backslash \mathbb{G}^1$ de

$$\sigma^R_Q(H(x) - T) \sum_{Q\subset P\subset R} (-1)^{a_P-a_G} \Lambda^{T,Q} K_P(x,x) \ .$$

On démontre, lorsque T est assez régulier, que ces expressions sont nulles sauf si $Q = R = G$ (si $Q = R \neq G$, $\sigma^Q_Q = 0$ et si $\underline{Q} \neq \underline{R}$ les contraintes sur $H(x) - T$ font sortir x du support de la somme alternée des K_P si T est assez régulier).

4.4. Dans le cas non connexe le résultat est moins simple. Comme on ne modifie pas la définition de $\Lambda^{T,Q}$ l'identité de base reste inchangée. On obtient l'assertion suivante :

$$_\varepsilon J^T(f) = \sum_{\substack{Q\subset P\subset R\\ \varepsilon(P)=P}}{}' \int_{Q\backslash\mathbb{G}^1} (-1)^{a_P^\varepsilon - a_G^\varepsilon}\, {}_\varepsilon\sigma_Q^R(H(x)-T)\Lambda^{T,Q}K_P(x,x)\,dx\ ,$$

où la somme Σ' est réduite aux couples $\underline{Q}\subset\underline{R}$ tels qu'un seul ε-parabolique $\underline{P}$ vérifie $\underline{Q}\subset\underline{P}\subset\underline{R}$. Des résultats d'annulation plus fins sont en fait nécessaires pour la suite ([CLL], exposé 15).

5. Développement suivant les classes de conjugaison [A1] [CLL]

5.1. Rappelons d'abord que dans G' tout élément γ admet une décomposition de Jordan $\gamma=\gamma_s\gamma_u$ en partie semi-simple et unipotente. Dans la définition de K_P (4.1) en restreignant la sommation aux γ dans une classe pour la G-conjugaison des parties semi-simples, disons $\mathcal{O}$, on définit un noyau $K_{P,\mathcal{O}}$. Ceci permet de définir ${}_\varepsilon k^T_{\mathcal{O}}(x)$ dont l'intégrale ${}_\varepsilon J^T_{\mathcal{O}}(f)$ est convergente et de plus

$$_\varepsilon J^T(f) = \Sigma\ {}_\varepsilon J^T_{\mathcal{O}}(f)$$

la somme portant sur l'ensemble des classes de conjugaison semi-simple.

Vu l'hypothèse sur le support de f nous n'avons à considérer que les $\gamma\in G_\varepsilon$ qui se projettent dans G'/G sur la classe de ε.

Lorsque $\mathcal{O}$ est la classe d'un élément semi-simple elliptique régulier γ (son centralisateur dans $\underline{G}_\varepsilon$ modulo le centre de $\underline{G}_\varepsilon$ est un tore anisotrope) ${}_\varepsilon J^T_{\mathcal{O}}(f)$ n'est autre, comme dans le cas compact, que le produit d'un volume $v(\gamma)$ par l'intégrale orbitale $\Phi(f,\gamma)$. Une formule simple peut encore être donnée dans un cas un peu plus général.

5.2. Nous dirons que γ est quasi-régulier (semi-simple) si son centralisateur $G(\gamma)$ ne contient pas d'élément unipotent (rationnel). Pour simplifier nous supposerons de plus $G(\gamma)$ connexe. Il résulte de nos hypothèses qu'un tore déployé maximal dans $G(\gamma)$ est central dans $G(\gamma)$. A conjugaison près on peut supposer qu'il existe un ε-parabolique $\underline{P}_1$ tel que $A_1^\varepsilon\subset\mathbb{G}(\gamma)\subset\mathbb{M}_1\subset\mathbb{P}_1$ où $\underline{M}_1$ est un sous-groupe de Levi standard dont la partie ε-fixe du tore déployé maximal du centre contient un tore déployé maximal de $G(\gamma)$, ayant A_1^ε comme composante neutre sur $\mathbb{R}$.

