CHRISTOPHE SOULÉ

Régulateurs

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 644, p. 237-253
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__237_0>

Séminaire BOURBAKI
37ème année, 1984/85, n°644 Février 1985

RÉGULATEURS

par Christophe SOULÉ

Le <u>régulateur</u> d'un corps de nombres F est un nombre réel R_F introduit par Dirichlet dans son calcul du rang du groupe $\mathcal{O}_F^*$ des unités de F [33] . Si F possède r_1 (resp. $2r_2$) plongements réels (resp. complexes), R_F est le volume du quotient de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ par un réseau, image de l'<u>application régulateur</u>

$$\rho : \mathcal{O}_F^* \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2} \ ,$$

divisé par r_1+r_2 . Ce morphisme ρ associe à une unité $u \in \mathcal{O}_F^*$ la famille $(\log\|u\|_v)$ des logarithmes des modules de u aux places archimédiennes de F , et plonge $\mathbb{Z}$ de façon diagonale. Son noyau est fini. Par la suite, Dedekind [18] a montré que R_F intervient dans le calcul du résidu en $s=1$ de la fonction zêta $\zeta_F(s)$ du corps F .

Au début des années 1970, Quillen associe à $\mathcal{O}_F$ (et plus généralement à tout schéma) une suite de groupes abéliens, notés $K_m(\mathcal{O}_F)$ [36] [37] , $m \geq 0$. On a $K_1(\mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_F^*$ et Quillen montre que $K_m(\mathcal{O}_F)$ est de type fini [38] . Borel calcule le rang de ces groupes à l'aide d'applications régulateurs (dits supérieurs) $\rho_n : K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathbb{R}^{r_2}$ (resp. $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$) si n est pair (resp. impair) , $n \geq 2$. Il prouve que le noyau de ρ_n est fini et que son image est un réseau dont le volume est le produit de $\zeta_F^{(r_2)}(1-n)$ (resp. $\zeta_F^{(r_1+r_2)}(1-n)$) par un nombre rationnel non nul (où $\zeta_F^{(r)}(s)$ désigne la r-ième dérivée de $\zeta_F(s)$) [13] [14].

La définition et l'étude des régulateurs fut ensuite étendue au K_2 des courbes par Bloch [7], puis à la K-théorie de toute variété V projective et lisse sur un corps de nombres par Beilinson [3].

Pour une telle variété, une <u>application régulateur</u> est un morphisme

$$K_m(V) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^k(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(n)) \ , \quad m+k=2n \ ,$$

où le second membre est un espace vectoriel réel de dimension finie ne dépendant que de $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (sa cohomologie de Deligne-Beilinson, définie aux paragraphes 1 et 3.3). On l'obtient en composant le morphisme $K_m(V) \longrightarrow K_m(V_{\mathbb{R}})$ avec des morphismes "caractères de Chern" pour la variété $V_{\mathbb{R}}$ (§2 et §3). Des conjectures très ambitieuses relient le volume de l'image des régulateurs de V (pour une $\mathbb{Q}$-structure convenable de la cohomologie de Deligne-Beilinson) aux valeurs aux points entiers de ses fonctions L, au produit près par un nombre rationnel non nul (§3). Des variétés telles que les quotients de courbes modulaires fournissent des exemples où un tel lien existe (§4). Enfin cette théorie des régulateurs présente aussi un intérêt géométrique, indépendamment de ses applications arithmétiques (§1.4, 3.1 et 5.1).

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé à rédiger ce rapport.

Conventions

On écrira $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$ pour dire que X est une variété quasi-projective et lisse sur le corps des complexes. Sauf mention explicite du contraire, un faisceau sur $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$ est un faisceau sur l'espace topologique sous-jacent à X_{an}. On écrira $S \in \mathrm{Sch}$ pour dire que S est un schéma séparé, régulier et noethérien, de dimension de Krull finie. Enfin, quand m, k et n interviennent dans un énoncé, ce sont des entiers naturels vérifiant $m+k=2n$.

1. Cohomologie de Deligne-Beilinson

1.1. Si $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$ on note $\mathcal{O}_X = \Omega_X^o$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et $\Omega_X^\cdot$ le complexe de faisceaux des formes différentielles holomorphes sur X (muni de la différentielle extérieure). Celui-ci fournit une résolution

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_X^o \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \longrightarrow \dots$$

du faisceau constant $\mathbb{C}$. Si X est projective, ce que nous supposerons jusqu'au paragraphe 1.6, on note $F^n\Omega_X^\cdot \subset \Omega_X^\cdot$ le sous-complexe $\Omega_X^n \xrightarrow{d} \Omega_X^{n+1} \xrightarrow{d} \dots$ de $\Omega_X^\cdot$. La filtration de Hodge $F^nH^k(X,\mathbb{C}) \subset H^k(X,\mathbb{C})$ de la cohomologie complexe de X est l'image du groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, F^n\Omega_X^\cdot)$. On a aussi $F^nH^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{p+q=k \\ p\geq n}} H^{p,q}(X)$, où $H^{p,q}(X)$ désigne l'espace des classes de formes différentielles fermées de type (p,q) sur X [26].

Soit $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. On note $A(n)$ le sous-groupe $(2\pi i)^n A$ de $\mathbb{C}$ $(i^2=-1)$. Deligne (non publié, cf. [21]) définit un complexe de faisceaux

$$A(n)_{\mathcal{D}} = (A(n) \longrightarrow \Omega_X^o \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_X^{n-1}) \quad ,$$

où $A(n)$ est placé en degré 0 et Ω_X^p en degré $p+1$. On note $H_{\mathcal{D}}^k(X,A(n)) = \mathbb{H}^k(X,A(n)_{\mathcal{D}})$ l'hypercohomologie de ce complexe.

1.2. Du quasi-isomorphisme

$$\text{Cône}(A(n) \oplus F^n\Omega^\cdot_X \longrightarrow \Omega^\cdot_X)\ [-1] \longrightarrow A(n)_{\mathcal{D}}$$

résulte une suite exacte longue

$$\text{(E)} \qquad \ldots \longrightarrow H^{k-1}(X,A(n)) \oplus F^n\, H^{k-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{k-1}(X,\mathbb{C})$$
$$\longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n)) \longrightarrow H^k(X,A(n)) \oplus F^n\, H^k(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \ldots$$

Si on note $\alpha : H^\cdot(X,A(n)) \longrightarrow H^\cdot(X,\mathbb{C})$ le morphisme induit par l'inclusion de $A(n)$ dans $\mathbb{C}$, cette suite exacte s'écrit aussi

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(X,\mathbb{C})/(\alpha(H^{k-1}(X,A(n))) + F^nH^{k-1}(X,\mathbb{C})) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n))$$
$$\longrightarrow H^k(X,A(n)) \cap \alpha^{-1}(F^nH^k(X,\mathbb{C})) \longrightarrow 0 \quad .$$

1.3. <u>Exemples</u>

1.3.1. On a $H^k_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(0)) = H^k(X,\mathbb{Z})$ et $H^k_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(1)) = H^{k-1}(X,\mathcal{O}^*_X)$ (car l'exponentielle fournit un isomorphisme de $\mathbb{Z}(1)_{\mathcal{D}}$ avec $\mathcal{O}^*_X[-1]$).

