Laurent Moret-Bailly

Variétés stablement rationnelles non rationnelles

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 643, p. 223-236
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__223_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 643 Février 1985

VARIÉTÉS STABLEMENT RATIONNELLES NON RATIONNELLES
[d'après Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer]

par Laurent MORET-BAILLY

1. Rationalité

Soient k un corps, X une k-variété algébrique de dimension n (les variétés seront toujours, sauf mention contraire, irréductibles et réduites). On dit que X est k-*rationnelle* (resp. *stablement* k-*rationnelle*) si X est k-birationnellement équivalente à $\mathbb{P}^n_k$, en abrégé $X \underset{k}{\sim} \mathbb{P}^n_k$ (resp. s'il existe $m \geq 0$ tel que $X \times_k \mathbb{P}^m_k \underset{k}{\sim} \mathbb{P}^{m+n}_k$) ; ou, de façon équivalente, si son corps de fonctions rationnelles K est une extension transcendante pure de k (resp. s'il existe $m \geq 0$ tel que $K(T_1,\ldots,T_m)$ soit k-isomorphe à $k(T_1,\ldots,T_{m+n})$). L'objet de cet exposé est la question suivante, connue sous le nom de "problème de Zariski" :

(1.1). Toute variété stablement k-rationnelle est-elle k-rationnelle ?

Si X est stablement k-rationnelle, elle est évidemment k-*unirationnelle*, c'est-à-dire qu'il existe une application rationnelle dominante et séparable $f : \mathbb{P}^N_k \dashrightarrow X$. Il convient donc de dire d'abord quelques mots de la question suivante ("problème de Lüroth") :

(1.2). Toute variété k-unirationnelle est-elle k-rationnelle ?

Notons que si l'on a $f : \mathbb{P}^N_k \dashrightarrow X$ comme ci-dessus, on peut (du moins si k est infini) restreindre f à un sous-espace linéaire convenable et ainsi se ramener au cas où $N = n$, c'est-à-dire où f est génériquement finie.

Lorsque $n = 1$ la réponse à (1.2), et *a fortiori* à (1.1), est affirmative (même sans hypothèse de séparabilité pour f) et due à Lüroth ([21],1876). Par voie géométrique la preuve est élémentaire : on peut supposer que X est projective non singulière et que $f : \mathbb{P}^1_k \dashrightarrow X$ est un morphisme. On voit immédiatement que X est de genre 0 ; comme elle a des points rationnels, elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$.

Pour $n = 2$ et k *algébriquement clos*, la réponse à (1.2) et (1.1) est encore affirmative ; cela résulte, comme ci-dessus, d'un théorème de "classification des variétés" mais bien plus profond, dû à Castelnuovo ([6],1894) et étendu à la caractéristique p par Zariski [29] (cf. [2], [27]) : une surface X projective et lisse sur k est rationnelle si et seulement si $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$ et

$H^0(X,(\Omega_X^2)^{\otimes 2}) = 0$.

Pour $n = 2$ et k quelconque, il peut exister des surfaces k-unirationnelles non k-rationnelles, par exemple, pour $k = \mathbb{Q}$, la surface dans $\mathbb{P}^3$ d'équation $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 2X_3^3 = 0$, ou encore, si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, les "surfaces de Châtelet" d'équation affine $y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$, où les $e_i \in k$ sont deux à deux distincts et où a n'est pas un carré dans k (cf. [7], [22]). Ces surfaces ne sont pas stablement k-rationnelles.

Enfin des exemples de variétés de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, unirationnelles et non rationnelles, ont été trouvés indépendamment en 1970 par Clemens-Griffiths, Iskovskih-Manin et Artin-Mumford. Nous aurons à revenir sur la méthode de Clemens-Griffiths ; voir [1] pour un exposé de ces exemples et de l'histoire (mouvementée) du problème.

Le problème de Zariski (1.1) restait en tout cas ouvert pour $n \geq 2$ et k quelconque, ainsi que pour $n \geq 3$ et k algébriquement clos, jusqu'à ce que les auteurs de [13,14] et de [5] exhibent respectivement, en toute caractéristique $\neq 2$:

a) un corps k et une k-surface X non k-rationnelle telle que $X \times_k \mathbb{P}_k^3 \underset{k}{\sim} \mathbb{P}_k^5$;

b) pour tout corps k_0 algébriquement clos, une variété Y de dimension 3 sur k_0 , non rationnelle, telle que $Y \times_{k_0} \mathbb{P}_{k_0}^3 \underset{k_0}{\sim} \mathbb{P}_{k_0}^6$.

De plus, on obtient l'exemple b) en appliquant a) sur le corps $k = k_0(T)$.

Ce résultat est "négatif" en ce qu'il laisse ouverts certains problèmes de rationalité : on sait par exemple [20] que, sur $\mathbb{C}$, l'espace de modules des courbes lisses de genre g est stablement rationnel pour $3 \leq g \leq 6$; c'est aussi le cas de certains espaces de fibrés stables sur les courbes [25]. On ignore si ces variétés sont rationnelles.

