JOSEPH OESTERLÉ

Démonstration de la conjecture de Bieberbach

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 649, p. 319-334
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__319_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1985
37ème année, 1984-85, n° 649

DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE BIEBERBACH
[d'après L. de Branges]

par Joseph OESTERLÉ (1)

Pour toute fonction $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *, univalente (c'est-à-dire holomorphe et injective) sur le disque unité de* $\mathbb{C}$ *, et pour tout entier* $n \geq 1$ *, on a* $|a_n| \leq n|a_1|$.

Cette très célèbre conjecture de Bieberbach ([Bi], 1916) a été démontrée par de Branges en 1984. En fait, le résultat de de Branges est plus fort et entraîne, outre celle de Bieberbach, de nombreuses autres conjectures de la théorie des fonctions univalentes (*cf.* n° 3).

Introduction

L'ensemble des fonctions $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n$, univalentes sur le disque $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, telles que $a_0(f) = 0$ et $a_1(f) = 1$, est traditionnellement noté $\mathcal{S}$ (pour "schlicht", qui en allemand signifie univalente). Il est compact pour la topologie de la convergence compacte sur D (Koebe, 1907, [Ko]). En particulier, pour chaque entier $n \geq 0$, l'ensemble des $a_n(f)$ $(f \in \mathcal{S})$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Bieberbach ([Bi]) détermine en 1916 la borne supérieure des $|a_2(f)|$ $(f \in \mathcal{S})$: elle est égale à 2 et n'est atteinte que pour les fonctions dans $\mathcal{S}$ de la forme $K_\vartheta : z \longmapsto \frac{z}{(1-e^{i\vartheta}z)^2}$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$. L'origine de sa conjecture est une note de bas de page où il suggère que $n = |a_n(K_\vartheta)|$ est peut-être la borne supérieure des $|a_n(f)|$ $(f \in \mathcal{S})$ pour chaque entier $n \geq 0$.

Malgré environ un millier d'articles parus sur le sujet, seuls des résultats très partiels avaient été obtenus avant la percée décisive de de Branges (en particulier la conjecture n'était connue en toute généralité que pour les coefficients d'indice $n \leq 6$). Le lecteur intéressé par les résultats concernant les fonctions univalentes auxquels ces travaux ont conduit pourra se reporter aux bibliographies de [Be] et [Du] .

---

(1) Les n^{os} 6 et suivants du texte ont été remaniés après l'exposé oral, pour y insérer une démonstration élémentaire du résultat d'Askey et Gasper utilisé par de Branges.

1. Histoire de la démonstration (*cf.* [dB 1], [dB 2])

En janvier 1984, de Branges ramena la démonstration de la conjecture de Bieberbach pour le n-ième coefficient à vérifier que certains polynômes, entièrement explicites, sont positifs sur $[0,1]$. Gautschi fit cette vérification pour $n \leq 25$ par ordinateur et se rendit compte un peu plus tard qu'en fait Askey et Gasper avaient démontré la positivité des polynômes en question dans un article paru en 1976, ce qui achevait la démonstration.

Celle-ci, assez longue, s'appuyait fortement sur les techniques introduites par de Branges dans son livre "Square summable power series" et demandait à être éclaircie. Un séminaire organisé au printemps 1984 à l'Institut Steklov de Léningrad, auquel de Branges fut convié à exposer ses résultats, permit grâce notamment aux participations d'Emel'anov, de Kuz'mina et de Milin, de confirmer et d'abréger la preuve. Un manuscrit rendant compte de ces travaux fut diffusé, puis publié par l'Institut Steklov sous la signature de de Branges. Son étude permit en août 1984 à Fitzgerald et Pommerenke ([F;P]) d'obtenir de nouvelles simplifications et de traiter les cas d'égalité laissés en suspens (résultats obtenus indépendamment par Emel'anov) : c'est leur présentation que nous adoptons ici.

2. Rappels sur les résultats de Bieberbach

THÉORÈME 1 (Bieberbach, [Bi]).- *Soit* $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction univalente sur* D. *On a* $|a_2| \leq 2|a_1|$.

On se ramène par translation au cas où $a_0 = 0$. La fonction $f(z^2)$ possède alors pour seul zéro un zéro double à l'origine. Elle admet donc une racine carrée holomorphe h sur D ; celle-ci est impaire, univalente, et s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ avec $c_1^2 = a_1$ et $2c_1c_3 = a_2$. On conclut grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 2.- *Soit* $h : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ *une fonction univalente impaire sur* D. *On a* $|c_3| \leq |c_1|$.

Il suffit d'appliquer le théorème qui suit à la fonction $g : z \longmapsto c_1 h(z^{-1})^{-1}$, dont le développement de Laurent au voisinage de l'infini s'écrit $z - \frac{c_3}{c_1} z^{-1} + \ldots$.

THÉORÈME 3 (dit "de l'aire").- *Soit* $g : z \longmapsto z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ *une fonction univalente sur* $\mathbb{C} - \bar{D}$. *L'aire de* $\mathbb{C} - g(\mathbb{C} - \bar{D})$ *est* $\pi(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2)$. *On a en particulier* $|b_1| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

Notons C_r le cercle de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique. Pour $r > 1$, l'aire du domaine de Jordan borné de frontière $g(C_r)$ est

$$\frac{1}{2i}\int_{g(C_r)} \bar{z}dz = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{g(z)}\, g'(z)dz = \pi(r^2 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}) .$$

On conclut en faisant tendre r vers 1 .

Remarque 1.- Il résulte aussitôt des démonstrations ci-dessus que les seules fonctions $f \in \mathcal{S}$ telles que $|a_2(f)| = 2$ sont celles de la forme :
$K_\vartheta : z \longmapsto \dfrac{z}{(1-e^{i\vartheta}z)^2}$ (avec $\vartheta \in \mathbb{R}$).

Signalons quelques conséquences remarquables du théorème 1 :

THÉORÈME 4 (dit "du quart").- *Soit* $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction univalente sur* D . *Le rayon* r *de la plus grande boule ouverte centrée en* a_0 *contenue dans* $f(D)$ *vérifie* $\dfrac{|a_1|}{4} \le r \le |a_1|$.