1.3.2. Quand $A = \mathbb{Z}$ et $2n = k$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow J^n(X) \longrightarrow H^{2n}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n)) \cap \alpha^{-1}(H^{n,n}(X)) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $J^n(X) = H^{2n-1}(X,\mathbb{C})/(\alpha(H^{2n-1}(X,\mathbb{Z}(n))) \oplus F^n\, H^{2n-1}(X,\mathbb{C}))$ est la <u>jacobienne intermédiaire</u> de Griffiths [25] (c'est un groupe compact) . Quand $A = \mathbb{R}$ on trouve $H^{2n}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(n)) = H^{2n}(X,\mathbb{R}(n)) \cap H^{n,n}(X)$.

1.3.3. Notons p_n la projection de $H^\cdot(X,\mathbb{C})$ sur $H^\cdot(X,\mathbb{R}(n-1))$ associée à décomposition $\mathbb{C} = \mathbb{R}(n-1) \oplus \mathbb{R}(n)$. Si $2n > k$ nous utiliserons l'isomorphisme $H^k_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(n)) \simeq H^{k-1}(X,\mathbb{R}(n-1))\,/p_n(F^nH^{k-1}(X,\mathbb{C}))$. Par exemple $H^{2n-1}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(n)) = H^{2n-2}(X,\mathbb{R}(n-1)) \cap H^{n-1,n-1}(X)$.

1.3.4. Quand $n \geq k \geq 1$, on a $H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n)) = H^{k-1}(X,\mathbb{C}/A(n))$. Ainsi, pour $n > 0$, $H^k_{\mathcal{D}}(\text{Spec}\ \mathbb{C},\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{C}^*$ si $k = 1$ et 0 sinon. De même $H^k_{\mathcal{D}}(\text{Spec}\ \mathbb{C}\ ,\mathbb{R}(n)) = \mathbb{R}$ si $k = 1$ et 0 sinon.

1.4. <u>Classe fondamentale</u>

1.4.1. Si $S \in \text{Sch}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $S^{(n)}$ l'ensemble des points de S de codimension n et $Z^n(S)$ le groupe abélien libre engendré par $S^{(n)}$. Si $y \in S^{(n-1)}$ et si $f \in k(y)^*$ est une fonction rationnelle non nulle sur le schéma intègre $Y = \overline{\{y\}} \subset S$, on note $\text{div}(f) \in Z^n(S)$ le diviseur de f (cf. par exemple, [37], §7.5). Le <u>groupe de Chow</u> $CH^n(S)$ est le quotient de $Z^n(S)$ par le sous-groupe engendré par les éléments $\text{div}(f)$, $f \in k(y)^*$, $y \in S^{(n-1)}$.

1.4.2. Quand $X \in \text{Var}/\mathbb{C}$ est une variété projective, Deligne associe à toute sous-variété fermée intègre $Y \subset X$ de codimension n une classe fondamentale

$[Y] \in H^{2n}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(n))$. Cette classe ne dépend que de l'image de Y dans $CH^n(X)$. On en déduit un morphisme

$$c\ell_{\mathcal{D}} : CH^n(X) \longrightarrow H^{2n}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) .$$

Si $A^n(X)$ (resp. $B^n(X)$) désigne le noyau (resp. l'image) du morphisme de classe fondamentale ordinaire $CH^n(X) \longrightarrow H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n))$, on obtient ainsi un diagramme commutatif [21]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & CH^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "c\ell_{\mathcal{D}}"] & B^n(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^n(X) \arrow[r] & H^{2n}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] & H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n)) \cap \alpha^{-1}(H^{n,n}(X)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

L'application φ_n est dite d'Abel-Jacobi.

1.5. Produit

On peut définir un accouplement de complexes $\mu : A(n)_{\mathcal{D}} \underset{A}{\otimes} A(n')_{\mathcal{D}} \longrightarrow A(n+n')_{\mathcal{D}}$ de la façon suivante. Si x (resp. y) est une section d'un des faisceaux du complexe $A(n)_{\mathcal{D}}$ (resp. $A(n')_{\mathcal{D}}$) et si $\deg(x)$ (resp. $\deg(y)$) désigne son degré, on pose $\mu(x\otimes y) = xy$ si $\deg(x) = 0$, $\mu(x\otimes y) = x \wedge dy$ si $\deg(x) > 0$ et $\deg(y) = n' > 0$, et $\mu(x\otimes y) = 0$ sinon. Cet accouplement est associatif et commutatif à homotopie près. Il induit un cup-produit

$$H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n)) \underset{A}{\otimes} H^{k'}_{\mathcal{D}}(X,A(n')) \longrightarrow H^{k+k'}_{\mathcal{D}}(X,A(n+n')) .$$

1.6. Soit X une variété complexe quasi-projective sur $\mathbb{C}$ (éventuellement non compacte ou singulière), ou bien $X = (X.)$ un objet simplicial dans la catégorie de ces variétés. Deligne a défini une filtration $F^nH^k(X,\mathbb{C})$ de la cohomologie complexe de X [19]. Utilisant les mêmes méthodes, Beilinson définit des groupes $H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n))$. Ceux-ci s'insèrent dans une suite exacte (E) (1.2) et possèdent un cup-produit comme dans le cas lisse et compact . Si par exemple $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$ et si $u : X \longrightarrow \bar{X}$ est une compactification lisse de X telle que $Y = \bar{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux, notons $\Omega^{\cdot}_{\bar{X}}\langle Y\rangle$ le complexe de De Rham logarithmique de $\bar{X}$ le long de Y [19] . Le groupe
$H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n)) = H^k(\bar{X}, \mathrm{C\hat{o}ne}(Ru_*A(n) \oplus F^n\,\Omega^{\cdot}_{\bar{X}}\langle Y\rangle \longrightarrow Ru_*\,\Omega^{\cdot}_{X})[-1])$ ne dépend pas du choix de u . Si $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$, on montre que $H^1_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{Z}(1))$ est isomorphe au groupe $\mathcal{O}(X)^*_{\mathrm{alg}}$ des fonctions régulières inversibles sur X .