Terminons cette introduction en mentionnant le "problème de Noether" : soit G un groupe fini, opérant sur l'espace affine $A = k^G$ par sa représentation régulière ; le quotient A/G est-il une variété k-rationnelle ? En d'autres termes, le corps des G-invariants de l'extension $k(x_g)_{g\in G}$ est-il transcendant pur sur k ? On savait déjà (Swan, Voskresenskiĭ) que la réponse était négative pour $k = \mathbb{Q}$ et G cyclique, et Saltman [26] vient de trouver un contre-exemple pour $k = \mathbb{C}$.

2. Les exemples

2.1. Soient k un corps de caractéristique $\neq 2$, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $P \in k[x]$ un polynôme séparable de degré 3 , a un élément non nul de k . On considère la k-surface affine $X \subset \mathbb{A}_k^3$, d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x) \ . \qquad (2.1.1)$$

PROPOSITION 2.2.- *La surface* X *ci-dessus est* k-*rationnelle dans chacun des cas suivants :*

(i) a *est un carré dans* k ;

(ii) a *est le discriminant de* P , *et* P *a une racine dans* k .

Le cas (i) est immédiat : posant $Y = y + z\sqrt{a}$, $Z = y - z\sqrt{a}$, on voit que le corps des fonctions de X est $k(x,Y)$. Le cas (ii) est un peu plus subtil : si θ est une racine de P , alors (2.1.1) s'écrit

$$y^2 - az^2 = c(x - \theta)(u(x)^2 - av^2) \tag{2.2.1}$$

où $u(x)$ est linéaire, c et $v \in k^\times$. Supposant a non carré, on définit de nouvelles variables Y et Z par

$$\begin{cases} Y + Z\sqrt{a} = \dfrac{y + z\sqrt{a}}{u(x) + v\sqrt{a}} \\ Y , Z \in k(x,y,z) \end{cases}$$

et l'équation (2.2.1) s'écrit alors

$$Y^2 - aZ^2 = c(x - \theta)$$

de sorte que le corps des fonctions de X est $k(Y,Z)$.

2.3. Nous supposerons désormais que P est *irréductible* et que a est le *discriminant* de P et n'est pas un carré dans k . Par suite, le corps des racines de P est galoisien de groupe $\mathfrak{S}_3$ sur k .

THÉORÈME 2.4 [13, 14, 5].- X *est stablement* k-*rationnelle, et plus précisément*

$$X \times_k \mathbb{P}^3_k \underset{k}{\approx} \mathbb{P}^5_k .$$

THÉORÈME 2.5 [5, 13, 14, 15, 19].- X *n'est pas* k-*rationnelle*

Remarques 2.6.- La proposition 2.2 montre que X est "rationnelle" (selon la terminologie consacrée, cela signifie que $X \otimes_k \bar{k}$ est $\bar{k}$-rationnelle). Plus précisément, X devient rationnelle sur chacune des extensions $k[x]/(P)$ et $k(\sqrt{a})$ de k . Il n'y a donc pas de "meilleure" extension K de k telle que $X \otimes_k K$ soit K-rationnelle.

Les théorèmes 2.4 et 2.5 fournissent une réponse négative au problème de Zariski pour les surfaces sur un corps non algébriquement clos. Par exemple, la surface sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine

$$y^2 + 3z^2 = x^3 - 2 \tag{2.6.1}$$

est stablement $\mathbb{Q}$-rationnelle mais non $\mathbb{Q}$-rationnelle. Notons que pour tout nombre premier $p \geq 5$, l'équation (2.6.1) définit une surface X_p sur $\mathbb{F}_p$, qui est $\mathbb{F}_p$-*rationnelle* en vertu de 2.2, puisque $\mathbb{F}_p$ n'a pas d'extension de groupe $\mathfrak{S}_3$.

2.7. Le cas algébriquement clos

Prenons maintenant $k = k_0(t)$, où k_0 est algébriquement clos, et supposons que $P \in k_0[t,x]$ est un polynôme irréductible, de sorte que $a = a(t) \in k_0[t]$. La k-surface X est la fibre générique de la projection naturelle $X_0 \longrightarrow \operatorname{Spec} k_0[t] = \mathbb{A}^1_{k_0}$, où X_0 est la sous-variété de $\mathbb{A}^4_{k_0}$ d'équation

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t,x) . \tag{2.7.1}$$

Il résulte de 2.4 que X_0 est stablement rationnelle :

$$X_0 \times_{k_0} \mathbb{P}^3_{k_0} \underset{k_0}{\sim} \mathbb{P}^6_{k_0}$$

mais bien entendu, 2.5 n'implique pas *a priori* que X_0 ne soit pas rationnelle. Pour le montrer, nous allons faire une hypothèse supplémentaire sur P : soit $\eta = C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{k_0}$ le revêtement ramifié de degré 3 de $\mathbb{P}^1_{k_0}$ correspondant à l'extension $k_0(t)[x]/(P)$ de $k_0(t)$. En d'autres termes, C est le modèle propre et lisse sur k_0 de la courbe plane d'équation $P(t,x) = 0$, et η est donné par la fonction coordonnée t . On suppose alors que :

(2.7.2) a) Le revêtement η est sans point de ramification d'indice 3 ;

b) C est de genre ≥ 3 .

