Astérisque

CHRISTINE RIEDTMANN

# Algèbres de type de représentation fini

*Astérisque*, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. nº 650, p. 335-350

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__335_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-1985, n° 650 Juin 1985

# ALGÈBRES DE TYPE DE REPRÉSENTATION FINI

d'après BAUTISTA, BONGARTZ, GABRIEL, ROITER et d'autres

par Christine RIEDTMANN

## 1. INTRODUCTION

Soit A une algèbre associative unitaire de dimension finie sur un corps k algébriquement clos. D'après le théorème de Krull-Remak-Schmidt tout A-module de type fini se décompose de façon essentiellement unique en une somme directe de modules indécomposables. On dit que A est de type de représentation fini (trf) si A ne possède qu'un nombre fini de modules indécomposables (à isomorphisme près).

Exemples : une algèbre commutative locale de trf est isomorphe à $k[T]/(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$. En effet, dans le cas contraire, elle admet l'algèbre $B = k[S,T]/(S,T)^2$ comme quotient, ce qui est exclu, puisque les B-modules $B/(S-\lambda T)$, $\lambda \in k$, sont indécomposables et deux à deux non-isomorphes. L'algèbre kG d'un groupe fini G est de trf si et seulement si les p-groupes de Sylow sont cycliques où $p = \operatorname{car} k$ [Hi]. Les algèbres indécomposables de trf et de dimension globale $\leq 1$ se répartissent en classes indexées par les diagrammes de Dynkin $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$ et $E_8$ [G1].

A une algèbre A de trf on peut associer un complexe simplicial fini de dimension 2. En passant par le revêtement universel de ce complexe, on définit le "revêtement universel" puis la forme standard de A, deux invariants de nature combinatoire, qui ont été étudiés par Bongartz, Bretscher et Gabriel dans [BoG], [G4] et [Br G]. Mais il manquait une méthode pour décrire toutes les algèbres ayant la même forme standard. En particulier, on ignorait si l'existence d'algèbres non-isomorphes à leur forme standard était spéciale à la caractéristique 2, seule caractéristique où l'on connaissait des exemples [Ri 1, 2].

L'article [Ro] de Roiter apportait les idées permettant de répondre à cette question. Les efforts de Bautista, Gabriel et Salmerón pour comprendre et compléter ce travail ont mené à l'article commun [BGRS] . Joint à deux résultats récents de Bongartz [Bo 4] et Fischbacher [Fi 1], cet article donne une analyse complète des algèbres de trf , que l'on va tenter d'expliquer dans cet exposé. Nos "démonstrations" sont en fait des esquisses de démonstrations.

On définit au paragraphe 4 la forme standard pour la classe plus vaste des algèbres distributives, et on donne le critère de Bongartz [§ 8] , qui permet de discerner les algèbres de trf parmi les algèbres distributives standard.

On montre que si car $k \neq 2$ , toute algèbre de trf est standard [§ 5], et on décrit toutes les algèbres de trf ayant une forme standard donnée en caractéristique 2 [§ 6]. Il découle de cette description que toute algèbre A de trf possède une base multiplicative filtrée, i.e. une base B telle que tout produit de deux éléments de B soit nul ou se trouve dans B et telle que B contienne une base de toute puissance du radical de A . (Les éléments d'un groupe fini G forment une base multiplicative de kG , mais cette base n'est filtrée que si le radical de kG est nul, i.e. si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G ). L'existence d'une base multiplicative implique qu'en toute dimension il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres de trf (à isomorphisme près). Mais le critère de Bongartz permet d'en construire une telle multitude qu'une classification semble hors de portée.

Finalement [§ 9] on donne une nouvelle démonstration d'un théorème de Nazarova et Roiter (seconde conjecture de Brauer-Thrall) : une algèbre de type de représentation infini possède une infinité d'indécomposables en une infinité de dimensions [NR] .

Je tiens à remercier N. A'Campo et K. Bongartz et mes collègues de Grenoble et Bâle pour l'aide apportée à la préparation de cet exposé.

## 2. PRÉLIMINAIRES [BGRS]

Il est plus commode de travailler avec des petites catégories k-linéaires, que nous introduisons maintenant, qu'avec les algèbres associatives unitaires.

Soit Q un carquois (= graphe orienté) localement fini. Un chemin de longueur $n \geq 0$ d'un sommet a vers un sommet b dans Q est une suite

$a \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} b$ de flèches de Q (si $n = 0$ , c'est le chemin paresseux qui ne quitte pas le sommet $a = b$). Les objets de la *catégorie* k-linéaire $kQ$ *des chemins* de $Q$ sont les sommets de $Q$, un morphisme dans $kQ(a,b)$ est une combinaison linéaire finie de chemins de $a$ vers $b$, et la composition est induite par la composition des chemins.

Les chemins de longueur $\geq 1$ engendrent un idéal $kQ_+$ de $kQ$. [Un *idéal* (bilatère) d'une catégorie k-linéaire $\Lambda$ est la donnée d'un sous-espace vectoriel $I(a,b) \subseteq \Lambda(a,b)$ pour tout couple $a,b$ d'objets de $\Lambda$, vérifiant $\beta\gamma\alpha \in I(a',b')$, $\forall \alpha \in \Lambda(a',a)$, $\gamma \in I(a,b)$, $\beta \in \Lambda(b,b')$]. Un idéal $I \subseteq kQ$ est appelé *admissible* si $I \subseteq kQ_+^2$ et si pour tout sommet $a$ il existe un entier naturel $\ell_a$ tel que les chemins d'extrémité $a$ et de longueur $\geq \ell_a$ se trouvent dans $I$. Si $I$ est admissible, la catégorie quotient $kQ/I$ est une catégorie localement bornée :

DÉFINITION. Une *catégorie localement bornée* est une catégorie k-linéaire ayant les propriétés suivantes :

i) Deux objets distincts ne sont pas isomorphes.

ii) Pour tout objet $a$ l'algèbre $\Lambda(a,a)$ est locale, i.e. $\Lambda(a,a)/\mathrm{rad}\,\Lambda(a,a)$ est isomorphe à $k$.

iii) Pour tout objet $a$ on a

$$\sum_b \dim_k \Lambda(a,b) < \infty \quad \text{et} \quad \sum_b \dim_k \Lambda(b,a) < \infty .$$