On se ramène par translation et homothétie au cas où $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. L'application $g : z \longmapsto f^{-1}(rz)$ envoie 0 sur 0 et D dans D ; on a donc d'après le lemme de Schwarz $r = |g'(0)| \le 1$. Soit w un élément de $\mathbb{C} - f(D)$. L'application $z \longmapsto \dfrac{w^2}{w - f(z)}$ est univalente sur D et son développement de Taylor en 0 s'écrit $w + z + (\frac{1}{w} + a_2)z^2 + \ldots$. D'après le théorème 1, on a $|\frac{1}{w} + a_2| \le 2$, d'où $|\frac{1}{w}| \le 2 + |a_2| \le 4$ et $|w| \ge \frac{1}{4}$. L'inégalité $\frac{1}{4} \le r$ en résulte.

THÉORÈME 5.-*Pour toute fonction* $f \in \mathcal{S}$ *et tout* $z \in D$, *on a* $|f(z)| \le \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$

Soit w un élément de D . Posons $r = |w|$. L'application $g : z \longmapsto f\left(\dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}\right)$ est univalente sur D . On a $g'(z) = \dfrac{1-r^2}{(1+\bar{w}z)^2} f'\left(\dfrac{z+w}{1+\bar{w}z}\right)$, d'où $g'(0) = (1-r^2) f'(w)$ et $g''(0) = -2\bar{w}(1-r^2)f'(w) + (1-r^2)^2 f''(w)$. D'après le théorème 1, on a $|g''(0)| \le 4\ |g'(0)|$, d'où

(1) $$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)} - \frac{2\bar{w}}{1-r^2}\right| \le \frac{4}{1-r^2}$$

(2) $$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)}\right| \le \frac{4+2r}{1-r^2} .$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à $\log f'$ (avec la détermination du logarithme pour laquelle $\log f'(0) = 0$), on en déduit

(3) $$|\log f'(w)| \le \log \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

(4) $$|f'(w)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

et on conclut en appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis.

Remarque 2.- En fait on a mieux (Grunsky, 1932, [Gr]) : pour tout $z \in D$, l'ensemble $\{\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) \mid f \in \mathcal{S}\}$ est la boule fermée de centre $\log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$ et de rayon $\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$ (avec pour déterminations du logarithme celles qu'on imagine).

COROLLAIRE.- *L'ensemble* $\mathcal{S}$ *est compact (pour la topologie de la convergence compacte sur* D).

D'après le théorème 5, $\mathcal{S}$ est une famille normale, donc relativement compacte, de fonctions analytiques sur D . Soit f un élément de l'adhérence $\bar{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$. Étant limite uniforme sur toute partie compacte de D d'une suite de fonctions univalentes sur D , la fonction f est univalente ou constante d'après le théorème de Rouché. Mais on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, de sorte que f appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$, égal à $\bar{\mathcal{S}}$, est compact.

3. Le théorème de de Branges et ses conséquences

Les coefficients d'une fonction $f \in \mathcal{S}$ sont très fortement liés à ceux de $\sqrt{f(z^2)}$ (racine carrée normalisée par $\sqrt{f(0)} = 1$) et de $z\frac{f'(z)}{f(z)}$. Posons en effet

(5) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(6) $$\sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$$

(7) $$z\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n .$$

On obtient, d'une part en élevant (6) au carré, d'autre part en prenant la dérivée logarithmique de $\frac{\sqrt{f(z^2)}}{z}$, les relations

(8) $$a_n = \sum_{\ell+\ell'=n-1} c_{2\ell+1}\, c_{2\ell'+1} \qquad (n \geq 0)$$

(9) $$nc_{2n+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_{2\ell+1}\, b_{n-\ell} \qquad (n \geq 0) .$$

Vu le th. 2 et l'égalité $\sqrt{K_0(z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$, il était tentant de conjecturer, et Littlewood et Paley l'ont fait en 1932, que $|c_{2n+1}| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. Dès 1933, Fekete et Szegö ont fourni un contre-exemple. *A fortiori*, vu (9), l'inégalité $|b_n| \leq 1$ que suggérerait l'égalité $z\frac{K_0'(z)}{K_0(z)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ est fausse en général.

Le théorème de de Branges établit en fait la véracité d'une conjecture de Milin ([Mi 2], 1971) qui affirme que certaines moyennes pondérées des $|b_n|^2 - 1$ sont négatives :

THÉORÈME 6 (de Branges).- *Pour tout entier* $n \geq 0$ *, on a*
$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n+1}\right)(|b_\ell|^2 - 1) \leq 0 .$$

Nous démontrerons cet énoncé dans les numéros qui suivent. La motivation principale de cette conjecture de Milin est qu'elle implique l'énoncé suivant, conjecturé par Robertson en 1936 ([Ro 1]), énoncé qui, à son tour, implique la conjecture de Bieberbach en vertu de (8) et de l'inégalité de Cauchy - Schwarz :

THÉORÈME 7.- *On a* $\sum_{\ell=0}^{n} |c_{2\ell+1}|^2 \leq n+1$ *pour tout* $n \geq 0$.

Démonstration (Lebedev-Milin, [Mi 1] et [Mi 2]) : posons $C_m = \sum_{\ell=0}^{m} |c_{2\ell+1}|^2$.
D'après (9) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour $m \geq 1$

$$|c_{2m+1}|^2 \leq \frac{1}{m^2} C_{m-1} \sum_{\ell=1}^{m} |b_\ell|^2 ,$$

d'où

$$\frac{C_m}{C_{m-1}} \leq 1 + \frac{1}{m^2} \sum_{\ell=1}^{m} |b_\ell|^2 = \frac{m+1}{m} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{m} \left(\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)(|b_\ell|^2 - 1)\right)\right)$$

$$\frac{C_m}{C_{m-1}} \leq \frac{m+1}{m} \exp\left(\sum_{\ell=1}^{m} \left(\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)(|b_\ell|^2 - 1)\right)\right) ,$$

et en effectuant le produit de ces inégalités pour $1 \leq m \leq n$, on obtient

$$C_n \leq (n+1) \exp\left(\sum_{\ell=1}^{m} \left(\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n+1}\right)(|b_\ell|^2 - 1)\right)\right) ,$$

ce qui permet de déduire le théorème 7 du théorème 6.

La conjecture de Bieberbach a été successivement généralisée par Rogosinski (1943, [Rg]), Robertson (1970, [Ro 2]) et Sheil-Small (1973, [S-S]). Leurs énoncés étant impliqués, comme ils l'ont montré, par la conjecture de Robertson, sont maintenant démontrés. Pour les formuler, introduisons l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions de la forme $\varphi . f \circ w$, où $f \in \mathcal{S}$, et où $\varphi : D \longrightarrow D$ et $w : D \longrightarrow D$ sont des fonctions holomorphes avec $w(0) = 0$.