THÉORÈME 2.8 [5].- *Sous les hypothèses ci-dessus, la variété* X_0 *n'est pas rationnelle.*

Bien entendu, 2.8 implique 2.5 dans ce cas particulier : le corps des fonctions de X_0 est non pur sur k_0 , et *a fortiori* non pur sur $k = k_0(t)$.

Exemple 2.9.- Sur $k = \mathbb{C}$, le théorème ci-dessus s'applique à la variété d'équation

$$y^2 + (t^4 + 1)(t^6 + t^4 + 1)z^2 = 2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1 .$$

Remarque 2.10.- Les hypothèses a) et b) de (2.7.2) sont en fait trop restrictives, cf. [5], remarques 7 à 11 du § 3.

Les théorèmes 2.4, 2.5 et 2.8 sont démontrés dans [5] ; leurs démonstrations sont indépendantes et nous en donnerons les grandes lignes, en commençant par 2.8.

3. Un critère de non-rationalité : la méthode de Clemens-Griffiths

3.1. Plaçons-nous d'abord sur $k = \mathbb{C}$. Soit V une $\mathbb{C}$-variété projective lisse de dimension 3 . On a la décomposition de Hodge

$$H^3(V,\mathbb{C}) = \underbrace{H^{3,0}(V) \oplus H^{2,1}(V)}_{} \oplus \underbrace{H^{1,2}(V) \oplus H^{0,3}(V)}_{}$$
$$= \qquad \bar{F} \qquad \oplus \qquad F .$$

L'image de $H^3(V,\mathbb{Z})$ dans F identifié à $H^3(V,\mathbb{C})/\bar{F}$ est un réseau dans F . On définit classiquement la *jacobienne intermédiaire* $JI(V)$ de V comme le tore complexe

$$JI(V) := F/\mathrm{im}\, H^3(V,\mathbb{Z}) \ .$$

On va s'intéresser au cas où $H^{3,0} = H^{0,3} = 0$, de sorte que $JI(V) = H^{1,2}(V)/H^3(V,\mathbb{Z})$. Dans ce cas, $JI(V)$ est même une *variété abélienne principalement polarisée* (en abrégé VAPP) grâce à la forme hermitienne $< , >$ sur F définie sur les formes de type $(1,2)$ par

$$<\alpha,\beta> = -2i\int_V \bar{\alpha}\wedge\beta \ .$$

Cette condition est réalisée en particulier lorsque V est *rationnelle*, et de plus :

THÉORÈME 3.2 (Clemens-Griffiths [8]).- *Si* V *est rationnelle, alors* $JI(V)$ *est isomorphe (comme VAPP) à un produit de jacobiennes de courbes projectives lisses.*

Principe de la démonstration : on vérifie que l'éclatement d'un point de V ne change pas $JI(V)$, et que si $\tilde{V} \longrightarrow V$ est l'éclaté d'une courbe lisse $C \subset V$, alors $JI(\tilde{V})$ est le produit de $JI(V)$ par la jacobienne $J(C)$ de C . Si V est rationnelle, il existe, d'après Hironaka, un morphisme birationnel $V' \longrightarrow V$ où V' est obtenue à partir de $\mathbb{P}^3$ par une suite d'éclatements de points et de courbes lisses. Comme $JI(\mathbb{P}^3) = 0$, $JI(V')$ est un produit de jacobiennes, et $JI(V)$ est une sous-variété abélienne de $JI(V')$, principalement polarisée par la polarisation induite. On en déduit que $JI(V)$ est encore un produit de jacobiennes : toute VAPP est de manière unique produit de VAPP irréductibles, et une jacobienne est irréductible.

3.3. Soit maintenant V une variété projective lisse de dimension 3 sur un corps k_0 algébriquement clos quelconque. Pour trouver un critère de non-rationalité analogue à 3.2, on peut, suivant une méthode inaugurée par Murre, utiliser, comme substitut de $JI(V)$, le "représentant algébrique" [3] du groupe $A^2(V)$ des classes d'équivalence rationnelle de cycles de codimension 2 algébriquement équivalents à zéro sur V ; le représentant algébrique en question est par définition une variété abélienne J sur k_0 , munie d'un homomorphisme

$$A^2(V) \longrightarrow J(k_0)$$

qui est "algébrique" en un sens convenable, le tout assorti d'une propriété universelle vis-à-vis de tels homomorphismes. On arrive dans certains cas à établir l'existence de J (son unicité résultant bien sûr de la définition), et de plus à la munir d'une polarisation principale naturelle. Par abus, la VAPP ainsi obtenue sera alors sacrée "jacobienne intermédiaire" de V , et notée $JI(V)$. Son comportement par éclatement de points ou de courbes lisses est le même que celui de la jacobienne intermédiaire classique, et l'on a $JI(\mathbb{P}^3) = 0$, d'où l'on tire le

THÉORÈME 3.4 ([3], Proposition 4.6).- *Si* V *est rationnelle et admet une jacobienne intermédiaire, celle-ci est isomorphe à un produit de jacobiennes de courbes projectives lisses sur* k_0 .