Si $\mathcal{O}$ est la classe de conjugaison d'un tel γ on montre que ${}_\varepsilon J^T_{\mathcal{O}}(f)$ est l'intégrale sur X_G de

$$\sum_{\substack{P\supset P_0\\ \varepsilon(P)=P}} (-1)^{a_P^\varepsilon-a_G^\varepsilon} \sum_{\gamma_i\in a(\gamma,P)}\ \sum_{\delta\in M_P(\gamma_i)\backslash G} {}_\varepsilon\hat{\tau}_P(H(\delta x)-T)\,f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma_i\delta x)\ ,$$

où $a(\gamma,P)$ est un système de représentants des classes de conjugaison par M_P dans $M_{P,\varepsilon}\cap\mathcal{O}$. Les γ_i sont de la forme $w_i\gamma w_i^{-1}$ et on remarque que w_i^{-1} expédie

A_P^ε dans A_1^ε . Introduisons le "poids"

$$ {}_\varepsilon p_1(x,T) = \int_{(A_1^G)^\varepsilon} \sum_{\substack{P\supset P_0 \\ \varepsilon(P)=P}} (-1)^{a_P^\varepsilon - a_G^\varepsilon} \sum_{w_i} {}_\varepsilon\hat{\tau}_P(H(w_i ax)-T)\,da , $$

où les w_i parcourent un ensemble de représentants des classes à droites d'éléments $w \in W_G^\varepsilon$ (le commutant de ε dans le groupe de Weyl de $\underline{G}$) tels que $A_P^\varepsilon \subset w(A_1^\varepsilon)$, modulo $W_{M_P}^\varepsilon$. En insérant les partitions, définies en 3.7, des $(A_R^P)^\varepsilon$ où $A_R^\varepsilon = w_i(A_1^\varepsilon)$ et en faisant appel aux fonctions ${}_\varepsilon\Gamma$ définies en 3.6 on voit que

$$ {}_\varepsilon p_1(x,T) = \int_{(a_1^G)^\varepsilon} \sum_{w\in W_G(a_{P_1}^\varepsilon)} {}_\varepsilon\Gamma_{P_1,w}(w(H)\ ,T-H(wx))\,dH ; $$

il résulte de 3.6 que cette intégrale converge et définit un polynôme en T . En utilisant que les centralisateurs $M_P(\gamma_i)$ sont conjugués de $G(\gamma)$ on obtient

$$ {}_\varepsilon J_{\mathcal{O}}^T(f) = v(\gamma)\int_{\mathbb{G}^1(\gamma)\backslash\mathbb{G}^1} f(x^{-1}\gamma x)\,{}_\varepsilon p_1(x,T)\,dx , $$

où $v(\gamma)$ est le volume de $(A_1^G)^\varepsilon G(\gamma)\backslash\mathbb{G}^1(\gamma)$. On a ainsi exprimé ${}_\varepsilon J_{\mathcal{O}}^T(f)$ comme intégrale orbitale pondérée.

5.3. En dehors du cas quasi régulier la situation n'est pas définitivement éclaircie ; des travaux en cours dus à Arthur devraient permettre d'exprimer ${}_\varepsilon J_{\mathcal{O}}^T$ comme somme de limites d'intégrales orbitales pondérées.

6. Propriétés formelles des termes de la formule des traces

6.1. Soit $\underline{M}$ un sous-groupe de Levi d'un parabolique $\underline{P}$, et σ une représentation irréductible cuspidale de $\mathbb{M}^1$ dans $L^2(X_M)$. On considère une fonction lisse φ sur $\mathbb{N}_P M\backslash\mathbb{G}^1$, à support compact modulo $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{K}$-finie et telle que $m \longmapsto \varphi(mg)$ appartienne à l'espace de σ (pour tout g) ; la série

$$ \varphi^G(x) = \sum_{\gamma\in P\backslash G} \varphi(\gamma x) $$

converge et définit un élément dans $L^2(X_G)$. Le sous-espace engendré par les φ^G obtenues à partir d'une classe χ de couples (M,σ) , modulo conjugaison par G_ε sur (M,σ) et équivalence sur σ , sera noté $L^2_\chi(X_G)$. Une classe χ est appelée donnée cuspidale. L'espace $L^2(X_G)$ est somme des $L^2_\chi(X_G)$ et le noyau K se décompose en somme de noyaux K_χ . De façon analogue on introduit des noyaux $K_{P,\chi}$, on forme comme en 4.1 une fonction ${}_\varepsilon k_\chi^T(x)$ dont l'intégrale sera notée ${}_\varepsilon J_\chi^T(f)$. La preuve de la convergence de cette intégrale repose sur un raffinement du théorème 4.3. On en déduit également le

THÉORÈME 6.1.— $$ \sum_{\mathcal{O}} {}_\varepsilon J_{\mathcal{O}}^T(f) = \sum_\chi {}_\varepsilon J_\chi^T(f) , $$

qui généralise l'identité (4) du 1.1 et que l'on appellera formule des traces d'Arthur-Selberg.