Réciproquement toute catégorie localement bornée $\Lambda$ est isomorphe à une catégorie $kQ_\Lambda/I$ : le *radical* $\mathfrak{R}\Lambda$ de $\Lambda$ est l'idéal des morphismes non-inversibles de $\Lambda$. Les sommets du carquois $Q_\Lambda$ sont les objets de $\Lambda$, et $Q_\Lambda$ contient $\dim_k \mathfrak{R}\Lambda(a,b)/\mathfrak{R}^2\Lambda(a,b)$ flèches de $a$ vers $b$. Définissons un foncteur k-linéaire surjectif $\Phi : kQ_\Lambda \to \Lambda$ : sur les objets $\Phi$ est l'identité, et $\Phi$ envoie les flèches de $a$ vers $b$ sur des représentants dans $\mathfrak{R}\Lambda(a,b)$ d'une base de $\mathfrak{R}\Lambda(a,b)/\mathfrak{R}^2\Lambda(a,b)$. L'idéal $I = \ker \Phi$ est admissible, et $\Phi$ induit un isomorphisme $kQ_\Lambda/I \xrightarrow{\sim} \Lambda$. Notons qu'une catégorie localement bornée $\Lambda$ détermine le carquois $Q_\Lambda$, tandis que l'idéal $I$ dépend de la *présentation* $\Phi : kQ_\Lambda \to \Lambda$.

Une catégorie localement bornée $\Lambda = kQ/I$ est *connexe* si $Q$ est connexe, et elle est *sans grands détours* (interval-finite dans la terminologie de [BGRS]) si pour tout couple d'objets $a,b \in \Lambda$ le nombre des chemins dans $Q$ de $a$ vers $b$ est fini. Cette dernière propriété implique que $Q$ ne contient pas de cycles orientés. Une sous-catégorie pleine $\Lambda' \subseteq \Lambda$ est appelée *convexe* si tout objet de $\Lambda$ situé sur un chemin de $Q$ reliant deux objets de $\Lambda'$ est encore dans $\Lambda'$. Dans ce cas le carquois de $\Lambda'$ est un sous-carquois de $Q$. Si $a_1, a_2, \ldots$ sont des objets de $\Lambda$, nous notons $\Lambda\{a_1, a_2, \ldots\}$ la sous-catégorie pleine de $\Lambda$ dont $a_1, a_2, \ldots$ sont les objets.

Soit $\Lambda = kQ/I$ localement bornée. Un *$\Lambda$-module* (à droite) est un foncteur $k$-linéaire contravariant $X : \Lambda \to \text{mod}\, k$ (la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $k$). Les morphismes de $\Lambda$-modules sont les transformations naturelles. Un $\Lambda$-module $X$ est donc la donnée d'un espace vectoriel $X(a)$ de dimension finie pour tout sommet $a$ et d'une application linéaire $X(\alpha) : X(b) \to X(a)$ pour toute flèche $\alpha : a \to b$ telle que $X(\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in I$ ; un morphisme $f : X \to Y$ est une famille d'applications linéaires $f(a) : X(a) \to Y(a)$, $a \in \Lambda$, telle que $f(a) \circ X(\alpha) = Y(\alpha) \circ f(b)$ pour toute flèche $\alpha : a \to b$. Le *support* $\text{supp}\, X$ d'un $\Lambda$-module $X$ est l'ensemble des sommets $a$ de $Q$ tels que $X(a) \neq 0$, le *vecteur de dimension* $\underline{\dim}\, X$ est la famille $(\dim X(a))_{a \in \Lambda}$, et la *dimension* $\dim X$ est la somme $\sum_{a \in \Lambda} \dim X(a)$. Si $\Lambda$ est finie, la *dimension* de $\Lambda$ est la somme $\sum_a \dim \Lambda(\ , a)$. Nous notons $\text{mod}\, \Lambda$ *la catégorie des $\Lambda$-modules de dimension finie,* et nous disons que $\Lambda$ est *localement de type de représentation fini* (ltrf) si pour tout $a \in \Lambda$ il n'existe qu'un nombre fini de modules indécomposables $X \in \text{mod}\, \Lambda$ tels que $X(a) \neq 0$.

A une catégorie *finie* localement bornée $\Lambda$ et une suite exhaustive $a_1, \ldots, a_n$ d'objets (éventuellement avec répétitions) on associe l'algèbre $\Lambda(a_1, \ldots, a_n)$ des matrices $[\alpha_{ij}]$ où $\alpha_{ij} \in \Lambda(a_j, a_i)$. Les catégories des modules sur la catégorie $\Lambda$ et sur l'algèbre $\Lambda(a_1, \ldots, a_n)$ sont équivalentes. Toute algèbre $A$ (associative, unitaire, de dimension finie) s'obtient de cette façon : il suffit de décomposer $A_A = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i^{\mu_i}$ en somme directe de multiples de projectifs indécomposables deux à deux non-isomorphes, de noter que $A$ est isomorphe à $\text{End}_A(\bigoplus_i P_i^{\mu_i})$ et de prendre pour $\Lambda$ la sous-catégorie pleine de $\text{mod}\, A$ dont les objets sont $P_1, \ldots, P_r$. Une base multiplicative filtrée pour $\Lambda$ (définition évidente) fournira donc une telle base pour $A$.

## 3. PREMIÈRE DÉFINITION DE LA FORME STANDARD ([BoG], [G4], [BrG])

Soit $\Lambda$ une catégorie localement bornée et connexe. Le *carquois d'Auslander-*

*Reiten* de $\Lambda$ est un carquois $\Gamma_\Lambda$ dont les sommets sont des représentants des $\Lambda$-modules indécomposables de dimension finie et qui contient une flèche $X \to Y$ s'il existe un morphisme irréductible $f : X \to Y$, i.e. un non-isomorphisme tel que pour toute factorisation $f = h \circ g$ dans $\operatorname{mod} \Lambda$ ou bien $g$ soit une section ou bien $h$ soit une rétraction. Par miracle $\Gamma_\Lambda$ est localement fini, et il a d'autres propriétés surprenantes [AR, voir aussi G3] : soient $\alpha_i : B_i \to C$, $i = 1,\dots,r$ les flèches de $\Gamma_\Lambda$ d'un but $C$ non-projectif et soit $g_i : B_i^{n_i} \to C$ irréductible avec $n_i$ maximal. Alors $g = [g_i] : B = \oplus B_i^{n_i} \to C$ est un épimorphisme, et on a une suite exacte non-scindée