C'est cette deuxième notion (3.3) de jacobienne intermédiaire qui sera utilisée dans la suite. Pour le lien entre les deux notions, voir [24].

4. Fibrés en coniques

DÉFINITION 4.1.- *Un morphisme de schémas* $f : Y \longrightarrow S$ *est un* fibré en coniques *s'il existe un* $\mathcal{O}_S$*-module* $\mathcal{E}$ *localement libre de rang* 3 , *un* $\mathcal{O}_S$*-module inversible* M *et une section* $q \in H^0(S, M \otimes \mathrm{Sym}^2\mathcal{E})$, *partout non nulle, telle que* Y *soit* S*-isomorphe au schéma des zéros de* q *dans* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

En fait, pour que f soit un fibré en coniques, il faut et il suffit qu'il soit propre, plat et de présentation finie et que sa fibre en chaque point $s \in S$ soit isomorphe à une conique sur le corps résiduel de s : dans ce cas, en effet, on peut prendre $\mathcal{E} = f_*\omega_{Y/S}^{-1}$, où $\omega_{Y/S}$ désigne le dualisant relatif de f .

4.2. Nous désignerons désormais par S une *surface* projective lisse connexe sur un corps k_0 algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, et par $f : Y \longrightarrow S$ un fibré en coniques sur S . Avec les notations de 4.1, le discriminant de q est un élément de $H^0(S, (\Lambda^3\mathcal{E})^{\otimes 2} \otimes M^{\otimes 3})$. Il définit un sous-schéma fermé D de S , le *lieu discriminant* de f .

PROPOSITION 4.3.- *Pour que* Y *soit lisse sur* k_0 , *il faut et il suffit que* f *vérifie les conditions suivantes :*

(i) f *est lisse au point générique de* S , i.e. D *est une courbe ;*

(ii) *les points singuliers de* D *sont les points de* S *dont la fibre est une conique de rang* 1 (i.e. *une droite double*), *et ce sont des points doubles ordinaires.*

Ceci résulte d'un calcul élémentaire de jacobien, cf. [3]. Si ces conditions sont réalisées, nous dirons que Y est un *fibré en coniques non singulier* ; c'est ce que nous supposerons dorénavant.

4.4. Le revêtement double associé à f

Considérons, pour tout point s de S , l'ensemble des *droites* de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_s)$ contenues dans la conique Y_s . C'est un ensemble vide (resp. à deux éléments, resp. à un élément) si et seulement si Y_s est lisse (resp. de rang 2 , resp. de rang 1). Ces droites forment un sous-schéma fermé $\widetilde{D}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$, fini sur D , et la projection $\pi : \widetilde{D} \longrightarrow D$ est un *revêtement double admissible* ("pseudo-revêtement double" dans [3]), au sens suivant :

(i) $\tilde{D}$ est (comme D) une courbe dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires ;

(ii) D est quotient de $\tilde{D}$ par une involution σ dont les points fixes sont les points doubles de $\tilde{D}$, et qui respecte les deux branches d'un tel point double.

En particulier, π est étale de degré 2 au-dessus de l'ouvert de lissité de D (mais *n'est pas plat* aux points singuliers, donc n'est pas un revêtement au sens habituel).

4.5. La variété de Prym du revêtement π.

Supposons D et $\tilde{D}$ *connexes*, et considérons leurs jacobiennes respectives $J(D)$ et $J(\tilde{D})$: chacune est un groupe algébrique lisse connexe sur k_0, extension d'une variété abélienne par un tore. On a deux morphismes naturels

$$\pi^* : J(D) \longrightarrow J(\tilde{D})$$

$$N : J(\tilde{D}) \longrightarrow J(D) \qquad \text{(norme)}$$

de sorte que $N \circ \pi^*$ soit la multiplication par 2 dans $J(D)$.

DÉFINITION 4.6.- *La* variété de Prym *du pseudo-revêtement* $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$ *est le* k-*groupe algébrique* $\Pi = (\mathrm{Ker}\ N)^\circ \subset J(\tilde{D})$.

Cette notion, au moins lorsque D est lisse, remonte, semble-t-il, à Wirtinger et a été remise à l'honneur par Mumford [23]. La généralisation aux courbes singulières est due à Beauville [4].

Π est aussi l'image de $1 - \sigma : J(\tilde{D}) \longrightarrow J(\tilde{D})$, où σ est induit par l'involution de $\tilde{D}$. On vérifie que Π est une *variété abélienne*, isogène à $\mathrm{Coker}\ \pi^*$, et qu'elle est munie d'une *polarisation principale* naturelle, cf. [4]. On a $\dim \Pi = g - 1$, où g désigne le genre arithmétique de D.