6.2. Une propriété formelle importante de ces expressions, définies rappelons le pour T assez régulier, est la

PROPOSITION 6.2.– *Les expressions* ${}_\varepsilon J^T(f)$, ${}_\varepsilon J^T_0(f)$ *et* ${}_\varepsilon J^T_\chi(f)$ *dépendent polynomialement de* T *lorsque* T *est assez régulier.*

Il suffit de montrer que ${}_\varepsilon J^{T+X}_*(f)$ est polynomial en X . On utilise la définition de ${}_\varepsilon J^T_*(f)$ comme intégrale de ${}_\varepsilon k^T_*(x)$ défini en 4.1. En invoquant le lemme 3.6 un calcul direct montre que pour T et X assez réguliers on a

$$ {}_\varepsilon J^{T+X}_*(f) = \sum_{\substack{P_0\subset Q\\ \varepsilon(Q)=Q}} {}_\varepsilon\gamma_Q(X)\,{}_\varepsilon J^{T,Q}_*(f_Q) \ , $$

où ${}_\varepsilon J^{T,Q}_*(f_Q)$ est un terme de la formule des traces sur $X_Q = \mathbb{N}_Q Q\backslash\mathbb{Q}^1$ pour une fonction f_Q sur $\mathbb{M}_\varepsilon$ déduite de f par la formule suivante

$$ f_Q(m) = \delta_Q(m)^{1/2}\int_{\mathbb{K}}\int_{\mathbb{N}} f(k^{-1}mnk)\,dn\,dk $$

(où δ_Q est le module du groupe $\mathbb{Q}$) et ${}_\varepsilon\gamma_Q(X)$ est polynomial d'après 3.6.

6.3. La proposition 6.2 permet de définir ${}_\varepsilon J^T_*(f)$ pour tout T . On peut fixer $T = T_0$ de sorte que les expressions obtenues soient indépendantes du parabolique minimal choisi, pourvu qu'il admette encore $\underline{M}_0$ comme Levi et soit ε-stable. Même en ce point T_0 les distributions $f \mapsto {}_\varepsilon J^T_*(f)$ ne sont en général pas invariantes par les automorphismes intérieurs de $\mathbb{G}$. Dans [A3] une méthode pour remplacer ces distributions par des distributions invariantes a été développée ; nous n'aborderons pas cette question (voir toutefois 6.5).

6.4. Pour de nombreuses applications (cf. 8.2) on peut se contenter du cas particulier suivant : on suppose que f est telle que

$$ \int_{\mathbb{N}_P} f(x^{-1}ny)\,dn = 0 $$

pour tout parabolique P , tout x et tout y et d'autre part on suppose que $f(x^{-1}\gamma x) = 0$ si γ n'est pas elliptique régulier. Les troncatures opèrent trivialement, donc ${}_\varepsilon k^T(x) = K(x,x)$ et son intégrale donne la trace dans le spectre cuspidal. En développant suivant les classes de conjugaison, on obtient une formule des traces identique au cas compact, habituellement désignée sous le nom de Deligne-Kazhdan ; c'est une conséquence immédiate du théorème 6.1.

6.5. Une application classique de la formule des traces est de calculer la dimension d'espaces de formes automorphes qui se transforment suivant une représentation discrète de $\underline{G}(\mathbb{R})^1$, et plus généralement de calculer la trace des opérateurs de Hecke dans ces espaces [S1]. L'utilisation de pseudo-coefficients (1.2) permet en principe de résoudre le problème, mais suppose la mise sous forme invariante de la formule des traces [A3] et le calcul explicite de la transformée de Fourier de ses termes [A 8,9]. Ce programme a été mené à bien dans le cas de GL_2 [DL] et appliqué à l'étude des courbes modulaires [L3].

7. <u>Sur les termes attachés aux données cuspidales</u> [A 4,5] [CLL]

7.1. Si χ est la classe de $(\underline{G},\sigma)$, c'est-à-dire si σ est cuspidale sur $\mathbb{G}$, et si $\varepsilon = 1$ on a

$$J_\chi^T(f) = m(\sigma)\, \mathrm{tr}\,\sigma(f)$$

où $m(\sigma)$ est la multiplicité de σ dans le spectre cuspidal. Mais en général le développement suivant lès classes χ n'est qu'une forme grossière de décomposition spectrale. Pour aller plus loin, nous devons faire appel à la théorie des séries d'Eisenstein [L2].