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \tau C \xrightarrow{[f_i]} \oplus B_i^{n_i} \xrightarrow{[g_i]} C \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\tau C = \ker g$ est indécomposable, déterminé uniquement par $C$, les composantes $f_i : \tau C \to B_i^{n_i}$ de l'inclusion $\ker g \to B$ sont irréductibles et représentent précisément les flèches de $\Gamma_\Lambda$ de source $\tau C$. La suite (*) est presque-scindée, i.e. tout non-isomorphisme $h : X \to C$ avec $X$ indécomposable se factorise par $g$. Pour toute flèche $\alpha_i : B_i \to C$, $\Gamma_\Lambda$ contient donc une flèche $\sigma\alpha_i : \tau C \to B_i$, et on trouve ainsi toutes les flèches de source $\tau C$. On appelle maille de $\Gamma_\Lambda$ de but $C$ le sous-carquois

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
\tau C \arrow[ur, "\sigma\alpha_1"] \arrow[r, "\sigma\alpha_2"'] \arrow[ddr, "\sigma\alpha_r"'] & B_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C \\
 & \vdots & \\
 & B_r \arrow[uur, "\alpha_r"'] &
\end{tikzcd}$$

de $\Gamma_\Lambda$.

Supposons maintenant que $\Lambda$ soit ltrf. Alors la sous-catégorie pleine $\operatorname{ind} \Lambda$ de $\operatorname{mod} \Lambda$ dont les objets sont les sommets de $\Gamma_\Lambda$ est localement bornée et connexe, et il s'avère que $\Gamma_\Lambda$ est le carquois de $\operatorname{ind} \Lambda$. En effet, deux morphismes irréductibles $f, g : X \to Y$ sont toujours linéairement dépendants modulo les morphismes "réductibles" $\mathfrak{R}^2(\operatorname{ind} \Lambda)(X,Y)$ [Ba 1]. Pour décrire $\operatorname{ind} \Lambda$ il suffit donc de donner une présentation $k\Gamma_\Lambda \to \operatorname{ind} \Lambda$.

La *catégorie des mailles* $k(\Gamma_\Lambda)$ est le quotient de $k\Gamma_\Lambda$ modulo l'idéal des mailles, qui est engendré par les relations $R_C = \sum \alpha \circ \sigma\alpha$, pour $C$ non-projectif, où $\alpha$ parcourt les flèches de $\Gamma_\Lambda$ de but $C$. La suite (*) montre que l'on peut choisir des représentants $f_i = \Phi(\sigma\alpha_i)$ et $g_i = \Phi(\alpha_i)$ pour les flèches d'une maille tels que $\Phi(\sum \alpha_i \circ \sigma\alpha_i) = 0$ . S'il existe un représentant $\Phi(\alpha)$ pour toute flèche $\alpha$ de $\Gamma_\Lambda$ tel que $\Phi$ s'annule sur toutes les relations de maille simultanément, ind $\Lambda$ est isomorphe à $k(\Gamma_\Lambda)$ . (Notons que la plupart des flèches appartiennent à deux mailles à la fois). Si car $k = 2$ , un tel choix n'est pas toujours possible, comme le montre l'exemple ci-dessous. Mais, dans tous les cas, il existe une catégorie ltrf $\bar{\Lambda}$ , la *forme standard* de $\Lambda$ telle que ind $\bar{\Lambda}$ soit isomorphe à $k(\Gamma_\Lambda)$ [BoG] . Le carquois de $\bar{\Lambda}$ est $Q_\Lambda$ , et $\bar{\Lambda}$ peut se décrire par l'idéal standard $I_{st} \subseteq kQ_\Lambda$ : $I_{st}(a,b)$ est engendré par les différences $v-w$ où $(v,w)$ est un contour et les chemins non-stables de $a$ vers $b$ [BrG], (voir § 5 pour les définitions) . Le carquois d'Auslander-Reiten de $\bar{\Lambda}$ est $\Gamma_\Lambda$ , et $\bar{\Lambda}$ est une dégénérescence de $\Lambda$ si $\Lambda$ est finie [BoG] .

Exemple : soit $\Lambda$ la catégorie localement bornée définie par

$$Q = \bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \bullet \circlearrowright \rho$$

et l'idéal $I$ engendré par $\rho^2 - \alpha\beta$ , $\beta\alpha - \beta\rho\alpha$ et $\rho^4$ . L'idéal $I_{st}$ est engendré par $\rho^2 - \alpha\beta$ et $\beta\alpha$ . Si car $k \neq 2$ , le foncteur $F : \Lambda = kQ/I \to \bar{\Lambda} = kQ/I_{st}$ induit par $F\alpha = \alpha$ , $F\beta = \beta + \beta\rho$ et $F\rho = \rho + \frac{1}{2}\rho^2$ est un isomorphisme, mais on voit facilement que $\Lambda$ et $\bar{\Lambda}$ ne sont pas isomorphes en caractéristique 2 , et les deux sont de trf [Ri 1] .

## 4. CATÉGORIES DISTRIBUTIVES ET CATÉGORIES DE RAYONS [BGRS]

DÉFINITION. Une catégorie localement bornée $\Lambda$ est *distributive* si le treillis des idéaux bilatères de $\Lambda$ est distributif, i.e. $(I_1+I_2) \cap I_3 = (I_1 \cap I_3) + (I_2 \cap I_3)$ , $\forall I_1, I_2, I_3$ . Cette condition est équivalente à dire que $\Lambda(a,b)$ est un $\Lambda(b,b)$ - $\Lambda(a,a)$-bimodule unisériel $\forall a,b \in \Lambda$ , ou encore que $\Lambda(a,a)$ est isomorphe à une algèbre $k[T]/(T^{n_a})$, $\forall a$ , et que $\Lambda(a,b)$ est monogène d'un côté au moins, i.e. en tant que module sur $\Lambda(a,a)$ ou sur $\Lambda(b,b)$ , $\forall a,b$ .

*Une catégorie $\Lambda$ ltrf est distributive*. En effet, toute sous-catégorie pleine de $\Lambda$ est ltrf (prendre comme extension des modules le foncteur adjoint à gauche à la restriction), ce qui implique que $\Lambda(a,a)$ est de trf $\forall a$ . Si $\Lambda(a,b)$ n'est monogène d'aucun côté, la sous-catégorie pleine $\Lambda\{a,b\}$ de $\Lambda$ possède un quotient $kQ/I$ donné par

$Q = a \rightrightarrows b$ , $I = 0$ ou par $Q = \alpha \circlearrowright a \xrightarrow{\gamma} b \circlearrowleft \beta$ , $I = \langle \alpha^2, \beta\gamma\alpha, \beta^2 \rangle$ , et ces catégories sont de type de représentation infini.