Revenons au fibré en coniques non singulier $f : Y \longrightarrow S$:

THÉORÈME 4.7 ([3], théorème 3.6).- *On suppose que la surface* S *est* rationnelle, *et que la courbe* $\tilde{D} \subset Y$ *est connexe. Alors la variété* Y *admet une jacobienne intermédiaire* (3.3), *isomorphe (comme* VAPP) *à la variété de Prym* Π *du pseudo-revêtement double* $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$.

Esquissons seulement la construction de l'isomorphisme annoncé lorsque D est *lisse*. Dans ce cas, Π s'identifie à $J(\tilde{D})/\pi^*J(D)$. Pour tout point $t \in \tilde{D}(k_0)$, notons $\ell(t)$ la classe, dans le groupe de Chow $CH^2(Y)$, de la droite de $Y_{\pi(t)}$ correspondant à t. L'application $t \longrightarrow \ell(t)$ se prolonge par linéarité aux 0-cycles sur $\tilde{D}$, et induit par passage au quotient un homomorphisme de $J(\tilde{D})(k_0)$ dans $A^2(Y)$. On constate que celui-ci est surjectif et que son noyau est $\pi^*J(D)(k_0)$, d'où par passage au quotient un isomorphisme

$$A^2(Y) \xrightarrow{\sim} \Pi(k_0)$$

dont on vérifie qu'il fait de Π la jacobienne intermédiaire cherchée.

Remarque 4.8.- Dans le cas où $k_0 = \mathbb{C}$, on trouvera également dans [3] une démonstration du théorème ci-dessus en termes de la définition transcendante de $JI(Y)$ (3.1), lorsque D est lisse.

5. Non-rationalité de X_0

5.1. Nous sommes maintenant en mesure de résumer la démonstration du théorème 2.8. Rappelons (2.7.1) que $X_0 \subset \mathbb{A}^4_{k_0}$ est donnée par l'équation

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t,x) .$$

C'est manifestement un ouvert d'un fibré en coniques sur $\operatorname{Spec} k_0[t,x]$ dont le lieu discriminant est la courbe d'équation $a(t)P(t,x) = 0$. En fait, on construit, par des manipulations élémentaires, un *modèle projectif et lisse* X_0^c de X_0 , fibré en coniques sur une surface rationnelle S . De plus, le revêtement double $\pi : \widetilde{D} \longrightarrow D$ associé à $X_0^c \longrightarrow S$ se décrit tout à fait explicitement, en termes de la courbe trigonale $\eta : C \longrightarrow L \simeq \mathbb{P}^1$ associée au polynôme P (2.7) : soient g son genre, $Q_i \in C$ $(i = 1,\dots, 2g + 4)$ les points de ramification de η , $R_i = \eta(Q_i)$, P_i le second point de $\eta^{-1}(R_i)$. Alors D s'identifie à la réunion de :

- la courbe C ;
- la droite L , disjointe de C ;
- $(2g + 4)$ droites $F_1,\dots,F_{2g+4}$; la droite F_i rencontre C au point P_i et L au point R_i .

Posons alors $\widetilde{C} = \pi^{-1}(C)$, $\widetilde{L} = \pi^{-1}(L)$, $\widetilde{F}_i = \pi^{-1}(F_i)$. Il est clair que $\widetilde{L}$ (resp. $\widetilde{F}_i$) est l'unique revêtement double de L (resp. F_i) ramifié en les R_i (resp. en P_i et R_i), de sorte que les $\widetilde{F}_i$ sont rationnelles ; enfin on vérifie que $\widetilde{C} \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{\eta} L$ est le revêtement galoisien de groupe $\mathfrak{S}_3$ associé à η .

Pour prouver que X_0^c n'est pas rationnelle, il suffit, en vertu des théorèmes 3.4 et 4.7, de voir que la variété de Prym Π associée à π n'est pas un produit de jacobiennes. Soit $\Theta \subset \Pi$ le diviseur thêta (défini à translation près), associé à la polarisation de Π . Il suffit de montrer que le lieu singulier $\operatorname{Sing}\Theta$ de Θ est de codimension ≥ 5 dans Π : en effet, cette codimension serait 3 ou 4 dans le cas d'une jacobienne, 2 pour le produit d'au moins deux jacobiennes. Or il est prouvé dans [4], théorème 4.10, que le lieu singulier du diviseur thêta d'une variété de Prym est de codimension ≥ 5 , à l'exception d'un certain nombre de cas dont la liste est donnée dans *loc. cit.* (courbes hyperelliptiques, ou de petit genre, etc.) ; on vérifie alors facilement que notre π n'y figure pas.

(En réalité, le théorème cité s'applique au revêtement obtenu en contractant les $\tilde{F}_i$ dans $\tilde{D}$ et les F_i dans D ; ceci ne change pas la variété de Prym).

6. Rationalité stable

6.1. Soient k un corps, que pour simplifier nous supposerons *parfait* et *infini*, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit V une surface projective lisse géométriquement connexe sur k. On note $\bar{V} = V \otimes_k \bar{k}$.

PROPOSITION 6.2.- *Si* V *est* stablement k-rationnelle, *alors* :

(i) $V(k) \neq \emptyset$.