Si $\underline{M}$ est un sous-groupe de Levi d'un parabolique $\underline{P}$ et π une représentation unitaire irréductible de $\mathbb{M}^1$, on note $\rho_{\chi,\pi}(P,\lambda,.)$ la représentation unitaire induite de $A_P^G \times \mathbb{P}^1$ à $\mathbb{G}^1$ du produit tensoriel du caractère unitaire $e^{i\lambda}$ (où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_P^G$) avec la somme des composants discrets équivalents à π dans $L_\chi^2(X_M)$.

La représentation de $\mathbb{G}^1$ dans $L_\chi^2(X_G)$ est somme (continue) de représentations du type $\rho_{\chi,\pi}(P,\lambda)$, l'entrelacement entre ces représentations induites et $L^2(X_G)$ étant réalisé par le prolongement analytique des séries d'Eisenstein :
$\phi(.) \longmapsto E(.,\phi,\lambda)$. Ceci fournit pour ${}_\varepsilon J_\chi^T(f)$, grâce à 4.2 et 4.3, lorsque $\varepsilon = 1$ l'expression suivante :

$$J_\chi^T(f) = \sum_{P_0\subset P} \sum_\pi c_P \int_{\mathfrak{a}_P^G} \mathrm{tr}(\rho_{\chi,\pi}(P,\lambda,f)\Omega_{\chi,\pi}^T(P,\lambda))d\lambda \ ,$$

où c_P est une constante et $\Omega_{\chi,\pi}^T$ est l'opérateur défini par le produit scalaire des séries d'Eisenstein tronquées :

$$(\Omega_{\chi,\pi}^T(P,\lambda)\phi,\psi) = \int_{X_G} \Lambda^T E(x,\phi,\lambda)\overline{\Lambda^T E(x,\psi,\lambda)}dx \ .$$

Les séries d'Eisenstein tronquées sont en effet de carré intégrable d'après l'assertion (t_3) de 4.2.

Lorsque $\varepsilon \neq 1$, les expressions sont moins simples et ne seront pas données ici (cf. 4.4).

7.2. Soient $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ deux paraboliques, non nécessairement standard, admettant $\underline{M}$ et $\underline{L}$ comme Levi standard, soit enfin s un élément du groupe de Weyl, représenté par w et tel que $s(\mathfrak{a}_M) = \mathfrak{a}_L$; on définit l'"opérateur d'entrelacement" $M_{Q|P}(s,\lambda)$ qui transforme une fonction ϕ sur $A_P\mathbb{N}_P P\backslash G$ en la fonction sur $A_Q\mathbb{N}_Q Q\backslash G$ définie comme suit :

$$g \longmapsto \int_{\mathbb{N}(Q|P,s)} \phi(w^{-1}ng)\beta(n,g)dg \ ,$$

où $\log\beta(n,g) = (\lambda+\rho_P\, , H_P(w^{-1}ng)) - (s\lambda+\rho_Q\, , H_Q(g))$; ici ρ_P est la demi-somme des racines dans N_P et $H_P(g)$ est défini comme $H(g)$ en remplaçant P_0 par P, enfin $N(Q|P,s) = N_Q \cap wN_Pw^{-1}\backslash N_Q$.

En termes de ces opérateurs d'entrelacement on dispose d'une formule $\omega^T_{\chi,\pi}$ qui est égale à $\Omega^T_{\chi,\pi}$ lorsque π est cuspidale, mais hélas seulement asymptotique en T, en général [A4]. Le jeu consiste d'abord à substituer ω^T à Ω^T, ce qui est délicat puisque l'approximation ne semble être uniforme que pour λ dans un compact. En faisant appel à [A7] et en exploitant la combinatoire des paraboliques on produit une expression polynomiale et asymptotique à ${}_\varepsilon J^T_\chi(f)$; mais d'après la proposition 6.2, on sait que ${}_\varepsilon J^T_\chi(f)$ est aussi un polynôme, il y a donc égalité. Nous n'en dirons pas plus ici sur la preuve longue et difficile [A5] [CLL] de la formule donnée ci-dessous généralisant celle due à Selberg pour SL_2.