Les groupes $H^k_{\mathcal{D}}(X,A(n))$ ont une variante à supports $K^k_{\mathcal{D},Y}(X,A(n))$ (où $Y \subset X$ est une immersion fermée). On peut aussi (en remplaçant les formes par les courants) définir des groupes d'homologie $H_k^{\mathcal{D}}(X,A(n))$. Ceux-ci forment avec la cohomologie à supports une théorie à "dualité de Poincaré" avec coefficients tordus, satisfaisant aux axiomes de [12] (cf. [3], [4] et [22]).

2. Classes de Chern

2.1. K-théorie :

A tout anneau unitaire R, Quillen [36] associe une suite de groupes abéliens $K_m(R)$, $m \geq 0$. Quand $m \geq 1$, $K_m(R) = \pi_m \, BGL(R)^+$ est le m-ième groupe d'homotopie d'un H-espace $BGL(R)^+$ dont l'homologie est celle du groupe linéaire infini $GL(R) = \bigcup_{N \geq 1} GL_N(R)$. Si S est un schéma, Quillen définit aussi des groupes $K_m(S)$, $m \geq 0$, égaux à $K_m(R)$ quand $S = \mathrm{Spec}(R)$ est affine. Le groupe $K_o(S)$ est le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels sur S [27]. On dispose d'un produit (anti-commutatif) $K_m(S) \times K_{m'}(S) \longrightarrow K_{m+m'}(S)$. Si F est un corps on a $K_o(F) = \mathbb{Z}$ et $K_1(F) = F^*$.
Quand $S \in Sch$, il existe une suite spectrale $E_r^{pq}(S)$ convergeant vers $K_{-p-q}(S)$ et telle que $E_1^{pq}(S) = \bigoplus_{x \in S^{(p)}} K_{-p-q}(k(x))$. Le morphisme $d_1 : E_1^{n-1,-n}(S) \longrightarrow E_1^{n,-n}(S) = Z^n(S)$ associe à $f \in k(y)^*$, $y \in S^{(n-1)}$, son diviseur $\mathrm{div}(f)$. Donc $E_2^{n,-n}(S) = CH^n(S)$, et $E_2^{n-1,-n}(S)$ est engendré par les familles finies (f_α), où $f_\alpha \in k(y_\alpha)^*$, $y_\alpha \in S^{(n-1)}$ et $\sum_\alpha \mathrm{div}(f_\alpha) = 0$.

2.2 Soit $BGL_{N/\mathbb{C}}$ le schéma simplicial classifiant du groupe $GL_{N/C}$ (égal à $GL^p_{N/\mathbb{C}}$ en degré p, avec les faces et dégénérescences usuelles).

PROPOSITION.- *Si* $n \geq 0$, *le morphisme*

$$\varepsilon : H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL_{N/\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^{2n}(BGL_{N/\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(n))$$

est un isomorphisme.

Ceci résulte de la suite exacte (E), du calcul de la cohomologie entière de $BGL_{N/\mathbb{C}}$ et de celui de la filtration de Hodge de sa cohomologie complexe [19]. Appelons $c_n \in H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL_{N/\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(n))$ l'élément dont l'image par ε est la n-ième classe de Chern ordinaire du fibré canonique sur $BGL_{N/\mathbb{C}}$.

2.3. Si $X = \mathrm{Spec}(R)$, où R est une $\mathbb{C}$-algèbre, on dispose d'un morphisme de schémas simpliciaux (donné par évaluation) :

$$e : X \times BGL_N(R) \longrightarrow BGL_{N/\mathbb{C}} .$$

Quand $m + k = 2n$ (comme convenu !), la classe $e^*(c_n) \in H_{\mathcal{D}}^{2n}(X \times BGL_N(R), \mathbb{Z}(n))$ induit (à cause de la formule de Künneth) un morphisme $H_m(GL_N(R), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^k(X, \mathbb{Z}(n))$, qui est compatible à la restriction de GL_N à à GL_{N-1}. Si $m \geq 1$, on note

$$c_{n,k} : K_m(X) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(n)) \qquad (m+k = 2n)$$

son composé avec le morphisme d'Hurewicz $K_m(X) \longrightarrow H_m(BGL(R), \mathbb{Z})$ de l'espace $BGL(R)^+$.

Quand $X \in Var/\mathbb{C}$ et $m \geq 0$, le groupe $K_m(X)$ se calcule à partir du faisceau simplicial associé à $U \longmapsto \mathbb{Z} \times BGL(\Gamma(U, \mathcal{O}_{X,alg}))^+$. Cela permet d'étendre à ce cas la définition des classes de Chern $c_{n,k}$ [23].

2.4. Si $\mathbb{Q} \subset A$ posons $ch_{n,k}(x) = ((-1)^{n-1}/(n-1)!) c_{n,k}(x)$ quand $m > 0$, $ch_{n,2n}(x) = N_n(c_{j,2j}(x))/n!$, où N_n est le n-ième polynôme de Newton, si $n > 0$, et $ch_{o,o}(x) = \text{rang}(x)$. Si $ch = \sum_{n,k} ch_{n,k}$ on a alors $ch(xy) = ch(x)ch(y)$ et ch vérifie un théorème de Riemann-Roch de la forme

$$ch(f_*(x))Td(Y) = f_*(ch(x).Td(X)),$$

où f_* est le morphisme d'image directe associé à un morphisme projectif $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés de $Var/\mathbb{C}$, et $Td(X)$ (resp. $Td(Y)$) les classes de Todd de ces variétés [23].

2.5. Quand $S \in Sch$, les groupes $K_m(S)$ sont munis d'opérations d'Adams $\psi^r : K_m(S) \longrightarrow K_m(S)$ pour tout entier $r \geq 1$ ([3], [43]). Elles vérifient $\psi^1(x) = x$, $\psi^r(x+y) = \psi^r(x) + \psi^r(y)$, $\psi^r(xy) = \psi^r(x)\psi^r(y)$, $\psi^r \circ \psi^s = \psi^{rs}$. Si $K_m(S)^{(n)}$ est le sous-groupe de $K_m(S) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ où les ψ^r, $r \geq 1$, opèrent par multiplication par r^n, on a

$$K_m(S) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} = \bigoplus_{n \geq 0} K_m(S)^{(n)} .$$

Beilinson appelle "cohomologie motivique" les groupes

$$H^k_{\mathcal{M}}(S, \mathbb{Q}(n)) = K_m(S)^{(n)} \qquad (m+k = 2n) .$$

Sous les hypothèses de 2.4, plusieurs morphismes $ch_{n,k}$ partent d'un même groupe $K_m(X)$. Mais la formule $ch_{n,k}(\psi^r(x)) = r^n ch_{n,k}(x)$ montre que la restriction de $ch_{n,k}$ à $K_m(X)^{(n')}$ est nulle si $n' \neq n$. Il suffit donc de considérer les morphismes .

$$ch_{n,k} : H^k_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n)) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X, A(n)) .$$

2.7. <u>Exemples</u>

2.7.1. Quand $X \in Var/\mathbb{C}$ le morphisme $c_{1,1} : K_1(X) \longrightarrow H^1_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(1)) = \mathcal{O}(X)^*_{alg}$ est surjectif et scindé (c'est le déterminant).