THÉORÈME 8.- *Pour toute fonction* $g : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *appartenant à* $\mathcal{C}$ *et tout polynôme* $\sum_{n=0}^{N} \lambda_n z^n$ *, on a*

$$\sup_{z \in D} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda_n z^n \right| \leq N \sup_{z \in D} \left| \sum_{n=0}^{N} \lambda_n z^n \right| .$$

(Lorsque l'on prend pour polynôme z^n , on obtient l'inégalité $|a_n| \leq n$ qui généralise la conjecture de Bieberbach ; lorsque l'on prend pour g la fonction $K_0 : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$, on retrouve un théorème de Bernstein qui affirme que pour tout polynôme P de degré $\leq N$ on a $\sup_{z \in D} |P'(z)| \leq N \sup_{z \in D} |P(z)|$).

Démonstration : Écrivons g sous la forme $\varphi . f \circ w$ avec φ, f, w comme ci-dessus et posons $P(z) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n z^n$, $\sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$. Le développement de Taylor à l'ordre N en 0 de g coïncide avec celui de $h = \varphi . w . \left(\sum_{n=0}^{N-1} c_{2n+1} w^n\right)^2$ et l'on a donc, pour $z \in \mathbb{C}$ de valeur absolue $r < 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda_n z^n = \int_{|u|=1} P(\bar{u})\, h(zu) \frac{du}{2\pi i u}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda_n z^n\right| \leq \sup_{t\in D} |P(t)| \cdot \int_{|u|=r} \left|\sum_{n=0}^{N-1} c_{2n+1} w^n(u)\right|^2 \frac{du}{2\pi i u} .$$

La fonction $v : u \longmapsto \left|\sum_{n=0}^{N-1} c_{2n+1} u^n\right|^2$ est sous-harmonique sur D , continue sur $\bar{D}$, donc majorée par la fonction $\tilde{v}$, harmonique sur D , continue sur $\bar{D}$ avec laquelle elle coïncide sur $\bar{D}-D$. On en déduit

$$\int_{|u|=r} v \circ w(u) \frac{du}{2\pi i u} \leq \int_{|u|=r} \tilde{v} \circ w(u) \frac{du}{2\pi i u} = \tilde{v}(w(0)) = \tilde{v}(0)$$

et l'on a $\tilde{v}(0) = \int_{|u|=1} \tilde{v}(u) \frac{du}{2\pi i u} = \int_{|u|=1} v(u) \frac{du}{2\pi i u} = \sum_{n=0}^{N-1} |c_{2n+1}|^2 \leq N$ d'après le théorème 7.

4. Interprétation géométrique de la topologie de la convergence compacte (d'après Carathéodory).

Considérons les deux espaces topologiques suivants :

- l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions univalentes f sur D telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) \in \mathbb{R}_+^*$, muni de la topologie de la convergence compacte sur D ;
- l'ensemble $\mathcal{U}$ des ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ distincts de $\mathbb{C}$ contenant 0 ; on le munit de la topologie engendrée par les parties de la forme $\{U \in \mathcal{U} | K \subset U\}$, où K est une partie compacte de $\mathbb{C}$, et de la forme $\{U \in \mathcal{U} | V \not\subset U\}$, où V est un ouvert *connexe* de $\mathbb{C}$ contenant 0 .

Le théorème de représentation de Riemann affirme que $f \longmapsto f(D)$ est une bijection de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{U}$. Le but de ce numéro est de montrer que cette bijection est en fait un homéomorphisme.

Nous ferons ceci en plusieurs étapes :

a) *L'application $f \longmapsto f(D)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$ est continue* : Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{F}$ telle que $K \subset f(D)$. Il existe $r \in]0,1[$ tel que K soit contenu dans l'image par f de la boule ouverte $B(0,r)$. D'après le théorème de Rouché, si $g \in \mathcal{F}$ vérifie $|g(z) - f(z)| < d(f(z),K)$ pour $|z| = r$, on a $K \subset g(D)$. Ainsi $\{g \in \mathcal{F} | K \subset g(D)\}$ est ouvert dans $\mathcal{F}$. Il nous faut maintenant montrer que pour tout ouvert connexe V de $\mathbb{C}$ contenant 0 , l'ensemble $\{g \in \mathcal{F} | V \subset g(D)\}$ est fermé dans $\mathcal{F}$. Puisque V est réunion d'ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$, distincts de $\mathbb{C}$, contenant 0 , il suffit de traiter le cas où V est un tel ouvert. Soit alors $\varphi : D \longmapsto V$ une bijection holomorphe vérifiant $\varphi(0) = 0$ et (f_n) une suite convergente de limite f dans $\mathcal{F}$, telle que $V \subset f_n(D)$ pour tout n . Soit z un point de D . Il existe $z_n \in D$ tel que $f_n(z_n) = \varphi(z)$ et l'on a $|z_n| \leq |z|$ d'après le lemme de Schwarz appliqué à

$f_n^{-1} \circ \varphi$. Une sous-suite de la suite (z_n) a donc une limite ℓ dans D et l'on a $f(\ell) = \varphi(z)$ car la famille (f_n) est équicontinue. Ainsi V est contenu dans $f(D)$.

b) *$\mathcal{U}$ est séparé* : Soient en effet U, U' deux éléments distincts de $\mathcal{U}$; il existe par exemple $z \in U - U'$. Choisissons un ouvert connexe V de U , contenant 0 et z , relativement compact dans U . Alors $\{W \in \mathcal{U} | \bar{V} \subset W\}$ et $\{W \in \mathcal{U} | V \not\subset W\}$ sont des voisinages ouverts disjoints de U et U' .

c) *L'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{U}$ par homothétie est continue* : il suffit de démontrer la continuité en un point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}$ de la forme $(1,U)$ car les homothéties de $\mathcal{U}$ sont des homéomorphismes. Soient K une partie compacte de U et V une partie ouverte connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0 et non contenue dans U . Il s'agit de montrer que $M = \{(\lambda, W) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U} | K \subset \lambda W \text{ et } V \not\subset \lambda W\}$ est un voisinage de $(1,U)$. Choisissons x dans $V - U$ et une partie ouverte connexe relativement compacte V' de V contenant 0 et x . Il existe $\alpha > 1$ tel que $\lambda K \subset U$ et $\lambda V' \subset V$ pour $\lambda \in [\alpha^{-1}, \alpha]$. La réunion K' des λK $(\lambda \in [\alpha^{-1}, \alpha])$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$ et $]\alpha^{-1}, \alpha[\times \{W \in \mathcal{U} | K' \subset W \text{ et } V' \not\subset W\}$ est un voisinage de $(1,U)$ contenu dans M .