Soit $\Lambda$ une catégorie distributive et $a,b \in \Lambda$ . La *profondeur* $\underline{d}(\mu)$ d'un morphisme $\mu \in \Lambda(a,b)$ est le plus grand entier $n$ tel que $\mu \in \mathfrak{R}^n\Lambda(a,b)\backslash\mathfrak{R}^{n+1}\Lambda(a,b)$ , $\underline{d}(0) = +\infty$ , et le *rayon* $\vec{\mu}$ de $\mu$ est l'ensemble $\{\nu \in \Lambda(a,b) : \underline{d}(\nu) = \underline{d}(\mu)\}$ . Tout $\nu \in \vec{\mu}$ est de la forme $\mu\alpha$ ou $\beta\mu$ pour des automorphismes $\alpha$ et $\beta$ .

La *catégorie de rayons* $\vec{\Lambda}$ associée à $\Lambda$ possède les mêmes objets que $\Lambda$ , l'ensemble $\vec{\Lambda}(a,b)$ est formé des rayons des morphismes dans $\Lambda(a,b)$ , et la composition de deux rayons $\vec{\mu} \in \vec{\Lambda}(a,b)$ et $\vec{\nu} \in \vec{\Lambda}(b,c)$ est définie par

$$\vec{\nu}\,\vec{\mu} = \begin{cases} \overrightarrow{\nu\mu} & \text{si } \underline{d}(\nu'\mu') = \underline{d}(\nu\mu) \ , \ \forall \mu' \in \vec{\mu} \ , \ \nu' \in \vec{\nu} \ , \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

De la distributivité de $\Lambda$ on déduit que cette composition est associative.

Une *catégorie de rayons* est une catégorie $P$ caractérisée par les propriétés suivantes :

(i) $\forall a,b$ , $P(a,b)$ contient un morphisme zéro.

(ii) Deux objets distincts ne sont pas isomorphes.

(iii) Pour tout $a \in P$ il n'existe qu'un nombre fini de morphismes non nuls d'extrémité $a$ .

(iv) $\forall a \in P$ , $P(a,a) = \{\mathbb{1}_a, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n_a-1}, \alpha^{n_a} = 0\}$ .

(v) $\forall a,b \in P$ , $P(a,b) = \begin{cases} \{\gamma, \gamma\alpha, \dots, \gamma\alpha^{r-1}, \gamma\alpha^r = 0\} & \text{pour un } r \leq n_a \text{ ou} \\ \{\gamma, \beta\gamma, \dots, \beta^{s-1}\gamma, \beta^s\gamma = 0\} & \text{pour un } s \leq n_b \end{cases}$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des générateurs de $P(a,a)$ et $P(b,b)$ .

(vi) $\beta\gamma\alpha = \beta\delta\alpha$ implique $\gamma = \delta$ .

Par une construction analogue à celle du § 2, une catégorie de rayons $P$ peut se décrire par un carquois $Q_P$ et des relations : il faut travailler avec la catégorie "non-linéarisée" des chemins du carquois. En particulier, les carquois de $\Lambda$ et $\vec{\Lambda}$ sont les mêmes.

La k-*linéarisation* $k(P)$ d'une catégorie de rayons $P$ possède les mêmes objets que $P$ , $k(P)(a,b)$ est l'espace vectoriel engendré par $P(a,b)$ modulo le sous-espace engendré par $0 \in P(a,b)$, et la composition est induite par celle de $P$ . La catégorie $k(P)$ est distributive et possède $P$ comme catégorie de rayons.

Inversement, si $\Lambda$ est distributive, la catégorie $\bar{\Lambda} = k(\vec{\Lambda})$ s'appelle *forme standard* de $\Lambda$. *Les rayons non-nuls forment une base multiplicative filtrée de* $\bar{\Lambda}$. Le foncteur $\Phi : kQ_\Lambda \to \bar{\Lambda}$ qui envoie un chemin $v = \alpha_n \ldots \alpha_1$ sur le rayon $\vec{v} = \vec{\alpha}_n \ldots \vec{\alpha}_1$ est visiblement une présentation de $\bar{\Lambda}$, et le noyau $\ker \Phi$ est l'idéal standard [§ 3]. Si $\Lambda$ est ltrf, les deux définitions de la forme standard coïncident donc, et par conséquent $\bar{\Lambda}$ est ltrf. Ce fait est utilisé dans la démonstration du critère de Bongartz dans [BGRS]. Dans cet exposé, nous le démontrons sans nous appuyer sur la première définition de la forme standard, en suivant une idée de Bongartz [§6].

5. L'ISOMORPHISME ENTRE $\Lambda$ ET $\bar{\Lambda}$ POUR car $k \neq 2$ [BGRS]

Soit $\Lambda$ une catégorie distributive. Un chemin $v : a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} a_n$ dans $Q_\Lambda$ est appelé *stable* si le rayon $\vec{v} = \vec{\alpha}_n \ldots \vec{\alpha}_1$ n'est pas nul. Au cas où $\vec{v} = 0$, $v$ est *singulier* s'il existe un rayon $\rho$ tel que $\vec{\alpha}_n \ldots \vec{\alpha}_{i+1} \rho \vec{\alpha}_i \ldots \vec{\alpha}_1 \neq 0$, et $v$ est un *chemin nul* autrement. Notons qu'un chemin nul est annulé par toute présentation de $\Lambda$, un chemin stable par aucune et que les deux se produisent pour un chemin singulier.

Le chemin $v$ est *profond* si $\vec{v}\alpha = 0 = \beta\vec{v}$ pour tout non-isomorphisme $\alpha \in \vec{\Lambda}(a_0, a_0)$ et $\beta \in \vec{\Lambda}(a_n, a_n)$. Deux chemins $v, w : a_0 \to a_n$ sont *entrelacés* si $(v, w)$ appartient à la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes : $v \sim w$ si $v = u v_1 u'$ et $w = u w_1 u'$ pour deux chemins $u$, $u'$ dont un au moins est de longueur $\geq 1$ et deux chemins $v_1$, $w_1$ tels que $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 \neq 0$.

Un *contour* $(v, w)$ de $\Lambda$ (ou $\vec{\Lambda}$) est un couple de chemins stables $v, w : a_0 \to a_n$ tels que $\vec{v} = \vec{w}$. Le contour est *essentiel* si $v$ et $w$ ne sont pas entrelacés.