2.7.2. Si $S \in Sch$, l'action des opérations d'Adams sur la suite spectrale $E^{pq}_r(S)$ (cf.2.1) montre que

$$K_0(S)^{(n)} = H_{\mathcal{M}}^{2n}(S,\mathbb{Q}(n)) = CH^n(S) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$$

et que $K_1(S)^{(n)} = H_{\mathcal{M}}^{2n-1}(S,\mathbb{Q}(n)) = E_2^{n-1,-n}(S) \otimes \mathbb{Q}$ [43].

Supposons que $X \in \mathrm{Var}/\mathbb{C}$ est projective. Le morphisme

$$ch_{n,2n} : CH^n(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^{2n}(X,\mathbb{R}(n))$$

est alors la classe fondamentale (cf.1.4.2). Si $Y \subset X$ est une sous-variété fermée intègre de codimension $n-1$, Y^o son ouvert de lissité et $f \in \mathbb{C}(Y)^*$, notons $\log|f|$ le courant défini par la formule

$$(\log|f|)(\omega) = \int_{Y^o} \log|f| \wedge\omega \ .$$

Si δ_Z désigne le courant d'intégration sur un cycle Z on a $\partial\bar\partial \log|f| = -\pi i\delta_{\mathrm{div}(f)}$ [26]. Le morphisme

$$ch_{n,2n-1} : E_2^{n-1,-n}(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^{2n-1}(X,\mathbb{R}(n)) = H^{2n-2}(X,\mathbb{R}(n)) \cap H^{n-1,n-1}(X)$$

(cf.1.3.3) associe à la famille (f_α) (où $f_\alpha \in \mathbb{C}(Y_\alpha)^*$, $\mathrm{codim}_X(Y_\alpha) = n-1$ et $\sum_\alpha \mathrm{div}(f_\alpha) = 0$) la classe du courant $\sum_\alpha \log|f_\alpha|$ dans $\mathrm{Ker}(\partial\bar\partial)/\mathrm{Im}(\partial) + \mathrm{Im}(\bar\partial)$.

2.7.3. Soient X une courbe lisse sur $\mathbb{C}$, f et $g \in \mathcal{O}(X)^*_{\mathrm{alg}}$ deux fonctions et $f.g \in K_2(X)$ le produit des éléments associés à f et g dans $K_1(X)$ (2.7.1). Le "symbole" $ch_{2,2}(f.g) = c_{1,1}(f) \cup c_{1,1}(g)$ dans $H_{\mathcal{D}}^2(X,\mathbb{Z}(2)) \simeq H^1(X,\mathbb{C}^*)$ fut d'abord introduit par Bloch [7]. C'est la classe d'isomorphisme d'un fibré inversible muni d'une connexion (intégrable) décrit par Deligne (non publié) et Bloch [8].

2.7.4. Quand $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ et $A = \mathbb{Z}$ on obtient des morphismes $c_{n,1} : K_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Quand $A = \mathbb{R}$, le morphisme $c_{n,1} : K_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ s'obtient aussi de la façon suivante. Dans le groupe de cohomologie continue $H^{2n-1}_{\mathrm{cont}}(GL_N(\mathbb{C}),\mathbb{R})$ du groupe localement compact $GL_N(\mathbb{C})$, $n \leq N$, Borel définit un élément indécomposable canonique [14], de façon compatible à la restriction à $GL_{N-1}(\mathbb{C})$. L'image de cet élément dans la cohomologie du groupe discret $GL_N(\mathbb{C})$ définit donc un morphisme $H_{2n-1}(GL(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Son composé avec le morphisme d'Hurewicz de $BGL(\mathbb{C})^+$ est la classe $c_{n,1}$ [3].

3. Les conjectures

3.1. Une variante de la conjecture de Hodge

Soient X une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$, $n \geq 0$ un entier, et $A = \mathbb{R}$. La conjecture de Hodge affirme que l'image de $K_0(X)^{(n)}$ par $ch_{n,2n}$ est égale à $H^{2n}(X,\mathbb{Q}(n)) \cap H^{n,n}(X)$. Par contre l'image de $K_1(X)^{(n)}$ par $ch_{n+1,2n+1}$ est un sous-espace vectoriel réel de $H^{2n}(X,\mathbb{R}(n)) \cap H^{n,n}(X)$ (2.7.2.). Beilinson pense que $ch_{n+1,2n+1}$ est surjectif :

Conjecture 1 [3].- *Tout élément de* $H^{2n}(X,\mathbb{R}(n)) \cap H^{n,n}(X)$ *est la classe d'un courant* $\sum_\alpha \log|f_\alpha|$ *du type considéré en* 2.7.2.

3.2. Fonctions L : Soit V une variété projective et lisse sur $\mathbb{Q}$. Si $k \geq 1$ on désigne par $L_{k-1}(V,s)$ la fonction L associée à l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupes de cohomologie ℓ-adique $H^{k-1}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}_\ell)$ [42]. Cette fonction de la variable complexe s est définie par un produit eulérien qui converge si $\mathrm{Re}(s)$ est assez grand. Serre conjecture [42] que $L_{k-1}(V,s)$ admet un prolongement analytique au plan complexe, non nul si $\mathrm{Re}(s) > (k+1)/2$, et qu'une équation fonctionnelle relie ses valeurs en s et $k-s$.

3.3. Régulateurs

Si V est comme ci-dessus on note $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (resp. $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$) la variété réelle (resp. complexe) obtenue à partir de V par extension des scalaires. La conjugaison complexe $F_\infty \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ agit sur le couple $(V_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}})$ et donc sur le groupe de cohomologie $H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(n))$. Notons $H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$ le sous-espace invariant par F_∞. Le caractère de Chern de $V_{\mathbb{C}}$ commute à l'action de F_∞ et induit donc un morphisme

$$ch_{n,k} : H^k_{\mathcal{M}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{Q}(n)) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) .$$

Par ailleurs, on fait l'hypothèse suivante : V admet un modèle régulier $V_{\mathbb{Z}}$, propre et plat sur $\mathbb{Z}$. On peut alors montrer que l'image $H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}}$ de $H^k_{\mathcal{M}}(V_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}(n))$ dans $H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n))$ ne dépend pas du choix du modèle $V_{\mathbb{Z}}$ ([3], §2.4.2.).