d) *L'application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui à $U \in \mathcal{U}$ associe le rayon $\rho(U)$ de la plus grande boule ouverte de centre 0 contenue dans U est continue* : en effet, $\rho(U) < \rho$ équivaut à $B(0,\rho) \not\subset U$, et $\rho(U) > \rho$ équivaut à $\overline{B(0,\rho)} \subset U$.

e) *Fin de la démonstration* : il résulte de c) et d) que la surjection canonique $\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U}/\mathbb{R}_+^*$ est une fibration triviale. Il en est de même de $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}/\mathbb{R}_+^*$. Pour montrer que la bijection $f \longmapsto f(D)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{U}$, il suffit de montrer qu'elle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}$ sur son image ; or cette bijection est continue d'après a), $\mathcal{S}$ est compact (cor. au th. 5) et $\mathcal{U}$ est séparé d'après b).

On peut résumer le résultat précédent comme suit : soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des éléments de $\mathcal{F}$, $(U_n)_{n\geq 1}$ et U leurs images dans $\mathcal{U}$. Pour que la suite f_n converge vers f uniformément sur tout compact de D , il faut et il suffit que soient satisfaites les deux conditions suivantes :

(i) Tout compact contenu dans U est contenu dans U_n pour n assez grand ;

(ii) Tout ouvert connexe contenant 0 et contenu dans U_n pour une infinité d'entiers $n \geq 1$ est contenu dans U .

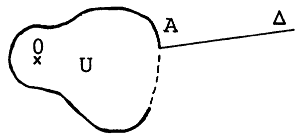
Lorsque ces conditions sont satisfaites, pour toute partie compacte K de U , les applications $z \longmapsto f_n^{-1}(z)$ de K dans D (bien définies pour n assez grand d'après (i)) convergent uniformément vers l'application $z \longmapsto f^{-1}(z)$ sur K : la convergence simple a essentiellement été prouvée en a) ci-dessus et on en déduit aussitôt l'équicontinuité de la famille $\left(f_n^{-1}\right)$ en tout point de K, puis la convergence uniforme.

5. <u>La méthode de Löwner</u> (1923,[Lö])

La méthode de Löwner, introduite initialement pour démontrer la conjecture de Bieberbach pour le troisième coefficient, s'est avérée l'outil essentiel de la démonstration de de Branges. Son point de départ est la remarque suivante :

Lemme 1.- *Avec les notations du n° 4, l'ensemble $\mathfrak{U}^*$ des ouverts $U \in \mathfrak{U}$ qui sont de la forme $\mathbb{C} - \gamma([0,\infty[)$, avec $\gamma : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ application injective, continue et propre ("arc de Jordan partant à l'infini"), est dense dans $\mathfrak{U}$.*

De la description concrète de la convergence dans $\mathfrak{U}$ donnée à la fin du n° 4, on déduit que l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{C}$ contenant 0 et dont la frontière est un arc de Jordan, est dense dans $\mathfrak{U}$.



Soit U un tel ouvert, Δ une demi-droite ne rencontrant $\bar{U}$ qu'en son origine A et γ une paramétrisation de $\bar{U} - U$ par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ telle que $\gamma(0) = A$. Le complémentaire U_n dans $\mathbb{C}$ de $\Delta \cup \gamma\left([0,1-\frac{1}{n}[\right)$ appartient à $\mathfrak{U}^*$ et tend vers U lorsque n tend vers l'infini, d'après le critère de convergence indiqué à la fin du n° 4. D'où le lemme.

Du lemme 1 et du n° 4, on déduit que l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des fonctions $f \in \mathcal{S}$ telles que $f(D)$ appartienne à $\mathfrak{U}^*$ est dense dans $\mathcal{S}$. Le théorème suivant montre qu'une telle fonction est élément d'une famille à un paramètre de fonctions univalentes sur D satisfaisant un certain type d'équation aux dérivées partielles.

THÉORÈME 9 (Löwner, [Lö]).- *Soit f un élément de $\mathcal{S}^*$. Il existe une famille $(f_t)_{t\geq 0}$ de fonctions univalentes sur D et une application continue λ de $[0,\infty[$ dans le cercle unité telles que :*

a) *On ait $f_t(0) = 0$ et $f_t'(0) = e^t$ pour tout $t \geq 0$;*

b) *On ait $f_0 = f$;*

c) *L'application $(z,t) \longmapsto f_t(z)$ soit de classe C^1 sur $D \times [0,\infty[$ et y satisfasse l'équation aux dérivées partielles*

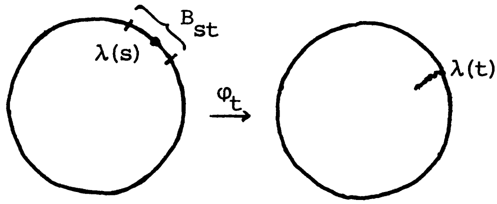
$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t(z)) = \frac{\lambda(t)+z}{\lambda(t)-z}\, z\, \frac{\partial}{\partial z}(f_t(z)) \ . \tag{10}$$

Par hypothèse $f(D)$ est le complémentaire de l'image d'une application injective continue et propre $\gamma : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $t \geq 0$, notons f_t la fonction univalente sur D caractérisée par $f_t(0) = 0$, $f_t'(0) > 0$, $f_t(D) = \mathbb{C} - \gamma([t,\infty[)$. Elle dépend continûment de t d'après le n° 6, et f_0 est égale à f. L'application continue $t \longmapsto f_t'(0)$ est strictement croissante (appliquer le lemme de Schwarz à $f_t^{-1} \circ f_s$ pour $t \geq s$) et tend vers $+\infty$ lorsque

t tend vers $+\infty$ (th. 4). Quitte à modifier le paramétrage de γ, on peut donc s'arranger pour qu'elle soit égale à $t \longmapsto e^t$. Les conditions a) et b) sont alors satisfaites.