Finalement, une catégorie distributive $\Lambda$ est *amène* si $\Lambda/I$ est ltrf, pour tout idéal $I \neq 0$. Nous verrons au paragraphe suivant que $\Lambda$ est amène si et seulement si la forme standard $\bar{\Lambda}$ l'est.

THÉORÈME 1. *Soit* $\Lambda$ *une catégorie distributive à forme standard* $\bar{\Lambda}$ *amène.*

*a) Un chemin singulier de* $Q_\Lambda$ *contient un chemin singulier de longueur 2.*

*b) Deux chemins singuliers de longueur 2 coïncident dès qu'ils ont une flèche en commun.*

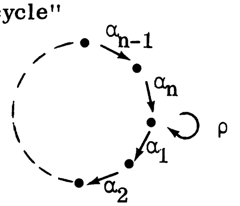
*c) Soit* $(v,w)$ *un contour essentiel et non-profond. Alors la sous-catégorie pleine de* $\bar{\Lambda}$ *définie par les sommets où passe* $v$ *ou* $w$ *est une des suivantes. (Le contour* $(v,w)$ *est donné par la relation sous-lignée).*

i) "l'haltère" $Q = \sigma \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{\nu} \bullet \circlearrowright \tau$ , $I = \langle \underline{\nu\sigma - \tau\nu}, \sigma^s, \tau^r \rangle$ avec $r,s \le 5$ et $\min(r,s) = 3$

ii) "le carreau"

$$Q = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, shift left, "\kappa"] \arrow[dr, shift left, "\beta"] & \\ \bullet \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \bullet \arrow[ul, shift left, "\lambda"] \\ & \bullet \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd} \quad , \quad I = \langle \underline{\beta\alpha - \delta\gamma}, \alpha\kappa - \lambda\beta, \kappa\lambda \rangle .$$

iii) "le bicycle"

Q =  ,

$I = \langle \underline{\alpha_n \cdots \alpha_1 - \rho^2}, \alpha_1\alpha_n, \alpha_{fi}\cdots\alpha_1\rho\alpha_n\cdots\alpha_{i+1}, 1 \le i \le n-1 \rangle$

où $f : \{1,\dots,n-1\} \to \{1,\dots,n\}$ est une fonction croissante (au sens large).

*d) Deux contours essentiels non-profonds coïncident dès qu'ils ont une flèche en commun.*

Bien qu'on ne soit parti que d'une catégorie amène, les sous-catégories i), ii) et iii) sont de trf. La démonstration de ce théorème surprenant, qui est essentiel dans la démonstration de l'existence de bases multiplicatives, consiste à trouver une stratégie (finie !) qui élimine toutes les pathologies autres que a) et c). A chaque étape on doit donc montrer qu'un quotient propre de $\bar{\Lambda}$ n'est pas ltrf.

DÉFINITION. Une *chaîne* (finie ou non) d'une catégorie de rayons $P$ est une suite de morphismes

$$\begin{tikzcd} & a_1 & & a_3 & & \\ a_0 \arrow[ur, "\rho_0"] & & a_2 \arrow[ul, "\rho_1"'] \arrow[ur, "\rho_2"] & & a_4 \arrow[ul, "\rho_3"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

telle qu'aucun des couples $(\rho_i, \rho_{i+1})$ puisse être complété en un triangle commutatif $(\rho_i, \rho_{i+1}, \sigma)$ par un morphisme $\sigma : a_i \to a_{i+2}$ ou $\sigma : a_{i+2} \to a_i$ dans $P$. Une chaîne finie qui s'arrête par $\rho_{2n} = \rho_0$ pour $n \ge 2$ donne lieu à une chaîne infinie de $P$.

*La catégorie de rayons associée à une catégorie ltrf* $\Lambda$ *est sans chaîne infinie* [BGRS].

THÉORÈME 2. *Soit* $\Lambda$ *une catégorie distributive telle que* $\bar{\Lambda}$ *soit amène et* $\vec{\Lambda}$ *sans chaîne infinie. Alors* $\Lambda$ *est isomorphe à la forme standard* $\bar{\Lambda}$ *pourvu que* $\operatorname{car} k \neq 2$ .

*Démonstration.* Les parties a) et b) du théorème 1 permettent de trouver une présentation $\psi : k\,Q_\Lambda \to \Lambda$ qui annule tous les chemins singuliers de $Q_\Lambda$ . Posons $\Phi(\tau) = \epsilon\,\psi(\tau)$ pour la flèche $\tau$ d'une haltère, où $\psi(\nu\sigma) = \epsilon\psi(\tau\nu)$ pour un automorphisme $\epsilon$ , et $\Phi(\beta) = \eta\,\psi(\beta)$ pour la flèche $\beta$ d'un carreau, où $\psi(\delta\gamma) = \eta\,\psi(\beta\alpha)$ pour un automorphisme $\eta$ . Pour un bicycle $(\rho^2, \alpha_n \dots \alpha_1)$ on a $\psi(\alpha_n \dots \alpha_1) = \psi(\rho^2)(A + B\,\psi(\rho))$ avec $A, B \in k$ , $A \neq 0$ , car $\psi(\rho^4) = 0$ . Puisque $\operatorname{car} k \neq 2$ , le morphisme $A + B\,\psi(\rho)$ est un carré $\mu^2$ , et on pose $\Phi(\rho) = \mu\,\psi(\rho)$ . Sur toutes les autres flèches $\Phi$ coïncide avec $\psi$ .

Il est facile de voir qu'aucune des flèches $\tau$ , $\beta$ , $\rho$ ne fait partie d'un chemin singulier, et $\Phi$ annule donc toujours tous les chemins singuliers. Pour tout contour $(v, w)$ on a $\Phi(v) = c_\Phi(v, w)\,\Phi(w)$ avec $c_\Phi(v, w) \in k^*$ : par construction ceci est vrai pour les contours essentiels non-profonds et donc aussi pour les contours non-essentiels. Si $(v, w) : a \to b$ est profond, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ se trouvent dans le socle du bimodule $\Lambda(a,b)$ , qui est isomorphe à $k$ .