Soit $B^n(V)$ (resp. $A^n(V)$) l'image (resp. le noyau) du morphisme $CH^n(V) \longrightarrow H^{2n}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}(b))$. Si $m \geq 2$ notons

$$\rho_{n,k} : H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$$

le composé du morphisme induit par $V \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$ avec le caractère de Chern $ch_{n,k}$. Si $m = 1$, notons

$$\rho_{n,k} : H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \oplus (B^{n-1}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$$

la somme du morphisme précédent avec l'inclusion évidente (1.3.3). Les morphismes $\rho_{n,k}$ sont les applications régulateurs de V.

Conjecture 2.-

i) [2] *Les groupes* $H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n)_{\mathbb{Z}}$ *sont de dimension finie sur* $\mathbb{Q}$

ii) [3] *Si* $m = 2n-k \geq 1$ *le morphisme* $\rho_{n,k}$ *est injectif et son image est une*

$\mathbb{Q}$-structure de $H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$ *. De plus la dimension de* $H^k_{\mathcal{M}}(V,\mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}}$ *est égale à l'ordre du zéro de* $L_{k-1}(V,s)$ *en* $s=k-n$.

iii) ([3], [9]) *L'ordre du zéro de* $L_{2n-1}(V,s)$ *en* $s=n$ *est égal à la dimension de* $A^n(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

3.4. Quand W est un espace vectoriel sur un corps K , on note $\text{dét}_K(W)$ (resp. $\text{dét}^*_K(W)$) la puissance extérieure maximale de W (resp. de son dual). Quand $m \geq 1$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension un

$$\text{dét}_{\mathbb{R}} H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) = \text{dét}_{\mathbb{R}} H^{k-1}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(n-1))^+ \otimes \text{dét}^*_{\mathbb{R}} p_n(F^n H^{k-1}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{C})^+$$

(cf.(1.3.2); $(.)^+$ désigne les invariants pour l'action de F_∞) admet pour $\mathbb{Q}$-structure

$$\Phi_{n,k} = \text{dét}_{\mathbb{Q}} H^{k-1}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}(n-1))^+ \otimes \text{dét}^*_{\mathbb{Q}} p_n(F^n H^{k-1}_{DR}(V)) ,$$

où $H^{\cdot}_{DR}$ désigne la cohomologie de De Rham algébrique.

Appelons $\lambda_{n,k}$ le coefficient du premier terme non nul du développement de Taylor de $L_{k-1}(V,s)$ en $s=k-n$.

Conjecture 3 [3] : *Si* $2n-k \geq 1$ *, on a, dans* $\text{dét}_{\mathbb{R}} H^k_{\mathcal{D}}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$,

$$\text{dét}_{\mathbb{Q}}(\text{Image}(\rho_{n,k})) = \lambda_{n,k}\, \Phi_{n,k} .$$

En ce qui concerne $\lambda_{n,2n}$, voir [6] et [11]. Les conjectures 2 et 3 prolongent celles de Birch, Swinnerton-Dyer [44], et Tate [45]. Elles s'étendent aux motifs à coefficients dans un corps de nombres ([20], [3]).

4. Résultats

4.1. Corps de nombres

4.1.1. Les résultats de Quillen [38] et de Borel [13][14] montrent (compte tenu de 2.7.4) que les conjectures 2 et 3 sont vérifiées quand V est le spectre d'un corps de nombres.

4.1.2. Soient $F=\mathbb{Q}(\mu_N)$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ par les racines N-ièmes de l'unité et $G=\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois. A tout caractère $\chi : G \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^*$ du groupe G est associé un caractère de Dirichlet (primitif) $\underline{\chi} : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^*$. Si E est l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par les valeurs de χ , on note $L(\chi,s) \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ la fonction L de Dirichlet, obtenue par prolongement analytique de la série $L(\chi,s) = \sum_{a\geq 1} a^{-s} \otimes \underline{\chi}(a)$, $\text{Re}(s) > 1$.

Fixons un entier $n \geq 2$, et appelons $K_{2n-1}(\chi^{-1})$ (resp. $H^1_{\mathcal{D}}(\chi^{-1},\mathbb{R}(n))$ le sous-espace propre de $K_{2n-1}(F) \otimes_{\mathbb{Q}} E$ (resp. $H^1_{\mathcal{D}}(\text{Spec}(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) , \mathbb{R}(n)) \otimes_{\mathbb{Q}} E)$

associé au caractère χ^{-1}. On a $H^1_{\mathcal{D}}(\chi^{-1}, \mathbb{R}(n)) = \mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} E$ si $\chi(-1) = (-1)^{n-1}$ et zéro sinon. Le régulateur définit donc un morphisme $\rho_{n,1} : K_{2n-1}(\chi^{-1}) \longrightarrow \mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} E$ si $\chi(-1) = (-1)^{n-1}$.

THÉORÈME [3]: *On a, dans* $\mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} E$,

$$\rho_{n,1}(K_{2n-1}(\chi^{-1})) = L(\chi, 1-n).E \quad .$$

Ce résultat (dû à Bloch, Gross et Wigner quand $n=2$) s'obtient en construisant un morphisme de G-ensembles $u_n : \mu_N \longrightarrow K_{2n-1}(F) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ ayant la propriété suivante. Si l'on pose

$$\ell_n(z) = \sum_{a \geq 1} z^a a^{-n} \quad \text{si} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad |z| \leq 1 \quad ,$$

si $\sigma : F \longrightarrow \mathbb{C}$ est un plongement complexe de F, et si $\xi \subset \mu_N$, on a, quand $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ et $A = \mathbb{R}$,

$$ch_{n,1}(\sigma_*(u_n(\xi))) = \pi^{-n+1} \, \mathrm{Im}\ell_n(\sigma(\xi)) \quad \text{quand } n \text{ est pair, et}$$

$$ch_{n,1}(\sigma_*(u_n(\xi))) = \pi^{-n+1} \, \mathrm{Re}\ell_n(\sigma(\xi)) \quad \text{quand } n \text{ est impair.}$$

Les éléments $u_n(\xi)$ sont des analogues supérieurs des unités cyclotomiques. Ils vérifient la relation de distribution (au sens de Kubert-Lang)

$$u_n(\xi^M) = M^{n-1} \sum_{\eta^M = 1} u_n(\xi\eta) \quad \text{si } M \text{ divise } N \quad .$$

4.2. Courbes elliptiques et modulaires

4.2.1. Sous les hypothèses de 3.4, on notera $R(V,n,k)$ l'énoncé suivant : il existe un sous-espace Σ de l'image de $\rho_{n,k}$ tel que $\mathrm{dét}_{\mathbb{Q}}(\Sigma) = \lambda_{n,k} \, \Phi_{n,k}$.