Pour établir c), nous allons utiliser les théorèmes de prolongement au bord de Carathéodory : l'application f_t se prolonge en une application continue $\tilde{f}_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; il existe un unique point $\lambda(t)$ (resp. $\mu(t)$) de $\bar{D}-D$ dont l'image par $\tilde{f}_t$ est $\gamma(t)$ (resp. ∞) et la restriction de $\tilde{f}_t$ à chacun des deux arcs fermés de $\bar{D}-D$ d'extrémités $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ est un homéomorphisme de cet arc sur $\gamma([t,\infty[) \cup \{\infty\}$.

Fixons $s \geq 0$ et soit $t > s$. L'application $f_t^{-1} \circ f_s$ est une bijection biholomorphe de D sur $D - f_t^{-1}(\gamma[s,t[)$ et se prolonge en une application continue φ_t de $\bar{D}$ sur $\bar{D}$; si B_{st} désigne l'arc $\tilde{f}_s^{-1}(\gamma[s,t[)$ on a $\varphi_t(B_{st}) = f_t^{-1}(\gamma[s,t[)$ et $|\varphi(z)| = 1$ pour $z \in \bar{D}-D-B_{st}$.



La fonction $\frac{\varphi_t(z)}{z}$ se prolonge en 0 où elle prend la valeur e^{s-t}, et ne s'annule pas sur $\bar{D}$. Notons $\log\left(\frac{\varphi_t(z)}{z}\right)$ la détermination holomorphe de son logarithme qui vaut $s-t$ en 0. On a, pour $w \in D$,

$$(11) \qquad \log\left(\frac{\varphi_t(w)}{w}\right) = \int_{|u|=1} \frac{u+w}{u-w} \operatorname{Re}\left(\log \frac{\varphi_t(u)}{u}\right) \frac{du}{2\pi i u} = \int_{B_{st}} \frac{u+w}{u-w} \log|\varphi_t(u)| \frac{du}{2\pi i u} .$$

En particulier la masse totale de la mesure négative $\log|\varphi_t(u)| \frac{du}{2\pi i u}$ sur B_{st} est $s-t$ (prendre $w = 0$ dans (11)). Soit z un point de D. Pour $t > s$ suffisamment proche de s, on a $z \in \varphi_t(D)$ (cf. n° 6). Appliquons l'égalité (11), divisée par $s-t$, à $w = \varphi_t^{-1}(z)$, puis faisons tendre t vers s. Puisque B_{st} tend vers $\{\lambda(s)\}$ et $\varphi_t^{-1}(z)$ vers z (cf. n° 6), le membre de droite tend tend vers $\frac{\lambda(s)+z}{\lambda(s)-z}$. Par comparaison avec le membre de gauche, on en déduit que $t \longrightarrow \varphi_t^{-1}(z)$ a une dérivée à droite en s égale à $\frac{\lambda(s)+z}{\lambda(s)-z}\, z$ et par suite l'application $t \longrightarrow f_t(z) = f_s(\varphi_t^{-1}(z))$ a en s une dérivée à droite satisfaisant

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial t} (f_t(z)) \Big|_{t=s^+} = \frac{\lambda(s)+z}{\lambda(s)-z}\, z \frac{\partial}{\partial z} (f_s(z)) .$$

Nous reconnaissons l'équation aux dérivées partielles (10). Pour ce qui concerne la démonstration du théorème de de Branges, la version affaiblie du th. 9 obtenue jusqu'ici suffirait. C'est pourquoi nous renvoyons le lecteur à [Du] pour la démonstration, un peu technique, de la continuité de λ. Une fois cette continuité acquise, on déduit de (12) et de la continuité, déjà connue, de $(t,z) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}(f_t(z))$ que l'application $(t,z) \longrightarrow f_t(z)$ est de classe C^1 (une fonction d'une variable réelle admettant une dérivée à droite continue est dérivable).

6. Démonstration du théorème de de Branges

A) Étude d'un certain système différentiel

Soit $(\tau_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, nulles (identiquement) pour n assez grand. Nous définirons, pour tout nombre réel $t \geq 0$, une fonction B_t sur l'espace V des suites de nombres complexes $(\beta_n)_{n\geq 1}$ à support fini par

$$B_t((\beta_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n'(t)(|\beta_n|^2 - 1) + 2n\tau_n(t)\operatorname{Re}(\bar{\beta}_n(\beta_n + 1 + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} \beta_\ell))) . \tag{13}$$

La motivation de cette définition apparaîtra naturellement dans la démonstration du théorème de de Branges en B), et le lemme suivant y jouera un rôle clé.

Lemme 2.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *On a* $B_t(\beta) \geq 0$ *pour tout* $t \geq 0$ *et tout* $\beta \in V$.

(ii) *Les fonctions* τ_n *sont décroissantes et elles sont solutions des systèmes différentiels équivalents*

$$\tau_n' = -n\tau_n - 2\sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^{m-n} m\tau_m \qquad (n \geq 1) \tag{14}$$

$$\tau_{n+1}' + \tau_n' = (n+1)\tau_{n+1} - n\tau_n \qquad (n \geq 1) . \tag{14 bis}$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on a, pour tout $t \geq 0$ *et* $\beta = (\beta_n) \in V$,

$$B_t(\beta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n'(t)|\beta_n + 1 + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} \beta_\ell|^2 . \tag{15}$$

Soit $N \geq 1$ un entier tel que $\tau_n = 0$ pour $n > N$. Posons $\alpha_n = (-1)^n$ pour $1 \leq n \leq N$ et $\alpha_n = 0$ pour $n > N$. La fonction B_t est polynomiale de degré ≤ 2 sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à V et s'annule au point $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1}$. Pour qu'elle soit positive sur V, il faut donc et il suffit que :

a) *ses dérivées partielles* $\dfrac{\partial B_t}{\partial \beta_n}$ *s'annulent en* α, ce qui se traduit par le système d'équations (14), manifestement équivalent à (14 bis) ;

b) *sa partie homogène* $\tilde{B}_t$ *de degré* 2 *soit positive sur* V. Or si $\beta = (\beta_n)_{n\geq 1}$ est un élément de V et si l'on pose $\gamma_n = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell$ pour tout $n \geq 0$, on a

$$\tilde{B}_t(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n'(t)|\gamma_n - \gamma_{n-1}|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\tau_n(t)\operatorname{Re}((\bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}_{n-1})(\gamma_n + \gamma_{n-1})) ,$$

et lorsque $(\tau_n)_{n\geq 1}$ satisfait (14 bis), la seconde somme s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\tau_n(t)(|\gamma_n|^2 - |\gamma_{n-1}|^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\tau_n(t) - (n+1)\tau_{n+1}(t))|\gamma_n|^2$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n'(t) + \tau_{n+1}'(t))|\gamma_n|^2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n'(t)(|\gamma_n|^2 + |\gamma_{n-1}|^2) ,$$

de sorte que l'on a alors

(16) $$\tilde{B}_t(\beta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \tau'_n(t)\,|\gamma_n + \gamma_{n-1}|^2 .$$

La positivité de cette expression pour tout $\beta \in V$ et tout $t \geq 0$ équivaut à la décroissance des fonctions τ_n pour $n \geq 1$.