Au paragraphe 7 on associera un ensemble simplicial à $\vec{\Lambda}$ , et on verra que $H^2(\vec{\Lambda}, k^*) = 0$ . Représentons chaque rayon $\mu \neq 0$ par un chemin $v_\mu$ dans $Q_\Lambda$ tel que $\mu = \vec{v}_\mu$ . Ceci permet d'associer un 2-cocycle $\gamma$ à valeurs dans $k^*$ à la présentation $\Phi$ : pour un 2-simplexe $(\mu, \nu)$ on pose

$$\Phi(v_\nu)\,\Phi(v_\mu) = \gamma(\mu, \nu)\,\Phi(v_{\nu\mu}) .$$

Soit $\lambda$ une 1-cochaîne de cobord $\gamma$ . La présentation $\Phi' : kQ_\Lambda \to \Lambda$ donnée par $\Phi'(\alpha) = \lambda(\vec{\alpha})^{-1}\,\Phi(\alpha)$ pour toute flèche $\alpha$ de $Q_\Lambda$ possède alors les mêmes propriétés que $\Phi$ , et en plus $c_{\Phi'}(v, w) = 1$ pour tout contour $(v, w)$ .

## 6. FORMES EN CARACTÉRISTIQUE 2

Soit $B$ une catégorie provenant d'un bicycle, définie par le carquois $Q$ et les relations $I$ du paragraphe 5. Notons $I_*$ l'idéal de $kQ$ engendré par $\alpha_n \dots \alpha_1 - \rho^2$ , $\alpha_1\alpha_n - \alpha_1\,\rho\alpha_n$ , $\rho^4$ et $\alpha_{fi} \dots \alpha_1\,\rho\,\alpha_n \dots \alpha_{i+1}$ , $i = 1, \dots, n-1$ , où $f : \{1, \dots, n-1\} \to \{1, \dots, n\}$ est la fonction croissante associée à $B$ . Si $\operatorname{car} k = 2$ et si $f(n-1) \neq 1$ (i.e. $\alpha_1\,\rho\,\alpha_n \notin I$) , les catégories $B$ et $B_* = kQ/I_*$ ne sont pas isomorphes, et B est la forme standard de $B*$ . Si $f(n-1) \neq 1$ , on dit que B possède une forme non-standard.

Partons d'une catégorie distributive $\Lambda$ à forme standard amène, et notons $\mathcal{C}_\Lambda$ l'ensemble de ses bicycles possédant une forme non-standard. A tout sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}_\Lambda$ , on associe un idéal $I_\mathcal{S}$ de $kQ_\Lambda$ : si a et b appartiennent au même bicycle B dans $\mathcal{S}$ , on pose $I_\mathcal{S}(a,b) = I_*(a,b)$ , et autrement on prend $I_\mathcal{S}(a,b) = I_{st}(a,b)$ , i.e. l'espace engendré par les chemins non-stables et les différences $v - w$ , où $(v,w)$ est un contour. La k-catégorie $\bar{\Lambda}_\mathcal{S}$ est le quotient $kQ_\Lambda/I_\mathcal{S}$ .

*La catégorie* $\bar{\Lambda}_\mathcal{S}$ *possède une base multiplicative filtrée,* car elle est isomorphe à la linéarisation $k(\vec{\Lambda}_\mathcal{S})$ : les objets et les morphismes de $\vec{\Lambda}_\mathcal{S}$ sont ceux de $\vec{\Lambda}$ ; mais le produit de deux rayons $\overrightarrow{\alpha_n v}$ et $\overrightarrow{w\alpha_1}$ provenant d'un bicycle $B \in \mathcal{S}$ est $\overrightarrow{w\alpha_1 \rho \alpha_n v}$ . Tous les autres rayons se composent comme dans $\vec{\Lambda}$ .

THÉORÈME 1 [BGRS]. *Soit* $\Lambda$ *une catégorie distributive dont la forme standard est amène et la catégorie de rayons sans chaîne infinie. Alors* $\Lambda$ *est isomorphe à une catégorie* $\bar{\Lambda}_\mathcal{S}$ . *Si* car $k = 2$ , $\bar{\Lambda}_\mathcal{S}$ *et* $\bar{\Lambda}_{\mathcal{S}'}$ *ne sont isomorphes que s'il existe un automorphisme de* $\vec{\Lambda}$ *qui envoie* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{S}'$ .

La démonstration est une adaptation de celle du théorème précédent.

THÉORÈME 2 [Bo4]. *Soit* $\Lambda$ *une catégorie distributive qui satisfait aux hypothèses du théorème 1, sur un corps de caractéristique 2 . Si* $\bar{\Lambda}$ *n'est pas ltrf ,* $\Lambda$ *et* $\bar{\Lambda}$ *sont isomorphes. Si* $\bar{\Lambda}$ *est ltrf ,* $\Lambda$ *l'est aussi, et les carquois d'Auslander-Reiten de* $\Lambda$ *et* $\bar{\Lambda}$ *coïncident.*

Si $\mathcal{C}_\Lambda \neq \phi$ , Bongartz construit des idéaux non-triviaux $I \subseteq \Lambda$ , $\bar{I} \subseteq \bar{\Lambda}$ tels que les quotients $\Lambda/I$ et $\bar{\Lambda}/\bar{I}$ soient isomorphes et $\mathcal{C}_{\Lambda/I} = \phi$ et tels que $\Lambda$ et $\bar{\Lambda}$ soient ltrf dès que $\Lambda/I$ l'est. Si $\bar{\Lambda}$ n'est pas ltrf , on a donc $\mathcal{C}_\Lambda = \phi$ , et $\Lambda$ est isomorphe à $\bar{\Lambda}$ d'après le théorème 1 . La seconde assertion découle du fait que $\Gamma_\Lambda$ et $\Gamma_{\bar{\Lambda}}$ se construisent de la même façon à partir du carquois d'Auslander-Reiten de $\Lambda/I$ .

COROLLAIRE. *Pour qu'une catégorie distributive* $\Lambda$ *soit ltrf (amène) il faut et il suffit que* $\bar{\Lambda}$ *soit ltrf (amène).*

*Démonstration.* Les treillis des idéaux de $\Lambda$ et $\bar{\Lambda}$ étant isomorphes, il suffit de montrer l'énoncé pour ltrf. Si $\Lambda$ ou $\bar{\Lambda}$ est ltrf , $\vec{\Lambda}$ est sans chaîne infinie, et on sait que $\Lambda$ et $\bar{\Lambda}$ ont même type de représentation dès que $\bar{\Lambda}$ est amène (th. 2 et §5, th. 2). Supposons que $\Lambda$ soit ltrf. Si $\Lambda$ est une catégorie finie, on voit par récurrence sur la dimension de $\Lambda$ sur $k$ que $\bar{\Lambda}$ est amène, car tout quotient propre de $\bar{\Lambda}$ est la forme standard d'un quotient propre de $\Lambda$. Par conséquent, $\bar{\Lambda}$ est ltrf comme $\Lambda$. On en déduit que dans le cas général $\bar{\Lambda}$ est une catégorie dont toute sous-catégorie pleine finie est ltrf, et ceci entraîne que $\bar{\Lambda}$ est ltrf ([Bo 3], [BGRS]).