4.2.2. Soient V une courbe projective et lisse sur un corps de nombres F et $P \subset V$ un ensemble fini de points fermés, rationnels sur F, tels que la classe $x - y$ soit de torsion dans la jacobienne quand x et y sont deux points de P appartenant à la même composante de V. En utilisant la suite exacte [37]

$$K_3(V-P) \longrightarrow \bigoplus_{x \in P} K_2(k(x)) \longrightarrow K_2(V) \longrightarrow K_2(V-P) \longrightarrow \bigoplus_{x \in P} K_1(k(x))$$

on montre que $K_2(V-P) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ est somme directe de $K_2(V) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ et du sous-espace engendré par les produits $a.f$ où $a \in F^*$ et $f \in \mathcal{O}(V-P)^*$. Si f et $g \in \mathcal{O}(V-P)^*$, le produit $f.g \in K_2(V-P)$ se projette donc en un élément $S(f,g)$ de $K_2(V)^{(2)} = H^2_{\mathcal{M}}(V, \mathbb{Q}(2))$. Si l'on suppose que $S(f,g)$ provient d'un modèle régulier sur $\mathbb{Z}$ (cf. 3.3), son image par le régulateur est un élément $\rho_{2,2}(S(f,g))$ de $H^1(V_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(1))^+$. Si $\omega \in \Omega^1(V_{\mathbb{R}})$, les formules pour le produit en cohomologie de Deligne-Beilinson (1.5, et [3]) montrent que

$$(2\pi i)^{-1}\int_{V_{\mathbb{C}}} \rho_{2,2}(S(f,g))\wedge\omega = (2\pi i)^{-1}\int_{V_{\mathbb{C}}} \log|f|\ d\log(\bar{g})\wedge\omega\ .$$

On note $I(f,g,\omega)$ cette intégrale.

4.2.3. Si V est une courbe elliptique E , le choix de ω telle que $\int_{E(\mathbb{C})} \bar{\omega}\wedge\omega = 1$ fournit un isomorphisme $E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/W$, où W est un réseau de rang deux et de volume un. Si $\operatorname{div}(f) = \sum_i n_i x_i$ et $\operatorname{div}(g) = \sum_j m_j y_j$ $(n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ et $x_i, y_j \in E(\mathbb{C}))$ on trouve (sous les hypothèses de 4.2.2), en utilisant l'analyse de Fourier sur $\mathbb{C}/W$,

$$I(f,g,\omega) = \sum_{i,j} n_i m_j \sum_{w\in W-\{0\}} \exp((\bar{x}_i - \bar{y}_j)w - (x_i - y_j)\bar{w})w^{-2}\bar{w}^{-1}\ .$$

Quand E est une courbe elliptique à multiplication complexe définie sur $\mathbb{Q}$, Bloch en déduit $R(E,2,2)$ [7].

4.2.4. Soient $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$) l'anneau des adèles (resp. des adèles finis) de $\mathbb{Q}$, $GL_2(\mathbb{A})$ (resp. $GL_2(\mathbb{A}_f)$) le groupe des points de GL_2 dans cet anneau, $K \subset GL_2(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert, et K_∞ le produit de $O_2(\mathbb{R})$ par le centre de $GL_2(\mathbb{R})$. L'ensemble

$$M_K(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/K_\infty K$$

est une réunion finie de quotients du demi-plan de Poincaré par des sous-groupes arithmétiques de $GL_2(\mathbb{Q})$. Il constitue l'ensemble des points complexes d'une courbe M_K définie sur $\mathbb{Q}$. On note $\bar{M}_K$ la compactification lisse de M_K . Parmi les courbes $\bar{M}_K$ figure la courbe modulaire $X_0(N)$ associée au sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ de $SL_2(\mathbb{Z})$, $N \geq 1$.

THÉORÈME [3] [5] : *L'énoncé* $R(\bar{M}_K, n, k)$ *est vrai pour toute valeur de* n *et* k *telle que* $m = 2n - k \geq 1$.

Donnons des éléments de la démonstration quand $n = k = 2$. Si $K' \subset K$ est un sous-groupe ouvert de K , on dispose de projections finies $M_{K'} \longrightarrow M_K$ et $\bar{M}_{K'} \longrightarrow \bar{M}_K$. On pose $M = \varprojlim_K M_K$, $\bar{M} = \varprojlim_K \bar{M}_K$ et $H^\cdot(\bar{M}) = \varinjlim_K H^\cdot(\bar{M}_K)$ quand $H^\cdot(\bar{M}_K) = H^2_{\mathcal{M}}(\bar{M}_K, \mathbb{Q}(2))$, $H^2_{\mathcal{D}}(\bar{M}_{K,\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$ ou $H^1(\bar{M}_K \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Le groupe $GL_2(\mathbb{A}_f)$ opère sur $H^\cdot(\bar{M})$ et $H^\cdot(\bar{M}_K)$ est le sous-espace invariant par K . Quand σ est une $\bar{\mathbb{Q}}$-représentation de dimension finie on pose $H^\cdot(\bar{M}_\sigma) = \operatorname{Hom}_{GL_2(\mathbb{A}_f)}(\sigma, H^\cdot(\bar{M}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$. Soit Σ l'ensemble des composantes irréductibles de l'action de $GL_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\Omega^1(\bar{M}) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$; on sait qu'elles ont multiplicité un. On montre que les morphismes de $GL_2(\mathbb{A}_f)$-modules

$$\bigoplus_{\sigma\in\Sigma} H^2_{\mathcal{M}}(\bar{M}_\sigma, \mathbb{Q}(2)) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \sigma \longrightarrow H^2_{\mathcal{M}}(\bar{M}, \mathbb{Q}(2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$$

$$\text{et} \quad \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} H^2_{\mathcal{D}}(\bar{M}_\sigma, \mathbb{R}(2)) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \sigma \longrightarrow H^2_{\mathcal{D}}(\bar{M}, \mathbb{R}(2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$$

sont des isomorphismes. De même, si $L(\overline{M}_\sigma,s)$ désigne la fonction L associée à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbb{A}_f)}(\sigma,H^1(\overline{M}\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ et $m(K,\sigma)$ la dimension du sous-espace de σ invariant par K, la fonction $L_1(\overline{M}_K,\sigma)$ est le produit des fonctions $L(\overline{M}_\sigma,s)^{m(K,\sigma)}$, $\sigma\in\Sigma$. Il suffit donc d'exprimer, pour toute $\sigma\in\Sigma$, la valeur en zéro de la dérivée de $L(\overline{M}_\sigma,s)$ à l'aide du régulateur

$$H^2_{\mathcal{M}}(\overline{M}_\sigma,\mathbb{Q}(2)) \longrightarrow H^2_{\mathcal{D}}(\overline{M}_\sigma,\mathbb{R}(2)) .$$

D'après un résultat de Manin et Drinfeld [34], la différence de deux pointes d'une courbe modulaire est toujours de torsion dans sa jacobienne. Cela permet d'appliquer la construction de 4.2.2 quand $f,g\in\mathcal{O}(M)^*$ sont deux unités modulaires. L'élément $S(f,g)$ provient alors du modèle $M_{\mathbb{Z}}$ de M introduit par Drinfeld [31]; Beilinson montre en effet que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{O}(M)^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ est engendré par $\mathcal{O}(M_{\mathbb{Z}})^*$ et par les fonctions localement constantes inversibles sur M.