Ceci prouve l'équivalence des conditions (i) et (ii). Lorsqu'elles sont satisfaites, on a $B_t(\beta) = \tilde{B}_t(\beta - \alpha)$ d'après ce qui précède et (15) résulte de (16).

Remarque.- Supposons que la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ soit solution de (14 bis). Si l'on choisit une fonction $\tau_0 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tau'_1 + \tau'_0 = \tau_1$ et si l'on pose $\tau_{-n} = \tau_n$ pour $n \geq 1$, on a

(17) $$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \tau'_{n+1} + \tau'_n = (n+1)\tau_{n+1} - n\,\tau_n .$$

Ceci s'interprète en disant que la fonction $u(t,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n(t) z^n$ satisfait l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = z\,\frac{1-z}{1+z}\,\frac{\partial u}{\partial z}$, donc est de la forme $P\left(e^{-t}\,\frac{(1-z)^2}{z}\right)$, où P est un polynôme. Les fonctions τ_n sont liées aux coefficients du polynôme $P = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$ par les formules

(18) $$\tau_n(t) = \sum_{m=|n|}^{\infty} (-1)^{n+m}\binom{2m}{m-n} a_m\, e^{-mt} \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

(19) $$a_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n(0) \quad , \quad a_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n}{m}\binom{n+m-1}{n-m}\tau_n(0) \qquad (m \geq 1).$$

On a en particulier $\lim_{t\to\infty} \tau_n(t) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

B) Le principe de la démonstration

PROPOSITION 1.- *Soit* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions de classe* C^1 *de* $[0,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *, nulles pour* n *assez grand, satisfaisant les conditions équivalentes du lemme 1. Pour toute fonction* $f \in \mathcal{S}$ *, les coefficients de la série* $z\,\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n z_n$ *satisfont les inégalités*

(20) $$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(0)\,(|b_n|^2 - 1) \leq 0 .$$

Il suffit de démontrer cette proposition lorsque f appartient au sous-ensemble dense $\mathcal{S}^*$ de $\mathcal{S}$ introduit au n° 5. Considérons alors une famille $(f_t)_{t\geq 0}$ de fonctions satisfaisant les conclusions du théorème 9, et posons $z\,\frac{f'_t(z)}{f_t(z)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) z^n$. Pour chaque entier $n \geq 1$, la fonction $t \longmapsto b_n(t)$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$; elle est bornée car les fonctions $e^{-t} f_t$ appartiennent à $\mathcal{S}$ qui est compact. L'équation aux dérivées partielles (10) s'écrit

(21) $$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n(t)}{n} z^n = \frac{\lambda(t) + z}{\lambda(t) - z}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) z^n\right) ,$$

ou encore

(22) $$b'_n(t) = n\left(b_n(t) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \lambda(t)^{\ell-n}\, b_\ell(t) + \lambda(t)^{-n}\right) \qquad (n \geq 1) .$$

Étudions la fonction $\varphi : t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t)(|b_n(t)|^2 - 1)$. Elle est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est égale, d'après (22), à $B_t((b_n(t)\lambda(t)^n)_{n\geq 1})$, où B_t est défini par la formule (13). Puisque la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ satisfait la condition (i) du lemme 2, la fonction φ est croissante sur $[0,+\infty[$. D'autre part, φ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, car les fonctions τ_n ont cette propriété (*cf.* A), remarque). Il en résulte que $\varphi(0)$ est négatif, d'où l'inégalité (20).

L'application $(\tau_n)_{n\geq 1} \longmapsto (\tau_n(0))_{n\geq 1}$ est une bijection de l'ensemble des suites de fonctions de classe C^1 de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, nulles pour n assez grand, solutions du système différentiel (14), sur l'ensemble des suites à support fini de nombres complexes. En particulier il existe pour chaque entier $N \geq 1$ une unique telle suite $(\tau_{n,N})_{n\geq 1}$ vérifiant

$$(23) \qquad \tau_{n,N}(0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{N+1}{n} & \text{si } 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N . \end{cases}$$

On en déduit, en utilisant (14) ou (14 bis), que l'on a

$$(24) \qquad \tau'_{n,N}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } N-n \text{ est pair et } 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la suite $(\tau'_{n,N})_{n\geq 1}$ est également solution du système différentiel (14).

Nous construirons en C), pour tout entier $N \geq 1$, une suite de fonctions $(\sigma_{n,N})_{n\geq 1}$, solution du système différentiel (14), et qui satisfait les deux exigences suivantes :

a) Les fonctions $\sigma_{n,N}$ sont positives sur $[0,+\infty[$;

b) Pour n entier $\leq N$ de même parité que N, $\sigma_{n,N}(0)$ est non nul et fonction croissante de n. Pour les autres valeurs de n, on a $\sigma_{n,N}(0) = 0$.

Compte tenu de b) et de la formule (24), une récurrence immédiate sur N montre que la suite $(\tau'_{n,N})_{n\geq 1}$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des suites $(\sigma_{n,M})_{n\geq 1}$, où M décrit l'ensemble des entiers $\leq N$ de même parité que N. On en déduit, en utilisant a), que les fonctions $\tau_{n,N}$ sont croissantes sur $[0,+\infty[$. Le théorème de de Branges s'obtient en appliquant la proposition 1 à la suite $(-\tau_{n,N})_{n\geq 1}$ pour tout $N \geq 1$.