7.3. On peut exprimer ${}_\varepsilon J^T_\chi(f)$ comme somme de termes indexés par des sextuples $(M,L,P,s,\mathfrak{a},\pi)$ tels que

(i) $M_0 \subset M \subset L$ sont des sous-groupes de Levi standard ;

(ii) $P \in \mathcal{P}(M)$ l'ensemble des paraboliques admettant M comme Levi ;

(iii) s est la restriction à $\mathfrak{a}_{\varepsilon(M)}$ d'un élément du groupe de Weyl qui expédie $\mathfrak{a}_{\varepsilon(M)}$ sur $\mathfrak{a}_M$;

(iv) $\mathfrak{a}$ est le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ fixé par $s\varepsilon$;

(v) $(L,\mathfrak{a})$ est conjugué de $(M_1,\mathfrak{a}^\varepsilon_{M_1})$ où M_1 est le Levi d'un ε-parabolique contenant M ;

(vi) π est une représentation unitaire irréductible de $\mathbb{M}^1$ équivalente à $s\varepsilon(\pi)$.

Les termes sont le produit d'une constante

$$(2\pi)^{a_G-a_P}\ \mathrm{card}(\mathcal{P}(M))^{-1}\ \mathrm{card}(W_G)^{-1}\ \mathrm{card}(W_M)$$

(où W_G est le groupe de Weyl de $\underline{G}$, relatif à $\underline{T}_0$, et W_M celui de $\underline{M}$) par

$$|\det(s\varepsilon - 1|\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a})|^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*}\mathrm{tr}({}_\varepsilon\mathcal{M}^T_L(P,\lambda)M_{P|\varepsilon(P)}(s,\varepsilon(\lambda))\rho_{\chi,\pi}(P,\lambda,f))\,d\lambda\ .$$

Il nous reste à définir ${}_\varepsilon\mathcal{M}^T_L$ qui est la généralisation multidimensionnelle du classique $M(\lambda)^{-1}\frac{d}{d\lambda}M(\lambda)$ en rang un, c'est l'objet du numéro suivant.

On montre que lorsque $\varepsilon(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, l'opérateur $M_{P|\varepsilon(P)}(s,\varepsilon(\lambda))$ est indépendant de $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

7.4. On considère $Q \in \mathcal{P}(L)$; il existe un élément t dans le groupe de Weyl tel que $Q = t(P_1)$ avec P_1 standard. On note $\mathcal{P}_\varepsilon(L)$ l'ensemble des Q qui proviennent d'un P_1 ε-stable, ce qui permet de définir ${}_\varepsilon\Delta_Q$ (cf. 3.3). On notera ${}_\varepsilon\vartheta_Q(\Lambda)$ la fonction sur $\mathfrak{a}$ définie par le produit $\prod_{\alpha\in{}_\varepsilon\Delta_Q}\langle\Lambda,\alpha\rangle$ divisé par le volume du parallélépipède engendré par ${}_\varepsilon\Delta_Q$. On note $Z_Q(T)$ la projection sur $\mathfrak{a}$ de $t(T-T_0)+T_0$ où T_0 a été défini en 6.3. On considère enfin $R \in \mathcal{P}(M)$ tel que $R \cap L$ soit un parabolique de L. Pour λ fixé et Λ dans $\mathfrak{a}$ on pose

$$b_Q^T(\Lambda) = e^{\Lambda(Z_Q(T))} M_{R|P}(1,\lambda)^{-1} M_{R|P}(1,\lambda+\Lambda) \ .$$

On montre que c'est indépendant de R . On pose enfin

$$_\varepsilon b_L^T(\Lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{P}_\varepsilon(L)} b_Q^T(\Lambda)\, {}_\varepsilon\vartheta_Q(\Lambda)^{-1} \ .$$

On montre (en ayant une nouvelle fois recours aux fonctions $_\varepsilon\Gamma$ du 3.6 et à la notion de "famille cohérente" (G-M-family chez Arthur)) que cette fonction définie a priori pour les Λ tels que $_\varepsilon\vartheta_Q(\Lambda) \neq 0$ se prolonge en fonction lisse sur $\mathfrak{a}$ et on pose

$$_\varepsilon\mathcal{M}_L^T(P,\lambda) = {}_\varepsilon b_L^T(0) \ .$$

8. Applications : résultats, problèmes et perspectives

8.1. Outre les classiques calculs de dimension d'espaces de formes automorphes ou de trace d'opérateurs de Hecke (cf. 6.5) l'application principale envisagée pour la formule des traces est la démonstration de cas particuliers de ce qu'il est convenu d'appeler la fonctorialité de Langlands, soit par changement de groupe, soit par comparaison avec des objets arithmético-géométriques. Cette façon d'utiliser la formule des traces, dont l'idée est due à R. Langlands, a été exploitée dans de nombreuses situations déduites de GL_2 ([JL], [L 3,4,5], [LL], [Dr], [F1], [BL]) pour lesquelles la formule des traces est un outil docile.