Par ailleurs, si $\sigma\in\Sigma$, on sait que σ est la composante finie d'une unique représentation irréductible de $GL_2(\mathbb{A})$ associée à une forme automorphe parabolique de poids deux. On note $L(\sigma,s)$ la fonction L associée à cette forme automorphe, normalisée de telle sorte que son équation fonctionnelle relie ses valeurs à celles de $L(\sigma^*,2-s)$, où σ^* désigne la représentation contragrédiente de σ. On sait, d'après Langlands [32], Deligne, et Carayol [15], que $L(\overline{M}_\sigma,s) = L(\sigma^*,s)$. Il suffit donc de voir que si $\omega\in\sigma$ et $f,g\in\mathcal{O}(M)^*$, l'intégrale $I(f,g,\omega)$ est dans le sous-espace $L^{(1)}(\sigma^*,0).\Omega.\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$, où Ω est la période positive de ω, et que, quelle que soit $\sigma\in\Sigma$, on peut trouver ω, f et g de sorte que $I(f,g,\omega)$ soit non nulle.

Mais $d\log(f)$ et $d\log(g)$ (resp. ω) sont les formes différentielles associées à des séries d'Eisenstein (resp. à une forme parabolique) holomorphes de poids deux. Cela permet de calculer $I(f,g,\omega)$ par la méthode de Rankin [29]. On peut supposer pour cela que $d\log(g)$ est vecteur propre des opérateurs de Hecke T_p, avec pour valeur propre $1+\chi(p)p$, où χ est un caractère de Dirichlet. Si $\varepsilon(\chi.\omega(\sigma))$ désigne le facteur ε du produit de χ par le caractère central de σ, on trouve que $I(f,g,\omega)$ appartient à

$$\pi^{-2}\,\varepsilon(\chi.\omega(\sigma))^{-1}\,L(\sigma\otimes(\chi\circ \det),1)\,L(\sigma,2)\overline{\mathbb{Q}} ,$$

et que cette intégrale est non nulle pour un choix convenable de χ, f et ω. On conclut en utilisant l'équation fonctionnelle de $L(\sigma,s)$ et le fait que $L(\sigma\otimes(\chi\circ\det),1)$ est multiple de Ω par un nombre algébrique (voir [3], §5). Le cas où $m>2$ utilise les formes modulaires de poids supérieur à deux [5].

4.3. Autres résultats

L'énoncé $R(V,n,k)$ est démontré quand $n=1$, $k=3$ et V est un produit de deux courbes modulaires (Bloch et Beilinson [3]) ou une surface de Hilbert-Blumenthal ([28], [40]) ; la conjecture 1 en résulte pour la surface $V_{\mathbb{C}}$. Le théorème de 4.2 et la correspondance de Jacquet-Langlands [30] permettent de montrer $R(V,n,k)$ quand V est une courbe de Shimura sur $\mathbb{Q}$ et $2n-k \geq 1$ [39]. Concernant la conjecture 2, iii) (avec $n=2$), Bloch exhibe dans [9] et [10] des variétés V de dimension trois telles que $L_3(V,2) = 0$ et $A^2(V) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \neq 0$.

5. Compléments

5.1. Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm

5.1.1. Les morphismes $K_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $n \geq 1$ (2.7.4) ont des analogues pour toute $\mathbb{C}$-algèbre A (non nécessairement commutative) [17]. Si H est un espace Hilbertien à base dénombrable (ils sont tous isomorphes) et $p \geq 1$ un entier, appelons $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés dans H et $\mathcal{L}^p(H) \subset \mathcal{L}(H)$ l'idéal formé des opérateurs T tels que $\mathrm{Trace}(|T|^p) < +\infty$. Si p est pair (resp. impair) on note M^p l'algèbre formée des couples $(x,y) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H)$ tels que $x-y \in \mathcal{L}^{p+1}(H)$ (resp. des matrices $(a_{ij}) \in M_2(\mathcal{L}(H))$ telles que $a_{ij} \in \mathcal{L}^{p+1}(H)$ si $i \neq j$) . Connes et Karoubi définissent un morphisme $K_{p+1}(M^p) \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Cela permet d'associer à tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\rho : A \longrightarrow M^p$ un morphisme de groupes $K_{p+1}(A) \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Un tel morphisme ρ est donné par une classe d'équivalence de A-modules de Fredholm p-sommables au sens de [16].

5.1.2. Exemples

Si $A = C^\infty(S^1)$ la décomposition $L^2(S^1) = H_+ \oplus H_-$, où H_+ (resp. H_-) est engendré topologiquement par les monômes z^k, avec $k \geq 0$ (resp. $k < 0$), fournit un A-module de Fredholm 1-sommable [41]. On en déduit un morphisme $K_2\,(C^\infty(S^1)) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, i.e. une extension centrale de $SL(C^\infty(S^1))$ par $\mathbb{C}^*$ [41].

Si $A = C^\infty(S^3)$, l'opérateur de Dirac permet de définir un A-module de Fredholm 3-sommable [16], d'où un morphisme $K_4(C^\infty(S^3)) \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

5.2. Théorie d'Arakelov

Reprenant les notations de 3.3, appelons $\bar{Z}^n(V_{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des couples (Z,u) où $Z \in Z^n(V_{\mathbb{Z}})$ et u est un courant réel de type $(n-1,n-1)$ sur $V_{\mathbb{C}}$ tel que $F_\infty(u) = (-1)^{n-1}u$ et $\partial\bar\partial(u) = \pi i\, \delta_{Z_{\mathbb{C}}}$. Notons $\overline{CH}^n(V_{\mathbb{Z}})$ le quotient de $\bar{Z}^n(V_{\mathbb{Z}})$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(\mathrm{div}(f), -\log|f| + \partial v + \bar\partial w)$ où $f \in k(y)^*$ et $y \in V_{\mathbb{Z}}^{(n-1)}$. De 2.7.2 on tire la suite exacte

$$E_2^{n-1,-n}(V_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\rho_{n,2n-1}} H_{\mathcal{D}}^{2n-1}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n)) \longrightarrow \overline{CH}^n(V_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow CH^n(V_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\rho_{n,2n}} H_{\mathcal{D}}^{2n}(V_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(n))$$

(voir aussi [1] [35] [24] [6]) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.J ARAKELOV, *Intersection Theory of Divisors on an Arithmetic Surface*, Math. USSR Izvestija 8 (1974), pp.1167-1180.