C) <u>Construction des fonctions</u> $\sigma_{n,N}$

Soit N un entier ≥ 0. Posons $u_N(x) = 2^{-N} \dfrac{(x^2-1)^N}{N!}$. En dérivant $m+1$ fois l'équation différentielle $(1-x^2)y' + 2Nxy = 0$ satisfaite par u_N, on obtient, pour tout entier $m \geq 0$,

$$(25) \qquad (1-x^2)u_N^{(m+2)}(x) + 2(N-m-1)\,x u_N^{(m+1)}(x) + (m+1)(2N-m)u_N^{(m)}(x) = 0 .$$

Définissons, pour $n \in \mathbb{Z}$, des fonctions $\sigma_{n,N} : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\text{(26)} \qquad \sigma_{n,N}(t) = \begin{cases} \frac{(N-n)!}{(N+n)!} e^{-nt}\left(u_N^{(N+n)}(\sqrt{1-e^{-t}})\right)^2 & \text{si } |n| \le N \\ 0 & \text{si } |n| > N . \end{cases}$$

Ces fonctions sont positives. Montrons que l'on a, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{(27)} \qquad \sigma'_{n+1,N}(t) + \sigma'_{n,N}(t) - (n+1)\sigma_{n+1,N}(t) + n\sigma_{n,N}(t) = 0 .$$

C'est évident pour $n \ge N$ et $n < -N$: en effet $\sigma_{n,N}$ est nulle pour $|n| > N$ et proportionnelle à e^{-Nt} pour $|n| = N$. Enfin, pour $-N \le n < N$, le premier membre de (27) s'écrit, en posant pour abréger $x = \sqrt{1-e^{-t}}$ et $v = u_N^{(N+n)}$,

$$\frac{(N-n-1)!}{(N+n+1)!} e^{-(n+1)t} v'(x)\left(\frac{e^{-t}}{x} v''(x) - (2n+2)v'(x) + \frac{(N+n+1)(N-n)}{x} v(x)\right) ,$$

et sa nullité résulte de (25), appliqué avec $m = N + n$.

Un calcul immédiat montre que l'on a

$$\text{(28)} \qquad \sigma_{n,N}(0) = \begin{cases} \binom{N-n}{\frac{N-n}{2}}\binom{N+n}{\frac{N+n}{2}} 4^{-N} & \text{si } N-n \text{ est pair et } |n| \le N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate sur cette formule que l'exigence b) formulée à la fin de B) est bien satisfaite par les suites $(\sigma_{n,N})_{n\ge 1}$. C.Q.F.D.

Remarque.- La formule (28) peut se résumer par

$$\text{(29)} \qquad \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_{n,N}(0) z^n T^N = ((1-zT)(1-z^{-1}T))^{-1/2} .$$

La remarque de A) permet d'en déduire la série génératrice

$$\text{(30)} \qquad \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_{n,N}(t) z^n T^N = \left((1-T)^2 - Te^{-t}\frac{(1-z)^2}{z}\right)^{-1/2} ,$$

et les formules explicites pour $\sigma_{n,N}$ $(|n| \le N)$

$$\text{(31)} \qquad \sigma_{n,N}(t) = \sum_{m=|n|}^{N} (-1)^{n+m} \binom{2m}{m-n} \frac{(N+m)!}{(N-m)!m!m!} 2^{-2m} e^{-mt} .$$

7. Deux remarques sur la démonstration

A) Amélioration des inégalités de de Branges

Pour tout entier $N \ge 1$, la suite de fonctions $\left(\int_t^\infty \sigma_{n,N}(u)\,du\right)_{n\ge 1}$ satisfait les conditions équivalentes du lemme 2. En appliquant à ces suites la proposition 1, on obtient les inégalités :

$$(I_1) \qquad |b_1|^2 \le 1 ,$$

$$(I_2) \qquad |b_2|^2 + 4|b_1|^2 \le 5 ,$$

$$(I_3) \qquad 5|b_3|^2 + 15|b_2|^2 + 39|b_1|^2 \le 59 ,$$

$$(I_4) \qquad 21|b_4|^2 + 56|b_3|^2 + 108|b_2|^2 + 264|b_1|^2 \le 449 ,$$

etc. Les inégalités du théorème de de Branges sont plus faibles que les précédentes, puisqu'elles s'en déduisent en en prenant des combinaisons linéaires à coefficients positifs (*cf.* 6. B)), à savoir (I_1), (I_2), $(I_3)+6(I_1)$, $(I_4)+18(I_2)$, etc.

B) Liens avec les résultats d'Askey et Gasper

Comme dans la remarque de 6, A), il est agréable d'étendre la définition des $\tau'_{n,N}$ donnée pour $n \geq 1$ en 6, B), à toute valeur de n dans $\mathbb{Z}$, en imposant à la famille $(\tau'_{n,N})_{n\in\mathbb{Z}}$ d'être solution de (17), à $\tau'_{-n,N}$ d'être égale à $\tau'_{n,N}$, et à $\tau'_{0,N}$ de prendre en 0 la valeur 1 ou 0 suivant que N est pair ou impair. On a alors, d'après (24),

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau'_{n,N}(0)\, z^n T^N = \left((1-zT)(1-z^{-1}T)\right)^{-1} \tag{32}$$

La remarque de A) permet d'en déduire la série génératrice

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau'_{n,N}(t)\, z^n T^N = \left((1-T)^2 - Te^{-t}\frac{(1-z)^2}{z}\right)^{-1} \tag{33}$$

et les formules explicites pour $\tau'_{n,N}$ $(|n| \leq N)$

$$\tau'_{n,N} = \sum_{m=|n|}^{N} (-1)^{n+m} \binom{2m}{m-n}\binom{N+m+1}{N-m} e^{-mt}\ . \tag{34}$$

La positivité du nombre de droite de (34), que nous avons établie au n° 6, n'est pas évidente *a priori*. Elle a été démontrée pour la première fois par Askey et Gasper dans [A;G] en 1976 : ils s'étaient trouvés confrontés à cette expression en raison de ses liens étroits avec les polynômes de Jacobi. Même simplifiée par Gasper ([Ga]), leur preuve est longue et technique. Elle consiste à établir tout d'abord l'égalité (31) en se servant d'une formule de Clausen, puis en partant des expressions (31) et (34), à montrer que $\tau'_{n,N}$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des $\sigma_{n,M}$ $(1 \leq M \leq N\ ,\ N-M$ pair) : Askey et Gasper prouvent pour cela, par échange de sommations et en utilisant une identité remarquable satisfaite par les fonctions hypergéométriques de type ${}_5F_4$, que l'on a

$$\tau'_{n,N} = \sum_{\substack{0\leq M\leq N \\ N-M \text{ pair}}} (2M+1) \prod_{\ell=1}^{2M+1} (N-M+\ell)^{(-1)^\ell}\, \sigma_{n,M}\ . \tag{35}$$

8. Les cas d'égalité

Soit $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction appartenant à $\mathcal{S}$. Comme au n° 3, posons $\sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ et $z\,\dfrac{f'(z)}{f(z)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.