8.2. Le cas simple, dit de Deligne-Kazhdan, a suffit pour obtenir de nombreux résultats pour des groupes plus gros, par exemple sur la comparaison entre formes tordues pour GL_n ([BDKV],[R]), sur la L-indiscernabilité pour SL_n ([K]), sur le changement de base local pour GL_n ([C]), et sur la conjecture de Langlands locale pour GL_3 ([Hn]).

8.3. Signalons l'extension à GL_n du § 16 de [JL] en utilisant [BDKV] et la formule des traces complète ([LV]).

Reprenant une suggestion de H. Jacquet, Y. Flicker ([F3]) a partiellement réussi à redémontrer les résultats de [GJ] au moyen d'une formule des traces tordue sur PGL_3 . Il a par ailleurs établi le changement de base pour GL_3 ([F2]). Enfin les situations attachées à $SU(2,1)$ ont fait l'objet de travaux de Flicker ([F4]) et du Séminaire [KLRS].

8.4. En dehors des situations déduites de GL_2 les résultats sont souvent partiels ; en effet d'une part la formule des traces tordue n'a été obtenue que récemment, mais surtout la mise en oeuvre de l'idée évoquée ci-dessus suppose de maîtriser de nombreuses techniques auxiliaires : stabilisation de la formule des traces ([LL], [L6]), lemme fondamental et transfert d'intégrales orbitales pour les groupes endoscopiques etc... toutes techniques en plein développement mais sans la maturité suffisante pour produire les résultats généraux nécessaires. Je renvoie au Séminaire [KLRS] pour le "credo" de Langlands sur ces questions et une bibliographie.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] J. ARTHUR - *A trace formula for reductive groups I*, Duke Math. Journ. vol. 45, n° 4(1978), 911-951.

[A2] J. ARTHUR - *A trace formula for reductive groups II*, Compositio Math. vol. 40, fasc. 1(1980), 87-121.

[A3] J. ARTHUR - *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. vol. 114 (1981), 1-74.

[A4] J. ARTHUR - *On the Inner product of Truncated Eisenstein series*, Duke Math. Journ. 49(1982), 35-70.

[A5] J. ARTHUR - *On a family of distributions obtained from Eisenstein series*, I et II, Amer. J. Math. vol. 104, n° 6(1981), 1234-1288 et 1289-1336.

[A6] J. ARTHUR - *The trace formula for reductive groups*, Journées Automorphes, Publ. Math. Univ. Paris 7 vol. 15(1983), 1-41.

[A7] J. ARTHUR - *A Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Acta Math. vol. 150(1983), 1-89.

[A8] J. ARTHUR - *The characters of discrete series as orbital integrals*, Inv. Math. 32(1976), 205-261.

[A9] J. ARTHUR - *On the invariant distributions associated to weighted orbital integrals*, preprint.

[B] F. BRUHAT - *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques*, Bull. Soc. Math. France 89(1961), 43-75.

[BDKV] J. BERNSTEIN, P. DELIGNE, D. KAZHDAN, M.-F. VIGNERAS - *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris (1984).

[BL] J.-L. BRYLINSKI, J.-P. LABESSE - *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Sci. E.N.S. vol. 17, n° 3(1984), 367-418.

[C] L. CLOZEL - *Le changement de base local pour* GL_n , Cours Pécot, Collège de France (1984).

[CD] L. CLOZEL, P. DELORME - *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes de Lie réductifs réels*, Note aux CRAS, Paris, t 300, Série I, n° 12(1985), 385-387.

[CLL] L. CLOZEL, J.-P. LABESSE, R. LANGLANDS - *Morning Seminar on the Trace formula*, exposés 1 à 15, notes multigraphiées, I.A.S. Princeton (1983-84).

[D] H. DONNELLY - *Eigenvalue estimate for certain noncompact manifolds*, preprint, Purdue Univ. (1984).