(ii) V *est* rationnelle (i.e. $\bar{V}$ *est* $\bar{k}$-*rationnelle*).

(iii) $\mathrm{Pic}(\bar{V})$ *est un* $\mathbb{Z}$-*module* libre de type fini, *et un* G-*module* stablement de permutation.

Rappelons qu'un G-module M est de permutation s'il admet une $\mathbb{Z}$-base permutée par G, et stablement de permutation s'il existe un G-module de permutation P tel que $M \oplus P$ soit de permutation.

L'assertion (i) est triviale (en fait $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski) et (ii) résulte du théorème de Castelnuovo-Zariski (§ 1). Pour montrer (iii) il suffit d'établir que si Y (projective lisse de dimension N sur k) est k-rationnelle, alors $\mathrm{Pic}(\bar{Y})$ est stablement de permutation. Or il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y & & \mathbb{P}^N_k \end{tikzcd}$$

où p et q sont des k-morphismes propres birationnels et Y' une k-variété normale. On vérifie que le G-module $CH_{N-1}(\bar{Y}')$ est somme directe de $\mathrm{Pic}(\bar{Y})$ et du $\mathbb{Z}$-module libre P engendré par les sous-variétés intègres T de dimension $N-1$ de $\bar{Y}'$ telles que $\dim p(T) < N-1$, de sorte que P est un G-module de permutation. Appliquant le même raisonnement à $q : Y' \longrightarrow \mathbb{P}^N$ on trouve que $CH_{N-1}(\bar{Y}')$ est de permutation (puisque $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^N) = \mathbb{Z}$), cqfd.

Remarques 6.3.- Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont des invariants k-birationnels de V, et (iii) implique que $H^1(G',\mathrm{Pic}(\bar{V})) = 0$ pour tout sous-groupe G' de G. D'autre part, (i) et (iii) sont valables en toute dimension (mais non (ii) !).

6.4. Si M est un G-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini, nous noterons $D(M)$ le k-tore S tel que le G-module des caractères de $\bar{S}$ soit isomorphe à M. Pour que M soit de permutation, il faut et il suffit que $D(M)$ soit *quasi-trivial*, i.e. k-isomorphe à un produit de restrictions de Weil $R_{K_i/k}(\mathbb{G}_{m,K_i})$ où les K_i sont des extensions finies séparables de k ; pour que M soit stablement de permutation, il faut et il suffit que $D(M)$ soit *stablement quasi-trivial*, i.e. qu'il existe U quasi-trivial tel que $U \times_k D(M)$ soit quasi-trivial. Un tore S stablement quasi-trivial a les vertus suivantes :

(6.4.1) (i) $H^1(K, S \otimes_k K) = 0$ pour toute extension K de k.

(ii) S est une variété *stablement* k-*rationnelle.*

Le H^1 de (i) est étale ou fppf. L'assertion (i) résulte de ce que pour L/k finie séparable, $H^1(k, R_{L/k}(\mathbb{G}_{m,L}))$ s'identifie à $H^1(L, \mathbb{G}_{m,L}) = 0$; de même (ii) résulte de ce que la restriction de Weil d'une L-variété L-rationnelle (par exemple $\mathbb{G}_{m,L}$) est k-rationnelle.

Il résulte de (i) ci-dessus que si T est un S-*torseur* sur une k-variété V, alors $T \underset{k}{\simeq} V \times_k S$. Appliquant (ii), on conclut :

Lemme 6.4.2.- *Soient* S *un tore stablement quasi-trivial,* T *un* S-*torseur sur* V. *Pour que* V *soit stablement* k-*rationnelle, il faut et il suffit que* T *le soit.*

6.5. Torseurs universels

Soit V une surface (projective et lisse) *rationnelle*. Nous désignerons par $S(V)$ le k-tore $D(\mathrm{Pic}(\bar{V})) = \underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-groupes}}(\underline{\mathrm{Pic}}_{V/k}, \mathbb{G}_{m,k})$ (on sait en effet que $\mathrm{Pic}(\bar{V})$ est $\mathbb{Z}$-libre de type fini).

Un faisceau inversible L sur $\bar{V}$ peut donc être vu comme un caractère $\chi_L : \bar{S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\bar{k}}$. Si T est un $S(V)$-torseur sur V on peut "pousser" $\bar{T}$ par le caractère χ_L pour obtenir un $\mathbb{G}_m$-torseur, c'est-à-dire un faisceau inversible L' sur $\bar{V}$. On dit que T est un *torseur universel* ([9], [10], [11]) sur V si $L' \simeq L$ pour tout L.

L'obstruction à l'existence d'un torseur universel vit dans $\mathrm{Ker}\,(H^2(k,S(V)) \longrightarrow H^2(V,S(V)))$; deux torseurs universels diffèrent par un S-torseur constant, i.e. provenant de k. Si V a un *point rationnel* P, il existe sur V un unique torseur universel T ayant un point rationnel au-dessus de P, i.e. tel que T_P soit un torseur trivial.