Il découle du corollaire et des résultats des paragraphes 5 et 6 que *toute catégorie ltrf possède une base multiplicative filtrée.*

## 7. LA TOPOLOGIE D'UNE CATÉGORIE DE RAYONS

Associons un *ensemble simplicial* S.P à une catégorie de rayons connexe P : un 0-simplexe est un objet de P, et un n-simplexe, $n \geq 1$, est une suite $\sigma = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ de morphismes $a_0 \xrightarrow{\rho_1} a_1 \xrightarrow{\rho_2} \dots \xrightarrow{\rho_n} a_n$ dans P telle que $\rho_n \cdots \rho_1 \neq 0$. La i-ième face d'un n-simplexe $(\rho_n, \dots, \rho_1)$ est donnée par

$$\begin{cases} (\rho_2, \dots, \rho_n), & i = 0, \\ (\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}\rho_i, \dots, \rho_n), & i = 1, \dots, n-1, \\ (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}), & i = n, \end{cases}$$

pour $n \geq 2$ et par le but ou la source de $\rho$ si $n = 1$. Les opérateurs de dégénérescence s'obtiennent en insérant des morphismes identiques [BGRS].

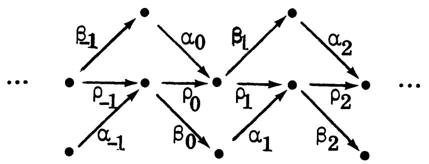
Le *groupe fondamental* $\Pi(P, a)$, $a \in P$, de P est le groupe fondamental (de la réalisation géométrique) de S.P, et les *groupes d'homologie* et *de cohomologie de* P sont ceux de S.P. Le *revêtement universel* $\tilde{P}$ de P est "la" catégorie de rayons telle que $S.\tilde{P}$ soit isomorphe au revêtement universel de S.P.

Le groupe $\Pi(P, a)$ est donc le quotient du groupe fondamental $\Pi(Q_P, a)$ du carquois $Q_P$ (en tant qu'ensemble simplicial de dimension 1) par le sous-groupe normal engendré par les éléments $u^{-1}w^{-1}vu$, où $(v, w) : b \to c$ est un contour et

$$u : a \to \dots \to c_1 \leftarrow \dots \leftarrow c_2 \to \dots \to c_3 \leftarrow \dots \to b$$

un chemin non-orienté de a vers b. Le carquois $Q_{\tilde{P}}$ du revêtement universel $\tilde{P}$ est le revêtement connexe $\pi : Q_{\tilde{P}} \to Q_P$ dont la fibre au-dessus de a est égale à $\Pi(P, a)$, et $\tilde{P}$ est décrite par $Q_{\tilde{P}}$ et les images réciproques par $\pi$ des relations de P .

Pour l'exemple du paragraphe 3, le revêtement universel est donné par le carquois



et les relations $\rho_{i+1}\rho_i - \alpha_{i+1}\beta_i$ , $\beta_{i+1}\alpha_i$ , $i \in \mathbb{Z}$ .

THÉORÈME ([Fi 1], [BGRS]). *Soit* P *une catégorie de rayons connexe sans chaîne infinie. Alors le groupe fondamental* $\Pi(P, a)$ *est libre,* $H^2(P, Z) = 0$ *pour tout groupe abélien* Z *, et le carquois* $Q_{\tilde{P}}$ *du revêtement universel* $\tilde{P}$ *est sans grands détours.*

L'hypothèse que P est sans chaîne infinie est essentielle : à partir d'un cube posé sur un sommet on construit une catégorie de rayons P (connexe, contenant une chaîne infinie) en orientant toutes les arêtes du cube vers le haut et en imposant qu'aucun chemin de longueur 2 et tout chemin de longueur 3 correspond au morphisme nul. Visiblement $H^2(P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

*Démonstration* . Soit $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un ensemble non-vide de flèches $\alpha_i : a \to b_i$ de P , et soit P/A le quotient de P par l'idéal engendré par A . On dit que A est admissible s'il existe des chemins $u : a \to c$ et $u_i : b_i \to c$ avec les propriétés suivantes :

i) $(u_i\alpha_i, u)$ est un contour essentiel de P .

ii) Pour tout contour essentiel $(v_2\alpha_i v_1, w)$ de P on a $v_1 = \mathbb{1}_a$ .

iii) Si $(v, w)$ est un contour essentiel de P mais non pas de P/A , il existe un chemin v' tel que $\vec{v'v} = \vec{u}$ , et ou bien v'v est entrelacé avec u ou bien v commence par un des $\alpha_i$ .

D'un ensemble de flèches de P (de but commun) satisfaisant aux conditions duales on dit aussi qu'il est admissible. Si A est admissible, les groupes fondamentaux de P et de P/A sont isomorphes, et le quotient du revêtement universel $\pi : \tilde{P} \to P$ de P par l'idéal engendré par les $\pi^{-1}(\alpha_i)$ est le revêtement universel de P/A .

Le résultat de base de Fischbacher est que P contient un ensemble admissible de flèches dès que P contient des contours essentiels. Ceci lui permet de trouver une suite

$$\ldots\ P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0$$

de catégories de rayons telle que $P_{i-1}$ soit isomorphe à $P_i/A_i$ pour un ensemble admissible, que $P_0$ soit sans contours essentiels et que $P$ soit isomorphe à $\varprojlim P_i$ . Le théorème s'en déduit par récurrence sur $i$ .

## 8. LE CRITÈRE DE BONGARTZ [Bo 3]

Happel-Vossieck et Bongartz ont établi une liste de 141 types de catégories distributives ayant 9 objets au plus ([HV] , [Bo 3]) . Nous appelons *critiques* les catégories de cette liste, et en plus les catégories définies par l'un des carquois

$Q_1$ $Q_2$ $Q_3$

(où les arêtes pourront être orientées de façon arbitraire) avec comme seules relations la commutativité des diagrammes "orientés" aux extrémités de $Q_2$ et $Q_3$ . *Toute catégorie critique possède une infinité d'indécomposables pour un vecteur de dimension.*

THÉORÈME. *Soit* $\Lambda$ *une catégorie distributive telle que* $P = \vec{\Lambda}$ *soit sans chaîne infinie. Alors* $\Lambda$ *est* ltrf *si et seulement si* $k(\tilde{P})$ *ne contient aucune catégorie critique comme sous-catégorie convexe.*

*Démonstration.* Les conditions que $\Lambda$ , $\bar{\Lambda}$ ou $k(\tilde{P})$ soient ltrf sont équivalentes ((§ 6), [MP] , [G4]) , ce qui implique que les conditions du théorème sont nécessaires. Réciproquement, ces conditions garantissent que $k(\tilde{P})$ ne contient pas de sous-catégorie convexe finie de type de représentation infini [Bo 2, 3] . Mais dans ce cas on peut construire pour tout sommet $x$ un voisinage $\mathcal{U}_x$ (= sous-catégorie convexe finie) tel que $\mathcal{U}_x$ contienne le support de tout indécomposable $M$ avec $M(x) \neq 0$ [Bo 1] . Par conséquent, $k(\tilde{P})$ est ltrf .