[DL] M. DUFLO, J.-P. LABESSE - *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. Sci. E.N.S. 4(1971), 193-284.

[DM] J. DIXMIER, P. MALLIAVIN - *Factorisation de fonctions et vecteurs indéfiniment différentiables*, Bull. Sci. Math. n° 102(1978), 305-330.

[Dr] V.G. DRINFELD - *Langlands' conjecture for* GL(2) *over functional fields*, Proc. Intern. Cong. Math. 1978, vol. 2, 565-574.

[F1] Y. FLICKER - *Automorphic forms on coverings of* GL(2) , Inv. Math. 57(1980), 119-182.

[F2] Y. FLICKER - *Base change for* GL(3) , Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 927(1982).

[F3] Y. FLICKER - *Symmetric square, application of a trace formula*, preprint, Princeton Univ. (1984).

[F4] Y. FLICKER - L-*packets and liftings for* U(3) , preprint (1982).

[G1] R. GODEMENT - *La formule des traces de Selberg*, Séminaire Bourbaki, exposé 244(1962), Benjamin Inc., New York, 1966.

[G2] R. GODEMENT - *Analyse spectrale des fonctions modulaires*, Séminaire Bourbaki, exposé 278(1964), Benjamin Inc. New York, 1966.

[Hj] D. HEJHAL - *The Selberg trace formula for* PSL(2,$\mathbb{R}$), Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 1001(1983).

[Hn] G. HENNIART - *La conjecture de Langlands locale pour* GL_3 , Thèse Orsay, 1983, à paraître aux Mémoires de la Soc. Math. France.

[J] H. JACQUET - Exposé, I.A.S. Princeton (octobre 1983).

[JL] H. JACQUET, R. LANGLANDS - *Automorphic forms on* GL(2) , Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 114(1970).

[K] D. KAZHDAN - *On lifting, Lie group representations II*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 1041(1984), 209-249.

[KLRS] R. KOTTWITZ, R. LANGLANDS, J. ROGAWSKI, D. SHELSTAD - *Afternoon Seminar on trace formula*, notes multigraphiées, I.A.S. Princeton (1983-84).

[LL] J.-P. LABESSE, R. LANGLANDS - L-*indistinguishability for* SL(2) , Canad. J. Math. vol. 31, n° 4(1979), 726-785.

[L1] R. LANGLANDS - *Dimension on space of automorphic forms*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. vol. IX(1966), 253-257.

[L2] R. LANGLANDS - *On the functional equation satisfied by Eisenstein series*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 544(1976).

[L3] R. LANGLANDS - *Modular forms and ℓ-adic representations in modular functions of one variable II*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 349(1972), 361-500.

[L4] R. LANGLANDS - *Base change for* GL(2) , Ann. of Math. Studies n° 96(1980).

[L5] R. LANGLANDS - *On the zeta functions of some simple Shimura varieties*, Canad. J. of Math. vol. 31, n° 6(1979), 1121-1216.

[L6] R. LANGLANDS - *Les débuts d'une formule des traces stable*, Public. Math. Univ. Paris 7 vol. 13(1983).

[LV] R. LANGLANDS, M.-F. VIGNERAS - *Thursday Seminar on the trace formula*, notes multigraphiées, I.A.S. Princeton (1984).

[OW1] M.S. OSBORNE, G. WARNER - *The Selberg trace formula I : Γ-rank one lattices*, Crelles J. 324(1981), 1-113.

[OW2] M.S. OSBORNE, G. WARNER - *The Selberg trace formula II : Partition, reduction, troncation*, Pacific. J. vol. 106, n° 2(1983), 307-496.

[OW3] M.S. OSBORNE, G. WARNER - *The Selberg trace formula III : Inner product formula*, Memoirs Amer. Math. Soc. vol. 44, n° 283(1983).

[R] J. ROGAWSKI - *Representations of* GL(n) *and division algebras over a* p-*adic field*, Duke Math. J. 50(1983), 161-196.

[S1] A. SELBERG - *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20(1956), 47-87.

[S2] A. SELBERG - *Discontinuous groups and harmonic analysis*, Proc. Intern. Cong. Math. (1962), 177-189.

[V] A.B. VENKOV - *The spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics*, Russian Math. Surveys 34:3(1979), 79-153.

Jean-Pierre LABESSE

Laboratoire de Physique Mathématique
Université de Dijon
B.P. 138
F-21004 DIJON CEDEX