[2] H. BASS, *Some problems in "classical" algebraic K-theory*, Springer Lecture Notes in Maths. 342 (1973), pp. 3-73.

[3] A-A.BEILINSON, *Régulateurs supérieurs et valeurs de fonctions* L , Sovremennye Problemy Matematiki, 24, Moscou, VINITI (1984), pp.181-238 (en russe).

[4] A-A.BEILINSON, *Notes on absolute Hodge cohomology*, prépublication (1983).

[5] A-A.BEILINSON, *Higher regulators of modular curves*, prépublication (1984).

[6] A-A.BEILINSON, *Height pairing between algebraic cycles*, prépublication (1984).

[7] S. BLOCH, *Lectures on Algebraic cycles*, Duke Univ. Maths. Series IV (1980).

[8] S. BLOCH, *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, Springer Lecture Notes in Maths 854 (1981), pp. 1-23.

[9] S. BLOCH, *Algebraic cycles and values of L-functions* I, J. Reine Angew. Math. 350 (1984), pp. 94-108.

[10] S. BLOCH, *Algebraic cycles and values of L-functions* II, à paraître.

[11] S. BLOCH, *Height pairings for algebraic cycles*, à paraître dans Journal of Pure and applied Algebra (1984).

[12] S. BLOCH et A. OGUS, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 7 (1974) pp. 181-202.

[13] A. BOREL, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 7 (1974), pp. 235-272.

[14] A. BOREL, *Cohomologie de* SL_n *et valeurs de fonctions zêta*, Ann. Scuola Normale Superiore , Ser.4, 7 (1974), pp. 613-636.

[15] H. CARAYOL, *Sur les représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires de Hilbert*, à paraître dans Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.

[16] A. CONNES, *Non commutative differential geometry*, Part I, prépublication I.H.E.S (1982, revu en 1984).

[17] A. CONNES et M. KAROUBI, *Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm*, Note aux C.R.A.S (Décembre 1984).

[18] R. DEDEKIND, Supplément XI, §178 à "*Zahlentheorie*" de Lejeune-Dirichlet (1880).

[19] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge* II *et* III, Publ. Math. I.H.E.S, 40 (1971) pp. 5-58 et 44 (1974) pp. 5-77.

[20] P. DELIGNE, *Périodes d'intégrales et valeurs de fonctions* L , dans Proc. Symp. Pure Math., A.M.S, n°33, vol.2 (1979), pp. 313-346.

[21] F. EL ZEIN et S. ZUCKER, *Extendability of normal functions associated to Algebraic cycles*, in Griffiths P. : Topics in Algebraic Geometry, Chap. X, Annals of Maths. studies 106 (1984), Princeton University Press.

[22] H. GILLET, *Deligne homology and Abel-Jacobi maps*, Bulletin Am.Math. Soc. Vol.10, n°2 (1984), pp.285-288.

[23] H. GILLET, *Riemann-Roch Theorems for Higher Algebraic* K-*theory*, Advances in Maths. vol.40, n°3 (1981), pp.203-289.

[24] H. GILLET et C. SOULÉ, *Intersection sur les variétés d'Arakelov*, Note aux C.R.A.S, t.299, série I, n°12 (1984), pp.563-566.

[25] P. GRIFFITHS et W. SCHMID , *Recent developments in Hodge Theory*, Proceedings of the International Colloquium on Discrete subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli, Bombay, 1973, Oxford University Press(1975), pp.31-128.

[26] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry* (1978), John Wiley and Sons.

[27] A. GROTHENDIECK et al., *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer Lect. Notes in Maths. 225, SGA VI (1971).

[28] G. HARDER, R.P.LANGLANDS et M. RAPOPORT, *AlgebraicheZykeln auf Hilbert-Blumenthal Fläche* (1983), prépublication.

[29] H. JACQUET, *Automorphic forms on* GL_2 - part II, Springer Lecture Notes in Maths. 278 (1972).

[30] H. JACQUET et R.P. LANGLANDS, *Automorphic forms on* GL(2), Springer Lecture Notes in Maths. 114 (1970).

[31] N. KATZ et B. MAZUR, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, à paraître dans Princeton Annals of Maths. Studies.

[32] R.P. LANGLANDS, *Modular forms and ℓ-adic representations*, Springer Lecture Notes n°349 (1973), pp.361-500.

[33] G. LEJEUNE-DIRICHLET, *Zür theorie der complexen einheiten*, Oeuvres, t.I, (1846), pp.633-644.

[34] Y.I.MANIN, *Parabolic points and zeta-functions of modular curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. t.36 (1972), n°1, AMS Translation pp.19-64.

[35] Y.I.MANIN, *New dimensions in Geometry*, Arbeitstagung (1984).

[36] D. QUILLEN, *Cohomology of groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, t.2 (1970), pp.47-51.

[37] D. QUILLEN, *Algebraic K-theory* I, Springer Lecture Notes in Math. n°341 (1973),pp.85-147.

[38] D. QUILLEN, *Finite generation of the groups* K_i *of rings of algebraic integers*. Springer Lecture Notes in Maths. 341 (1973), pp.179-210.

[39] D. RAMAKRISHNAN, *Higher regulators on quaternionic Shimura curves and values of* L-*functions*, Proceedings AMS Conference "Applications of Algebraic K-Theory to Number Theory and Algebraic Geometry", Boulder (1983), à paraître.

[40] D. RAMAKRISHNAN, *Periods of integrals arising from* K_1 *of Hilbert Blumenthal surfaces*, prépublication (1984).

[41] G. SEGAL, G. WILSON, *Loop groups and equations of* KdV *type*, à paraître.

[42] J.-P. SERRE, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Sém. Delange-Poitou-Pisot, Exposé 19 (1969-1970).

[43] C. SOULÉ, *Opérations en K-théorie algébrique*, à paraître au Journal Canadien de Mathématiques.

[44] H.P.F. SWINNERTON-DYER, *An application of Computing to class field theory*, dans Algebraic Number Theory, publié par Cassels et Fröhlich (1967), pp.280-291, Academic Press.

[45] J. TATE, *Algebraic Cycles and Poles of Zeta Functions*, dans Arithmetical Algebraic Geometry (1965), Harper and Row, New-York, pp.93-110.

Christophe SOULÉ
Université PARIS VII
U.E.R de Mathématique et
Informatique
Tour 45-55, 5ème étage
2 place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05