*Remarques* . Si $\Lambda$ est finie de dimension $d$ , il suffit que $\tilde{P}$ ne contienne pas de chaînes $(\rho_0, \ldots, \rho_n)$ avec $n \geq 2d-1$ pour que $\vec{\Lambda}$ n'ait pas de chaîne infinie. L'existence des voisinages $\mathcal{U}_x$ permet en principe de construire le carquois d'Auslander-Reiten d'une catégorie finie de trf à l'aide d'un ordinateur, mais la capacité est très vite dépassée.

## 9. LE THÉORÈME DE NAZAROVA ET ROITER

THÉORÈME. *Une catégorie finie de type de représentation infini possède une infinité (de classes d'isomorphismes) d'indécomposables pour une infinité de vecteurs de dimension.*

*Démonstration* [Ba 2, BrT, Fi 2]. D'après [Sm] il suffit de construire une infinité d'indécomposables pour un vecteur de dimension. On se ramène au cas où la catégorie $\Lambda$ est distributive puis amène et où $P = \vec{\Lambda}$ est sans chaîne infinie. Alors $Q_{\tilde{P}}$ est sans grands détours [§7], et le critère de Bongartz permet de construire une infinité d'indécomposables sur $k(\tilde{P})$ de même vecteur de dimension. Ceci démontre le théorème pour $\bar{\Lambda}$ [G4], mais $\Lambda$ et $\bar{\Lambda}$ sont isomorphes [§5,6].

L'étude des indécomposables sur les catégories critiques permet d'affirmer qu'il existe une infinité d'indécomposables en une dimension $\leq 2(\dim \Lambda)^2 + 30$ ([Bo 3], [Fi 1]). Gabriel s'est servi du théorème de Nazarova et Roiter pour montrer que les algèbres de trf forment un ouvert dans la variété des structures d'algèbres associatives sur un espace vectoriel fixé de dimension finie [G 2].

BIBLIOGRAPHIE (voir aussi la bibliographie de [BGRS]).

[AR] M. AUSLANDER et I. REITEN, *Representation theory of Artin algebras III*, Comm. Algebra 3(3) (1975), 239-294.

[Ba 1] R. BAUTISTA, *Irreducible morphisms and the radical of a category*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México 22 (1982), 83-135.

[Ba 2] R. BAUTISTA, *On algebras of strongly unbounded representation type*, Comment. Math. Helvetici, à paraître.

[BGRS] R. BAUTISTA, P. GABRIEL, A. ROITER et L. SALMERÓN, *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. à paraître.

[Bo 1] K. BONGARTZ, *Treue einfach zusammenhängende Algebren I*, Comment. Math. Helvetici 57 (1982), 282-330.

[Bo 2] K. BONGARTZ, *Critical simply connected algebras*, Manuscripta Math. 46 (1984), 117-136.

[Bo 3] K. BONGARTZ, *A criterion for finite representation type*, Math. Ann. 269 (1984), 1-12.

[Bo 4] K. BONGARTZ, *Indecomposables are standard*, preprint 1984.

[BoG] K. BONGARTZ et P. GABRIEL, *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math. 65 (1982), 331-378.

[BrG] O. BRETSCHER et P. GABRIEL, *The standard form of a representation-finite algebra*, Bull. Soc. Math. France 111 (1983), 21-40.

[BrT] O. BRETSCHER et G. TODOROV, *On a theorem of Nazarova and Roiter*, Preprint.

[Fi 1] U. FISCHBACHER, *Zur Kombinatorik der Algebren mit endlich vielen Idealen,* Preprint 1985.

[Fi 2] U. FISCHBACHER, *Une nouvelle preuve d'un théorème de Nazarova et Roiter,* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série I, n°9 (1985), 259-262.

[G 1] P. GABRIEL, *Représentations indécomposables,* Séminaire Bourbaki 26e année (1973-74), n° 444.

[G 2] P. GABRIEL, *Finite representation type is open,* Proc. Ottawa 1974, Springer Lecture Notes 488, 132-155.

[G 3] P. GABRIEL, *Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras,* Proc. Ottawa 1979, Springer Lecture Notes 831, 1-71.

[G 4] P. GABRIEL, *The universal cover of a representation-finite algebra,* Proc. Puebla 1980, Springer Lecture Notes 903, 68-105.

[HV] D. HAPPEL et D. VOSSIECK, *Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component,* Manuscripta Math. 42 (1983), 221-243.

[Hi] D. HIGMAN, *Indecomposable representations at characteristic* $p$ , Duke Math. J. 21 (1954), 377-381.

[MP] R. MARTINEZ-VILLA et J. DE LA PEÑA, *Automorphisms of representation-finite algebras,* Invent. Math. 72 (1983), 359-362.

[NR] L. NAZAROVA et A. ROITER, *Categorical Matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture,* Preprint Kiev 1973. Traduction allemande dans Mitt. Math. Sem. Giessen 115 (1975), 1-153.

[Ri 1] Ch. RIEDTMANN, *Représentation-finite self-injective algebras of class* $D_n$ , Compositio Math. 49 (1983), 231-282.

[Ri 2] Ch. RIEDTMANN, *Many algebras with the same Auslander-Reiten quiver,* Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 43-47.

[Ro] A. ROITER, *Generalization of Bongartz' theorem,* Preprint Math. Inst. Ukrainian Acad. of Sciences, Kiev (1981), 1-32.

[Sm] S. SMALØ, *The inductive step of the 2nd Brauer-Thrall conjecture,* Can. J. Math., Vol XXXII, N°2 (1980), 342-349.

Christine RIEDTMANN
Université de GRENOBLE I
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 ST MARTIN D'HERES Cedex (France)