Soit n un entier ≥ 1. L'égalité $|a_{n+1}| = n+1$ implique $\sum_{\ell=0}^{n} |c_{2\ell+1}|^2 = n+1$, qui à son tour implique $\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{n+1}\right)(|b_\ell|^2 - 1) = 0$ (*cf.* n° 3). Enfin cette dernière égalité n'est satisfaite, d'après le lemme qui suit, que lorsque $|a_2| = 2$, c'est-à-dire lorsque f est de la forme $z \longmapsto \dfrac{z}{(1-e^{i\vartheta}z)^2}$ avec $\vartheta \in \mathbb{R}$ (n° 2, remarque 1).

Lemme 3.- *Sous les hypothèses de la proposition* 1, *et en posant* $a = \frac{2-|a_2|}{4}$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(0)(|b_n|^2 - 1) \leq 4 \int_0^a \tau_1'(t)(a-t)^2 dt . \tag{36}$$

De plus, si la suite $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *n'est pas identiquement nulle et si* $|a_2| < 2$, *le second membre de l'inégalité* (36) *est strictement négatif.*

Pour prouver l'inégalité (36), il suffit par continuité de traiter le cas où $f \in \mathcal{S}^*$. Adoptons alors les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 1. Pour tout $t \geq 0$, on a $|b_1'(t)| \leq 1$ (théorème 1 appliqué à f_t) , d'où $|b_1'(t)| = |b_1(t)\lambda(t) + 1| \leq 2$, puis $|b_1(t)| \leq |b_1(0)| + 2t = \frac{|a_2|}{2} + 2t$. De la formule donnant φ' et de (15), on déduit alors, pour $0 \leq t \leq a$,

$$\varphi'(t) \geq -\tau_1'(t)\,|b_1(t)\lambda(t) + 1|^2 \geq -\tau_1'(t)\left(1 - \frac{|a_2|}{2} - 2t\right)^2 = -4\tau_1'(t)(a-t) \quad ,$$

et puisque φ est négative sur $[0,+\infty[$

$$\varphi(0) \leq \varphi(0) - \varphi(a) \leq 4 \int_0^a \tau_1'(t)(a-t)^2 dt .$$

Ceci prouve (36). Nous savons que les fonctions τ_n sont, pour tout $n \geq 1$, des polynômes sans terme constant en e^{-t} . Si la fonction τ_1' était nulle sur un intervalle $[0,a]$ avec $a > 0$, on en déduirait par récurrence sur n , en utilisant (14 bis), que les fonctions τ_n sont toutes identiquement nulles. La dernière assertion en résulte.

Conclusion

De façon surprenante, la conjecture de Bieberbach a finalement été démontrée par une méthode élémentaire et naturelle, eu égard à celles généralement employées dans la théorie des fonctions univalentes. Il semble que l'idée nouvelle ait simplement consisté à introduire des fonctions poids $\tau_\ell(t)$ dépendant de t .

Quelles sont les conséquences de la conjecture de Bieberbach ? A part celles déjà démontrées par d'autres méthodes auparavant, en général plus compliquées que celle de de Branges, elles semblent pour l'instant peu nombreuses. A titre anecdotique, signalons cependant que dans certains algorithmes récents de recherche des racines d'un polynôme complexe, les constantes théoriques mesurant l'efficacité d'un tel algorithme se trouvent améliorées [Sb;S].

BIBLIOGRAPHIE

[A;G] R. ASKEY and G. GASPER - *Positive Jacobi polynomial sums*, II, Amer. J. Math. 98(1976), 709-737.

[Bi] L. BIEBERBACH - *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1916), 940-955.

[Be] S.D. BERNARDI - *Bibliography of schlicht functions*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., 1966 ; Part II, ibid., 1977. (Réimprimé par Mariner Publishing Co. : Tampa, Florida, 1983, avec ajout d'une partie III).

[dB 1] L. de BRANGES - *A proof of the Bieberbach conjecture*, USSR Academy of Sciences, Steklov Math. Institute, LOMI, preprint E-5-84, Leningrad, 1984.

[dB 2] L. de BRANGES - *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. 154(1985), 137-152.

[Du] P.L. DUREN - *Univalent functions* - Grundlehren der Math. Wiss. 259, Springer Verlag, 1983.

[F;P] C.H. FITZGERALD and Ch. POMMERENKE - *The de Branges theorem on univalent functions*, Trans. Am. Math. Soc., à paraître.

[Ga] G. GASPER - *A short proof of an inequality used by de Branges in his proof of the Bieberbach, Robertson and Milin conjectures*, à paraître.

[Gr] H. GRUNSKY - *Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin I, 1932, 95-140.

[Ko] P. KOEBE - *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1907), 191-210.

[Lö] K. LÖWNER - *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, I, Math. Ann. 89(1923), 103-121.

[Mi 1] I.M. MILIN - *On the coefficients of univalent functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 176(1967), 1015-1018 (en russe) = Soviet Math. Dokl., 8(1967), 1255-1258.

[Mi 2] I.M. MILIN - *Univalent functions and orthonormal systems*, Izdat. "Nauka", Moscow (1971) (en russe) = Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[Rg] W. ROGOSINSKI - *On the coefficients of subordinate functions*, Proc. Lond. Math. Soc. 48(1943), 48-82.

[Ro 1] M.S. ROBERTSON - *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 42(1936), 366-370.

[Ro 2] M.S. ROBERTSON - *Quasi subordination and coefficients conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 1-9.

[S-S] T. SHEIL-SMALL - *On the convolution of analytic functions*, J. Reine Angew. Math. 258(1973), 137-152.

[Sb;S] M. SHUB and S. SMALE - *Computational complexity ; on the geometry of polynomials and a theory of cost*, Part I, à paraître aux Annales Scientifiques de l'E.N.S.

Joseph OESTERLÉ

Université de Paris 6
U.E.R. de Mathématiques
Tour 46 - 5ème étage
2 place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05