La philosophie des torseurs universels est qu'ils doivent avoir une géométrie et une arithmétique plus simples que celles de V. Ainsi, on montre ([10], [12]) que si T^c est une compactification lisse d'un torseur universel T, le G-module $\mathrm{Pic}(\bar{T}^c)$ est de permutation. Considérons l'hypothèse suivante sur la k-surface rationnelle V :

(H) Tout torseur universel T sur V tel que $T(k) \neq \emptyset$ est une variété k-rationnelle.

On ignore si (H) est toujours vérifiée ; elle n'a d'intérêt que si $V(k) \neq \emptyset$.

PROPOSITION 6.6.- *Soit* V *une surface projective, lisse et rationnelle vérifiant* (H) . *Pour que* V *soit stablement* k-*rationnelle, il faut et il suffit que* $V(k) \neq \emptyset$ *et que le* G-*module* $\mathrm{Pic}(\bar{V})$ *soit stablement de permutation.*

Autrement dit, en présence de (H), les conditions nécessaires de 6.2 sont aussi suffisantes. La preuve est immédiate : si $V(k) \neq \emptyset$, il existe un torseur universel T tel que $T(k) \neq \emptyset$; si de plus $\mathrm{Pic}(\bar{V})$ est stablement de permutation, alors $S(V)$ est stablement quasi-trivial et le lemme 6.4.2 s'applique.

THÉORÈME 6.7 ([13], [14]).- *On suppose* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soient* $a \in k^{\times}$ *et* $P \in k[x]$ *un polynôme non nul de degré* ≤ 4 . *Alors, la* k-*surface d'équation*

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

admet un modèle projectif et lisse V *vérifiant* (H) .

La preuve consiste à expliciter des équations d'un torseur universel. On aboutit à une intersection de deux quadriques d'un espace projectif, pour laquelle on dispose d'une condition suffisante de k-rationalité (existence de certains sous-espaces linéaires).

6.8. Nous abordons maintenant la preuve du théorème 2.4, affirmant la rationalité stable de la k-surface affine $X \subset \mathbb{A}^3_k$ d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

où P est irréductible séparable de degré 3 , $\mathrm{car}(k) \neq 2$, et le discriminant a de P n'est pas un carré dans k .

On construit sans difficulté un modèle projectif et lisse X^c de X , muni d'un morphisme $x : X^c \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ prolongeant la fonction x sur X , et faisant de X^c un *fibré en coniques* (4.1) sur $\mathbb{P}^1_k$, avec de plus les propriétés suivantes ([5], démonstration du théorème 2) :

(6.8.1) (i) La fibration x est relativement minimale ; en fait, ses fibres sont irréductibles (mais non toutes géométriquement irréductibles).

(ii) Les points de $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ dont la fibre est singulière sont l'infini et les zéros de P , et le point singulier de la fibre à l'infini est rationnel sur k , de sorte que $X^c(k) \neq \emptyset$.

(iii) X^c est rationnelle (proposition 2.2).

(iv) $\mathrm{Pic}(\bar{X}^c)$ est stablement de permutation.

On montre (iv) en donnant une présentation de $\mathrm{Pic}(\bar{X}^c)$ en termes des composantes des fibres singulières de x , et d'une section de x . Le calcul utilise le fait que le groupe de Galois de P est $\mathfrak{S}_3$.

En particulier, les conditions (i) à (iii) de 6.2 sont satisfaites pour X^c , donc aussi pour tout modèle projectif et lisse de X, par exemple le modèle V du théorème 6.7. On peut donc appliquer à V la proposition 6.6, d'où la rationalité stable de X.

6.9. Reprise

Bien que le théorème 6.7 soit à l'origine de l'exemple, il n'est pas indispensable d'y faire appel. La méthode ci-dessus exposée conduit en effet à une démonstration explicite de la rationalité stable de X : on construit un k-tore S et un S-torseur T sur X (qui est facteur direct de la restriction à X d'un torseur universel, mais peu importe) ; on montre d'abord facilement que

(i) le torseur T est trivial au-dessus d'un ouvert de X, donc $T \underset{k}{\simeq} X \times_k S$;

(ii) le tore S est une variété k-rationnelle.

Par des changements de coordonnées bien choisis, on identifie ensuite T à un ouvert de l'intersection Σ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$; enfin, on constate que Σ tombe sous le coup de la proposition suivante :

PROPOSITION 6.10.- *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{P}^n_k$ $(n \geq 4)$ *une intersection pure, géométriquement intègre, de deux quadriques. Soit* $D \subset \Sigma$ *une droite* (k-*rationnelle*) *non contenue dans* $\mathrm{Sing}(\Sigma)$ *et qui n'est pas une génératrice de* Σ (*si* Σ *est un cône*). *Alors, la projection à partir de* D

$$\Sigma - D \longrightarrow \mathbb{P}^{n-2}_k$$

est birationnelle.

Cette méthode directe donne $X \times_k \mathbb{A}^3_k \underset{k}{\simeq} \mathbb{A}^5_k$, alors que le théorème 6.7 conduit seulement à $X \times_k \mathbb{A}^9_k \underset{k}{\simeq} \mathbb{A}^{11}_k$.

7. Non k-rationalité de la surface X.

Reprenons les notations de 6.8. Il suffit d'appliquer au modèle X^c de X le théorème suivant, dû à Iskovskih ([17], [18], [19]) :

THÉORÈME 7.1.- *Soit* $\pi : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ *un fibré en coniques non singulier, relativement minimal sur* k, *ayant au moins* 4 *fibres géométriques singulières. Alors la surface* Y *n'est pas* k-*rationnelle.*

Dans notre exemple, la fibration $X^c \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ a 4 fibres géométriques singulières.

La preuve de ce théorème est délicate ; on peut éviter d'y avoir recours en exhibant, suivant Coray et Tsfasman [15], un modèle V de X qui est une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3_k$; on décrit explicitement les 27 droites de $\bar{V}$ ainsi que l'action de Galois sur ces droites, et l'on invoque enfin le théorème suivant, dû à Swinnerton-Dyer [28] :

THÉORÈME 7.2.- *Soit* $V \subset \mathbb{P}^3_k$ *une surface cubique lisse. Pour que* V *soit* k-*rationnelle, il faut et il suffit que* $V(k) \neq \emptyset$ *et que* $\bar{V}$ *contienne la réunion, invariante par Galois, d'au moins deux droites deux à deux disjointes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEAUVILLE - *Variétés rationnelles et unirationnelles*, Algebraic Geometry : Open Problems, Springer Lect. Notes in Math. 997.

[2] A. BEAUVILLE - *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque n° 54.

[3] A. BEAUVILLE - *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. ENS 10(1977), 309-391.

[4] A. BEAUVILLE - *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math. 41 (1977), 149-196.

[5] A. BEAUVILLE, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - *Variétés stablement rationnelles non rationnelles* (à paraître aux Annals of Math.).

[6] G. CASTELNUOVO - *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Annalen 44(1894).

[7] F. CHÂTELET - *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseign. Math. 5(1959), 153-170.

[8] C.H. CLEMENS, P.A. GRIFFITHS - *The intermediate Jacobian of the Cubic Threefold*, Ann. of Math. 95(1972), 281-356.

[9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif ; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C.R. Acad. Sc. Paris 282(1976), 1113-1116.

[10] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C.R. Acad. Sc. Paris 284(1977), 967-970.

[11] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique (Angers 1979), 223-237. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.

[12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC - *La descente sur les variétés rationnelles* II (en préparation).

[13] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - *Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet*, C.R. Acad. Sc. Paris 289(1984), 377-380.

[14] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, Sir P. SWINNERTON-DYER - *Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet généralisées* (en préparation).

[15] D.F. CORAY, M.A. TSFASMAN - *Arithmetic on singular del Pezzo surfaces* (en préparation).

[16] P. DELIGNE - *Variétés unirationnelles non rationnelles*, Séminaire Bourbaki 1971/72, Exposé 402.

[17] V.A. ISKOVSKIH - *Rational surfaces with a pencil of rational curves*, Mat. Sb. 74(116) (1967) (= Math. USSR Sb. 3(1967), 563-587).

[18] V.A. ISKOVSKIH - *Rational surfaces with a pencil of rational curves and with positive square of the canonical class*, Mat. Sb. 83 (125) (1970), 90-119 (= Math. USSR Sb. 12(1970), 91-117).

[19] V.A. ISKOVSKIH - *Birational properties of a surface of degree* 4 *in* $\mathbb{P}^4_k$, Mat. Sb. 88 (130) (1972), 31-37 (= Math. USSR Sb. 17(1972), 30-36).

[20] J. KOLLAR, F.O. SCHREYER - *The moduli of curves is stably rational for* $g \leq 6$, Duke Math. J. 51(1984) n° 1, 239-242.

[21] J. LÜROTH - *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Annalen 9(1876), 163-165.

[22] YU.I. MANIN - *Formes cubiques* (en russe), Nauka, Moscou 1972 (= Cubic Forms, North Holland, 1974).

[23] D. MUMFORD - *Prym varieties* I, Contributions to Analysis (dédié à Lipman Bers), Academic Press, New York 1974, 325-350.

[24] J.P. MURRE - *Un résultat en théorie des cycles algébriques de codimension deux*, C.R. Acad. Sc. Paris, 296(1983), 981-984.

[25] P.E. NEWSTEAD - *Rationality of moduli spaces of stable bundles*, Math. Ann. 215(1975), 251-268 (Corrections : Math. Ann. 249(1980), 281-282).

[26] D. SALTMAN - *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. 77(1984), 71-84.

[27] J.-P. SERRE - *Critère de rationalité pour les surfaces algébriques* (d'après K. Kodaira), Séminaire Bourbaki 146(1957).

[28] Sir P. SWINNERTON-DYER - *The birationality of cubic surfaces over a given field*, Michigan Math. J. 17(1970), 289-295.

[29] O. ZARISKI - *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = P_2 = 0$ *of an algebraic surface* Ill. J. Math. 2(1958), 303-315.

Laurent MORET-BAILLY
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY