Astérisque

MICHEL BROUÉ

Les ℓ-blocs des groupes $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$ et leurs structures locales

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. n° 640, p. 159-188

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__159_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984/85, n°640 Février 1985

LES ℓ-BLOCS DES GROUPES GL(n,q) et U(n,q^2) ET LEURS STRUCTURES LOCALES

par Michel Broué

à Claude Chevalley

Trente-cinq années se sont écoulées entre la démonstration par Richard Brauer (1947) des "Conjectures de Nakayama" concernant la classification des caractères du groupe symétrique en ℓ-blocs (ℓ un nombre premier), et le travail de Paul Fong et Bhama Srinivasan (1982) donnant la classification des caractères des groupes $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$ en ℓ-blocs pour $\ell \nmid q$ (note [1]). Le passage du "corps à 1 élément" au corps à q éléments n'était donc pas immédiat ... Il requiert en effet l'usage systématique des méthodes introduites par Deligne et Lusztig pour l'étude des caractères des "groupes finis de type de Lie".

Les résultats de Fong-Srinivasan, comme ceux de Brauer, utilisent de manière essentielle la combinatoire liée au groupe symétrique (diagrammes de Young, crochets, etc...). Nous présentons ici des travaux de Puig et de l'auteur, qui fournissent une nouvelle approche des résultats de Fong-Srinivasan (incluant le cas $\ell = 2$ qu'ils n'avaient pas traité), reléguant la combinatoire le plus loin possible – et donc se prêtant à une généralisation aux autres groupes de type de Lie. Cette approche est fondée sur le point de vue "local" en théorie des blocs ([A-B], [B-P]) et fournit donc, de plus, la structure locale complète des ℓ-blocs des groupes $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$. Cette structure locale apparait, une fois de plus, comme semblable à la structure locale ordinaire des ℓ-sous-groupes de groupes "du même type". Cette approche a été inspirée par une étude antérieure, par Puig, du cas du groupe symétrique, que nous présentons ici en guise d'introduction.

PLAN

§1. Les ℓ-blocs d'un groupe fini et leur structure locale
- A. Les ℓ-blocs d'un groupe fini
- B. Structure locale sur un bloc
- C. Quelques compléments utiles

§2. Les ℓ-blocs du groupe symétrique et leur structure locale
- A. Diagrammes de Young, crochets, caractères
- B. Les résultats principaux

C. Esquisse de démonstration

§3. Les ℓ-blocs de $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$ et leur structure locale

A. Notations et conventions

B. Les théorèmes principaux

§4. L'induction de Deligne-Lusztig et la méthode de démonstration

A. Les outils : l'induction de Deligne-Lusztig

B. Description et propriétés des caractères des groupes de type GL/q

B1. L'ensemble $\mathcal{S}(G)$

B2. Les caractères unipotents

B3. La décomposition de Jordan des caractères irréductibles

C. Indications sur la démonstration des résultats principaux

D. Bilan et perspectives

Les notations suivantes sont fixées une fois pour toutes. Soit ℓ un nombre premier. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques $\mathbb{Q}_\ell$, et par K un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de degré fini sur $\mathbb{Q}_\ell$, d'anneau des entiers A et de corps résiduel k . On suppose dans tout ce qui suit que K est "assez gros" pour tous les groupes finis considérés, i.e. que K contient les racines de l'unité d'ordre l'exposant du groupe.

§1. LES ℓ-BLOCS D'UN GROUPE FINI ET LEUR STRUCTURE LOCALE

A. Les ℓ-blocs d'un groupe fini

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & KG \\ AG \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & kG \arrow[r] & kG/JkG \end{tikzcd}$$

Soit G un groupe fini. L'algèbre de groupe KG est semi-simple et se décompose en un produit d'algèbres de matrices sur K indexées par l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G sur K (cf [Se]), i.e. par l'ensemble $\mathrm{Irr}(G,K)$ des caractères irréductibles de G sur K :

$$KG \xrightarrow{\sim} \prod M_K(\chi) \qquad (\chi \in \mathrm{Irr}(G,K)) .$$

L'algèbre de groupe kG n'est pas semi-simple dès que ℓ divise l'ordre de G. On note JkG son radical de Jacobson. Sa "semi-simplifiée" kG/JkG se décompose en un produit direct d'algèbres de matrices sur k indexées par l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G sur k , i.e. par l'ensemble $\mathrm{IBr}(G,A)$ des caractères de Brauer irréductibles de G sur A ([Se]) :

$$kG/JkG \xrightarrow{\sim} \prod M_k(\varphi) \quad (\varphi \in \mathrm{IBr}(G,A)) .$$

L'algèbre AG se décompose en un produit direct d'algèbres indécomposables appelées les <u>blocs</u> de AG (ou blocs de G sur A). Puisque l'anneau A est complet, si B est un bloc de AG , la k-algèbre $k \otimes_A B$ est aussi indécomposable : elle est appelée bloc de kG (ou bloc de G sur k). Dans toute la suite, on appellera "bloc de G" soit un bloc de AG, soit un bloc de kG .

$$\begin{tikzcd} & KG \xrightarrow{\sim} \prod K\otimes_A B \; ; \; K\otimes_A B \xrightarrow{\sim} \prod M_K(\chi) \quad (\chi\in B) \\ AG \arrow[ur] \arrow[dr] \xrightarrow{\sim} \prod B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & kG/JkG \xrightarrow{\sim} \prod B/JB \; ; \; B/JB \xrightarrow{\sim} \prod M_k(\varphi) \quad (\varphi\in B) \end{tikzcd}$$

Soit B un bloc de AG. Si χ est un caractère irréductible de G sur K , on dit que $\chi\in B$ si la projection de $K\otimes_A B$ sur $M_K(\chi)$ est non nulle. De même, si φ est un caractère de Brauer irréductible de G sur A , on dit que $\varphi\in B$ si la projection de B/JB sur $M_k(\varphi)$ est non nulle . Les blocs de G définissent donc une partition de l'ensemble des caractères irréductibles de G sur K (resp. de l'ensemble des caractères de Brauer irréductibles de G sur A). Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Fe] .

On appelle bloc principal de G et on note $B_o(G)$ le bloc qui contient le caractère trivial de G sur K — et donc qui contient le caractère de Brauer trivial de G sur A . Si G est un ℓ-groupe, le bloc principal est le seul bloc de G .

B. Structure locale sur un bloc

Soit X un ℓ-sous-groupe de G . On note $(kG)^X$ l'ensemble des points fixes de kG sous l'action de X par conjugaison, et on note $C_G(X)$ le centralisateur de X dans G . Le résultat suivant, essentiellement dû à Brauer (cf [A-B] pour une démonstration de la forme présentée ici), est à la base de toute l'étude locale des blocs.

(1.1) Théorème - Définition.- Soit $\mathrm{Br}_X : (kG)^X \to kC_G(X)$ l'application induite par l'application linéaire de kG sur $kC_G(X)$ qui envoie $g\in G$ sur g ou sur 0 selon que g appartient ou non à $C_G(X)$. L'application Br_X est un morphisme d'algèbres, appelé morphisme de Brauer.

(1.2) Définition ([A-B]).- On appelle ℓ-paire de Brauer de G toute paire (X,E) où X est un ℓ-sous-groupe de G et E est un bloc de $C_G(X)$.

On a une notion naturelle d'inclusion entre paires de Brauer ([A-B]), qui peut être définie de la manière suivante.

(1.3) Théorème ([B-P.1]).- Soient X et X' deux ℓ-sous-groupes de G tels que $X\subset X'$.

$$\begin{tikzcd} (kG)^{X'} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{Br}_{X'}"] & (kG)^X \arrow[d, "\mathrm{Br}_X"] \\ kC_G(X') & kC_G(X) \end{tikzcd}$$

Soit E' un bloc de $kC_G(X')$. Il existe un unique bloc E de $kC_G(X)$ possédant la propriété suivante :

Soit i' un idempotent primitif de $kC_G(X')$ tel que $i'\in E'$. Si $\tilde{i}'$ est un idempotent primitif de l'algèbre $(kG)^{X'}$ d'image i' par $\mathrm{Br}_{X'}$, on a $\mathrm{Br}_X(\tilde{i}')\in E$.

On dit alors que la paire (X,E) est contenue dans la paire (X',E') et on note $(X,E)\subset(X',E')$.

De plus, on dit que (X,E) est normale dans (X',E') si X est normal dans X' et si $(X,E)\subset(X',E')$. Si X et X' sont deux ℓ-sous-groupes de G tels que X est normal dans X', on a $(X,E)\subset(X',E')$ si et seulement si le bloc E est stable par conjugaison par X' et si $Br_{X'}(E) \subset E'$ (cf [A-B] pour une définition de l'inclusion comme clôture de la relation de normalité). Il est clair d'après (1.3) que

1. la relation d'inclusion est une relation d'ordre,
2. Si $(X,E) \subset (X',E')$, alors (X,E) est sous-normal dans (X',E').

Nous allons voir qu'en fait l'inclusion des paires généralise l'inclusion des ℓ-sous-groupes.

Soit B un bloc de G . On dit qu'une paire (X,E) est une B-paire si ({1},B) est contenue dans (X,E). Le guide et le principal intérêt des définitions précédentes proviennent du résultat suivant, équivalent à la propriété connue sous le nom de "Troisième Théorème Principal de Brauer".

(1.4) Théorème ([A-B]).- L'application $X \mapsto (X, B_o(C_G(X)))$ est une bijection de l'ensemble des ℓ-sous-groupes de G sur l'ensemble des $B_o(G)$-paires de G qui respecte les relations d'inclusion.

Suivant [Pu.1], on appelle catégorie de Frobenius de G pour ℓ et on note $\mathbf{Fr}_\ell(G)$ la catégorie dont les objets sont les ℓ-sous-groupes de G , et telle que les morphismes de X dans X' sont les homomorphismes de X dans X' induits par les automorphismes intérieurs de G. Si B est un bloc de G , on appelle catégorie de Brauer de G pour B et on note $\mathbf{Br}_B(G)$ la catégorie dont les objets sont les B-paires de Brauer de G , et telle que les morphismes de (X,E) dans (X',E') sont les homomorphismes de X dans X' induits par les automorphismes intérieurs de G qui envoient (X,E) sur une paire contenue dans (X',E').

De même que l'étude ℓ-locale d'une groupe fini est l'étude de $\mathbf{Fr}_\ell(G)$ ([Pu.1]), l'étude locale d'un bloc B de G est l'étude de sa catégorie de Brauer $\mathbf{Br}_B(G)$. Le théorème (1.4) ci-dessus peut se réinterpréter de la manière suivante :

(1.5) L'application $X \mapsto (X, B_o(C_G(X)))$ identifie $\mathbf{Fr}_\ell(G)$ et $\mathbf{Br}_{B_o(G)}(G)$.

Ainsi l'étude locale des blocs apparait comme une généralisation de l'étude ℓ-locale. De fait, nombre de résultats connus se généralisent, tels les théorèmes de Sylow, qui peuvent être vus comme une reformulation du "Premier Théorème Principal de Brauer".

(1.6) Théorème ([A-B], "Théorèmes de Sylow").- (1) Soit B un bloc de G . Le groupe G opère transitivement par conjugaison sur l'ensemble des B-paires de Brauer maximales.

(2) (Caractérisation locale de la maximalité) Soit (X,E) une paire de Brauer et soit $N_G(X,E)$ son stabilisateur dans G . Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) (X,E) est une paire maximale de G ,

(ii) (X,E) est une paire maximale de $N_G(X,E)$.

(1.7) Définition.- Si (X,E) est une B-paire de Brauer maximale de G , le groupe X s'appelle un groupe de défaut de B . Les groupes de défaut forment donc une classe de conjugaison de ℓ-sous-groupes de G .

[Le théorème d'Alperin sur la fusion de ℓ-sous-groupes s'étend également au cadre plus général de $\mathbf{Br}_B(G)$ ([A-B]). Il est significatif de l'intérêt de ce point de vue que l'on puisse aussi généraliser au cas d'un bloc quelconque le théorème de Frobenius (1907) affirmant que, si tous les groupes d'automorphismes $N_G(X)/C_G(X)$ de $\mathbf{Fr}_\ell(G)$ sont des ℓ-groupes, alors G est "presque" un ℓ-groupe, i.e. le groupe $G/O_{\ell'}(G)$ est un ℓ-groupe, où $O_{\ell'}(G)$ désigne le plus grand ℓ'-sous-groupe normal de G . Ce résultat se généralise ([B-P.2],[Pu.3]) de la manière suivante : Si B est un bloc de G tel que tous les groupes d'automorphismes $N_G(X,E)/C_G(X)$ de $\mathbf{Br}_B(G)$ sont des ℓ-groupes, alors l'algèbre B est une algèbre de matrices sur AX où X est un groupe de défaut de B . Ainsi, du point de vue des représentations, B se comporte "comme" l'algèbre de groupe d'un ℓ-groupe.]

Le présent exposé a pour but de présenter une description des catégories $\mathbf{Br}_B(G)$ dans le cas où G est un groupe symétrique, un groupe linéaire ou un groupe unitaire, et de mettre en évidence le fait que ces catégories sont équivalentes à des catégories de Frobenius $\mathbf{Fr}_\ell(H)$ pour des sous-groupes H de G "de même type" que G (cf. ci-dessous § 2.B et proposition (3.8)).

C. Quelques compléments utiles sur la théorie des blocs

Les paires autocentralisantes

(1.8) Définition.- On dit qu'une paire (X,E) est autocentralisante si elle est maximale comme paire de Brauer du groupe $XC_G(X)$.

(1.9) Proposition.- Soit (X,E) une paire de Brauer de G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (X,E) est autocentralisante ,

(ii) Il existe un caractère irréductible χ de $XC_G(X)$ appartenant à E , qui provient du caractère d'un $A(XC_G(X)/X)$-module projectif.

Dans ces conditions, le caractère χ est uniquement déterminé, et s'appelle le caractère canonique de la paire autocentralisante (X,E) .

Si (X,E) est une $B_0(G)$-paire, elle est autocentralisante si et seulement si X est un ℓ-sous-groupe de Sylow de $XC_G(X)$. Le qualificatif d'"autocentralisant" est dû à la propriété caractéristique suivante : la paire (X,E) est autocentralisante si et seulement si, pour toute paire (X',E') la contenant, on a $C_{X'}(X) \subset X$.

La notion de paire autocentralisante permet d'énoncer un critère de maximalité particulièrement utile, qui généralise une remarque bien connue pour les ℓ-groupes :

(1.10) La paire (X,E) est maximale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) (X,E) est autocentralisante,

(2) ℓ ne divise pas $|N_G(X,E):XC_G(X)|$.

<u>Le "Second Théorème Principal de Brauer"</u>

Les blocs de G correspondent bijectivement aux idempotents primitifs du centre ZAG de l'algèbre AG (et aussi à leurs images dans kG , les idempotents primitifs de ZkG).

On désigne par $\mathcal{ZF}(G)$ le K-espace vectoriel des fonctions centrales sur G à valeurs dans K , et par $\mathcal{ZF}(G|G_{\ell'})$ le sous-espace de $\mathcal{ZF}(G)$ formé des fonctions qui s'annulent hors de l'ensemble $G_{\ell'}$ des ℓ'-éléments de G .

Si f est un élément de $\mathcal{ZF}(G)$ et si b est un idempotent de ZAG , on note b.f la fonction définie par
$$(b.f)(g) = f(bg) \quad \text{pour tout } g \in G .$$
Si b correspond à un bloc B de G sur A (i.e. si B = (AG)b), et si χ est un caractère irréductible de G , il est clair que $\chi \in B$ si et seulement si $b.\chi = \chi$.
De plus, il n'est pas difficile de vérifier (moyennant les résultats de la théorie de Brauer contenus dans [Se] , par exemple – cf [Br] , ou [Fe] , chap.IV) que la multiplication par un idempotent de ZAG laisse stable le sous-espace $\mathcal{ZF}(G|G_{\ell'})$.

(1.11) <u>Définition</u>.- Soit x un ℓ-élément de G . On note
$$d_\ell^{x,G} : \mathcal{ZF}(G) \to \mathcal{ZF}(C_G(x)|C_G(x)_{\ell'})$$
la fonction définie par $d_\ell^{x,G}(f)(y) = f(xy)$ pour tout $f \in \mathcal{ZF}(G)$ et $y \in C_G(x)_{\ell'}$.

D'autre part, si b est un idempotent de ZAG , d'image $\bar{b}$ dans ZkG , on note $Br_x(b)$ l'idempotent de $ZAC_G(x)$ qui correspond à l'idempotent $Br_{<x>}(\bar{b})$ de $ZkC_G(x)$.

Le "Second Théorème Principal de Brauer" peut s'énoncer comme une propriété de commutation entre Br_x et $d_\ell^{x,G}$ (cf [Br] , ou [Fe] chap.IV) .

(1.12) <u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> x <u>un</u> ℓ-<u>élément de</u> G <u>et soit</u> b <u>un idempotent de</u> ZAG . <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{ZF}(G)$, <u>on a</u>
$$Br_x(b).d_\ell^{x,G}(f) = d_\ell^{x,G}(b.f) .$$

En termes d'inclusion de paires, ce résultat peut s'énoncer ainsi :

(1.13) Soit E un bloc de $C_G(x)$, correspondant à l'idempotent primitif e de $ZAC_G(x)$. Soit B un bloc de G , et soit χ un caractère irréductible de G appartenant à B . Si $e.d_\ell^{x,G}(\chi) \neq 0$, on a $(\{1\},B) \subset (<x>,E)$.

[*Les méthodes et certains des résultats précedents peuvent être étendus à l'étude de l'algèbre d'un groupe fini sur un anneau semi-local R . Si* π *est l'ensemble des nombres premiers non inversibles dans R , on définit de manière analogue à ci-dessus une application* $d_\pi^{x,G} : ZF(G) \to ZF(C_G(x)|C_G(x)_{\pi'})$ *(x un* π*-élément de*

G) qui commute avec une opération de Brauer Br_x *définie sur les idempotents de ZRG (cf [Ro]).]*

§2. LES ℓ-BLOCS DU GROUPE SYMÉTRIQUE ET LEUR STRUCTURE LOCALE

A. Diagrammes de Young, Crochets, Caractères

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement quelques définitions et résultats (cf [Ja] ou [Zh]) classiques sur les caractères du groupe symétrique, en suivant la présentation de Puig ([Pu.2]).

On appelle diagramme de Young tout sous-ensemble fini D de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est muni de l'ordre produit) tel que, si $(a,b)\in D$, tout élément $(c,d)<(a,b)$ appartient encore à D .

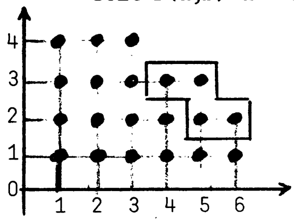
Les diagrammes de Young de cardinal donné n correspondent bijectivement aux partitions de l'entier n .

Soit D un diagramme de Young et soit $(a,b)\in D$. On appelle crochet de D associé à (a,b) l'ensemble

$$D(a,b) = \{(c,d)\ ;\ (c,d)\in D\ ,\ (a,b)\leqslant(c,d)\ ,\ (c+1,d+1)\notin D\}\ .$$

On appelle hauteur du crochet D(a,b) l'entier h tel que $(a,b+h)\in D$ et $(a,b+h+1)\notin D$. Si e est le cardinal de D(a,b) , on dit que D(a,b) est un e-crochet de D .

Soit D(a,b) un crochet de D , de cardinal e et de hauteur h . Alors l'ensemble $D' = D - D(a,b)$ est encore un diagramme de Young. On dit que D' est obtenu en enlevant un e-crochet à D , et on désigne par $h(D,D')$ la hauteur de D(a,b).



Ainsi sur l'exemple ci-contre, le crochet associé à (4,2) est un 4-crochet de hauteur 1 . Le diagramme D correspond à la partition (3,5,6,6) de 20 , et le diagramme D' correspond à la partition (3,3,4,6) de 16 .

Il est bien connu que les diagrammes de Young classifient les caractères irréductibles des groupes symétriques : à chaque diagramme D de cardinal n correspond un caractère χ_D du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, et cette correspondance peut être définie par récurrence de la manière suivante ([Zh]) :

(1) $\chi_\emptyset$ est le caractère trivial du groupe symétrique trivial $\mathfrak{S}_0$;

(2) soit $n>0$, soit $E = \{1,2,\ldots,n\}$, soit F un sous-ensemble de E de cardinal $e>0$ et soit x un cycle de longueur e et de support F . On identifie $\mathfrak{S}_{n-e}$ au sous-groupe des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui opèrent trivialement sur F : ainsi le centralisateur de x dans $\mathfrak{S}_n$ est $\langle x\rangle\times\mathfrak{S}_{n-e}$.

(2.1) Pour tout y dans $\mathfrak{S}_{n-e}$, on a $\chi_D(xy) = \sum(-1)^{h(D,D')}\chi_{D'}(y)$ où D' parcourt l'ensemble des diagrammes de Young obtenus à partir de D en enlevant un e-crochet.

L'assertion (2.1) est connue sous le nom de "formule de Murnagham-Nakayama".

B. Les résultats principaux

Soit E un ensemble de cardinal n et soit G le groupe symétrique de E .

Pour tout sous-groupe X de G , on note $n^X = |E^X|$.

Soit $\mathcal{P}(G,\ell)$ l'ensemble des couples (X,C) où X est un ℓ-sous-groupe de G et C un diagramme de Young tel que

(1) $|C| \leq n^X$ et ℓ divise $n^X - |C|$,

(2) C n'a aucun ℓ-crochet .

(2.2) Théorème (Puig-Marichal).- Il y a une bijection, notée $(X,C) \mapsto (X,B_C(X))$, de l'ensemble $\mathcal{P}(G,\ell)$ sur l'ensemble des paires de Brauer de G ($B_C(X)$ désigne donc un bloc de $C_G(X)$) , telle que

$$(X,B_C(X)) \subset (X',B_{C'}(X')) \text{ si et seulement si}$$

$X \subset X'$ et $C = C'$.

Le théorème précédent a les conséquences immédiates suivantes.

1. Paramétrage des blocs (Brauer, [Br.1])

(2.3) Les blocs de G sont en bijection avec les diagrammes de Young C possédant les propriétés suivantes : $|C| \leq n$, $\ell \mid n-|C|$, C n'a pas de ℓ-crochet.

2. Morphisme de Brauer

Si $(X,C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$, le théorème (2.2) nous permet de noter $b_C(X)$ l'idempotent primitif de $ZkC_G(X)$ associé au bloc $B_C(X)$. Si $(\{1\},C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$, $b_C(\{1\})$ est abrégé en b_C (et plus loin $B_C(\{1\})$ en B_C).

Soit $(\{1\},C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$. On a alors $\mathrm{Br}_X(b_C) = \begin{cases} b_C(X) & \text{si } (X,C) \in \mathcal{P}(G,\ell) , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$

3. Paires maximales et groupes de défaut

(2.4) Proposition.- Soit $(X,C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$. On désigne par H le groupe symétrique de $E-E^X$. La paire $(X,B_C(X))$ est maximale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $n^X = |C|$,

(2) X est un ℓ-sous-groupe de Sylow de H .

On voit en particulier, grâce à la proposition précédente, que tout groupe de défaut d'un ℓ-bloc d'un groupe symétrique est un ℓ-sous-groupe de Sylow d'un groupe symétrique.

4. La catégorie de Brauer

Soit C un diagramme de Young tel que $(\{1\},C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$ et soit B_C le bloc de G correspondant. Soit F un sous-ensemble de E de cardinal $|C|$, et soit H le groupe symétrique de $E-F$, identifié au sous-groupe de G formé des éléments qui opèrent trivialement sur F . Alors l'application $X \mapsto (X, B_C(X))$, envoyant un objet de $\mathbf{Fr}_\ell(H)$ sur un objet de $\mathbf{Br}_{B_C}(G)$, définit une équivalence de catégories entre la catégorie de Frobenius de H pour ℓ et la catégorie de Brauer de G pour B_C .

5. Caractères dans les blocs

Le résultat suivant, qui est en fait (cf. C. ci-dessous) une conséquence de la démonstration du théorème (2.2), est dû à Brauer ([Br.1]) (et indépendamment à G. de B.Robinson), et avait été conjecturé par Nakayama. Son énoncé doit être considéré ici comme une continuation de l'énoncé du théorème (2.2), i.e. de la liste des propriétés de la bijection $(X,C) \mapsto (X, B_C(X))$.

(2.5) Théorème.- Soit C un diagramme de Young tel que $(\{1\},C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$, et soit B_C le bloc de G correspondant. Soit D un diagramme de cardinal n , et soit χ_D le caractère correspondant de G . Alors $\chi_D \in B_C$ si et seulement si C s'obtient en enlevant à D un certain nombre de ℓ-crochets.

Remarque.- L'énoncé précédent (précisé par l'assertion (2.3)) montre en particulier que, quelle que soit la manière dont on ôte des ℓ-crochets à un diagramme de Young D , le diagramme (sans ℓ-crochets) obtenu en fin d'opération est le même : il ne dépend que de D . Il s'agit là d'un résultat combinatoire classique, qui est ainsi redémontré par la théorie des blocs. Ce résultat est en fait valide même si la longueur fixée pour les crochets "à enlever" n'est pas un nombre premier. Nous verrons au paragraphe suivant que ce résultat général découle de la théorie des blocs du groupe linéaire.

C. Esquisse de démonstration

C'est un exercice élémentaire de théorie des groupes que de vérifier le résultat suivant.

(2.6) Lemme.- Soit X un ℓ-sous-groupe de $G = \mathfrak{S}(E)$. Alors $C_G(X) = \mathfrak{S}(E^X) \times G(X)$, où $G(X)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E-E^X)$ tel que $C_{G(X)}(O_\ell(G(X))) \subset O_\ell(G(X))$.

Or si H est un groupe fini tel que $C_H(O_\ell(H)) \subset O_\ell(H)$, le groupe H n'a qu'un seul ℓ-bloc : il est en effet possible de démontrer que, pour tout groupe fini H , on a $ZkH = (kC_H(O_\ell(H)))^H + JZkH$. D'où

(2.7) Les blocs de $C_G(X)$ sont en bijection naturelle avec les blocs de $\mathfrak{S}(E^X)$.

Si D est un diagramme de Young de cardinal $|E^X|$, on note χ_D le caractère de $\mathfrak{S}(E^X)$ qui lui correspond. Ce caractère définit un bloc de $\mathfrak{S}(E^X)$, donc un bloc de $C_G(X)$ que l'on note $B(\chi_D, X)$.

Le principe de la démonstration de (2.2) et (2.5) est le suivant :

Une paire quelconque de G peut être notée $(X,B(\chi_D,X))$, où $|D| = |E^X|$. On cherche à "agrandir" cette paire, jusqu'à trouver une paire maximale. On classifie alors les paires maximales, donc (d'après (1.6)) les blocs de G . Puisque le processus a consisté à suivre des inclusions de paires, il n'est pas difficile ensuite de prouver (2.2). En prenant pour paire de départ la paire $(\{1\},B(\chi_D,\{1\}))$, on sait dans quelles paires maximales elle est contenue, c'est à dire dans quel bloc se trouve le caractère χ_D , ce qui établit (2.5).

Dans le processus d'agrandissement des paires, le résultat suivant est fondamental, et "explique" en quelque sorte les conjectures de Nakayama (cf.(2.5)).

(2.8) Proposition ([Pu.2]).- *Soit X un ℓ-sous-groupe de G , et soit x un cycle de longueur ℓ^m de $\mathfrak{S}(E^X)$. On pose* $X' = X\langle x\rangle$, *et on a donc* $|E^{X'}| = |E^X| - \ell^m$. *Soit D (resp. D') un diagramme de Young de cardinal* $|E^X|$ (*resp.* $|E^{X'}|$). *Si D' se déduit de D en enlevant un ℓ^m-crochet, on a*

$$(X,B(\chi_D,X)) \subset (X',B(\chi_{D'},X')) .$$

Pour démontrer cette proposition, on se ramène d'abord au cas où $X = \{1\}$. L'assertion à démontrer devient alors une conséquence immédiate de la formule de Murnagham-Nakayama (2.1) et de la proposition suivante, qui s'apparente au Second Théorème Principal de Brauer (1.12).

(2.9) Proposition (Puig).- *Soit G un groupe fini, et soit x un ℓ-élément de G tel qu'il existe un sous-groupe H avec* $C_G(x) = \langle x\rangle \times H$, *et tel que* $x \in O_\ell(C_G(xy))$ *pour tout ℓ-élément y de H . Pour tout caractère irréductible χ de G et pour tout $h \in H$, on pose* $\chi(xh) = \sum a(\chi,\zeta)\zeta(h)$, *où ζ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de H . Soit $B(\chi,G)$ (resp. $B(\zeta,H)$) le bloc de G qui contient χ (resp. le bloc de H qui contient ζ). Enfin soit* $B(\zeta,x) = A\langle x\rangle \otimes_A B(\zeta,H)$ *le bloc de $C_G(x)$ défini par $B(\zeta,H)$. Si* $a(\chi,\zeta) \neq 0$, *on a*

$$(\{1\},B(\chi,G)) \subset (\langle x\rangle,B(\zeta,x)) .$$

La proposition (2.8) mène donc à considérer les paires de Brauer qui ne peuvent pas être agrandies par ce procédé.

(2.10) Définition.- Une paire de Brauer $(X,B(\chi_D,X))$ est dite *extrémale* si le diagramme D n'a pas de ℓ-crochet.

La formule de Murnagham-Nakayama permet d'établir la caractérisation suivante des paires extrémales.

(2.11) *La paire* $(X,B(\chi_D,X))$ *est extrémale si et seulement si elle est autocentralisante* (cf.(1.8).

De plus, dans ce cas, le caractère $\chi_D \otimes 1$ *du groupe* $C_G(X) = \mathfrak{S}(E^X) \times G(X)$ *en est le caractère canonique* (cf.(1.9)).

On voit de plus, d'après la définition de $\mathcal{P}(G,\ell)$, que si $(X,B(\chi_D,X))$ est une paire extrémale, alors $(X,D) \in \mathcal{P}(G,\ell)$, avec $|D| = n^X$. Dans ce cas, on pose $B_D(X) = B(\chi_D,X)$.

Une paire extrémale n'est pas nécessairement maximale. De fait, si X' est un ℓ-sous-groupe de $\mathfrak{S}(E-E^X)$ qui contient X , on a $C_G(X') = \mathfrak{S}(E^X) \times G(X')$ avec $G(X') \subset G(X)$, et il est immédiat de vérifier que si $(X,B_C(X))$ est une paire extrémale, on a (1) $(X',C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$ et $|C| = |E^{X'}|$,

(2) $(X,B_C(X)) \subset (X',B_C(X'))$.

La caractérisation de la maximalité donnée en (1.9) permet d'ailleurs d'établir le résultat-clef suivant.

(2.12) <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> $(X,C) \in \mathcal{P}(G,\ell)$ <u>avec</u> $|C| = |E^X|$. <u>La paire extrémale</u> $(X,B_C(X))$ <u>est maximale si et seulement si</u> X <u>est un</u> ℓ-<u>sous-groupe de Sylow de</u> $\mathfrak{S}(E-E^X)$.

On déduit aisément de la proposition précédente le paramétrage des blocs de G énoncé en (2.3), puisque les blocs correspondent aux classes de conjugaison de paires maximales. En appliquant alors ce paramétrage aux blocs de $\mathfrak{S}(E^X)$, pour tout ℓ-sous-groupe X de G , on en déduit le paramétrage des paires décrit en (2.2). Des considérations classiques sur la fusion des ℓ-sous-groupes permettent alors de terminer la démonstration de (2.2) (et donc de (2.5)).

§3. LES ℓ-BLOCS DE $GL(n,q)$ ET $U(n,q^2)$ ET LEUR STRUCTURE LOCALE

A. <u>Notations et conventions</u>

<u>Préliminaire</u>

Soit p un nombre premier, soit q une puissance de p et soit n un entier naturel. <u>Le groupe unitaire</u> $U(n,q^2)$, ensemble des éléments M de $GL(n,q^2)$ telles que $M^t\overline{M} = I$ (la conjugaison est définie par l'élévation à la puissance q de chaque élément de la matrice), <u>est noté ici</u> $Gl(n,-q)$.

De nombreuses raisons justifient cette notation : des polynômes donnant l'ordre du groupe ou ceux de ses tores maximaux, jusqu'aux conjectures d'Ennola sur les fonctions de Green et les valeurs des caractères (récemment démontrées grâce aux travaux de Hotta, Springer, Kawanaka (cf.[Mi])), la substitution de -q à q permet de passer de l'énoncé concernant $GL(n,q)$ à celui concernant $U(n,q^2)$. Nous allons voir d'ailleurs que, si ℓ est différent de p , il en est de même pour les ℓ-blocs : là où intervient, pour $GL(n,q)$, l'ordre $\varphi_q(\ell)$ de q modulo ℓ , on doit faire intervenir, pour $U(n,q^2)$, l'ordre $\varphi_{-q}(\ell)$ de -q modulo ℓ , comme le montre la description succincte suivante (qui résulte des théorèmes principaux énoncés plus loin).

Soit $\varepsilon = \pm 1$. Les caractères du groupe $GL(n,\varepsilon q)$ sont paramétrés par les classes de conjugaison sous G des paires (s,λ) , où s est un élément de $\mathcal{S}(G)$ et où λ est un caractère unipotent de $C_G(s)$ (cf. §4) : c'est la "décomposition de Jordan" des caractères de $GL(n,\varepsilon q)$, mise en évidence par les travaux de Green ([Gr]) , Lusztig et Lusztig-Srinivasan ([L-S]). Fong et Srinivasan ont montré ([F-S]) que les ℓ-blocs de $GL(n,\varepsilon q)$ admettent aussi une "décomposition de Jordan". Appelons bloc unipotent de G tout bloc qui contient un caractère unipotent. Les caractères unipotents sont classifiés par les diagrammes de Young de cardinal n . Les blocs unipotents sont classifiés par les diagrammes de Young C possédant les propriétés suivantes : (1) $|C|\leqslant n$ et $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$ divise $n-|C|$,

(2) C n'a pas de $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$-crochet ,

où $\varphi_{\varepsilon q}(\ell) = \min\{m \; ; \; (\varepsilon q)^m \equiv 1 \bmod. \ell\}$.

Les données

Pour présenter les ℓ-blocs de $GL(n,\varepsilon q)$, on doit en fait décrire les ℓ-blocs des centralisateurs de certains p'-sous-groupes de $GL(n,\varepsilon q)$. Il est par conséquent commode de chercher d'emblée à décrire les blocs des produits directs de groupes $GL(n_i,\varepsilon_i q_i)$, puisque telle est la structure des centralisateurs des p'-sous-groupes.

Pour ce faire, nous considérons de tels groupes comme groupes de points rationnels de groupes algébriques connexes réductifs définis sur une clôture algébrique du corps à p-éléments, afin de pouvoir utiliser les méthodes de Deligne et Lusztig ([D-L]). Nous avons besoin de notations et conventions précises, que voici.

Groupes de type GL/q

Soit q une puissance de p . Un "groupe de type GL/q" signifie ici les données suivantes : un ensemble fini I , deux familles d'entiers naturels $(n_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I}$, une famille de signes $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$), une famille de corps $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ tels que $\mathbb{F}_i$ soit de cardinal q^{a_i} si $\varepsilon_i = +1$ et de cardinal q^{2a_i} si $\varepsilon_i = -1$; on pose alors

$$G = \prod_{i,\varepsilon_i=+1} GL(n_i,\mathbb{F}_i) \times \prod_{i,\varepsilon_i=-1} U(n_i,\mathbb{F}_i) \quad .$$

On note $V_i = \mathbb{F}_i^{n_i}$, $q_i = q^{a_i}$. Le groupe G a donc une représentation naturelle dans $\bigoplus_{i\in I} V_i$, et il est isomorphe à $\prod_{i\in I} GL(n_i,\varepsilon_i q_i)$.

Groupes de type GL/q et centralisateurs de p'-sous-groupes

Soit X un p'-sous-groupe de G . En utilisant la semi-simplicité de la représentation de X sur $\oplus V_i$, il est immédiat de vérifier que X définit un groupe de type GL/q , i.e. un ensemble de données analogues à celles décrites ci-dessus : un ensemble fini, noté I(X) , et des familles (n_j) , (a_j) , (ε_j) , $(\mathbb{F}_j)$ ($j\in I(X)$), telles que

$$C_G(X) = \prod_{j,\varepsilon_j=+1} GL(n_j,\mathbb{F}_j) \times \prod_{j,\varepsilon_j=-1} U(n_j,\mathbb{F}_j) \quad .$$

[En effet, supposons pour simplifier $|I| = 1$. Si $G = GL(n,\mathbb{F})$, $I(X)$ est l'ensemble des composants isotypiques de l'opération de X sur $V = \mathbb{F}^n$. Si $G = U(n,\mathbb{F})$, $I(X)$ est l'ensemble des $\{\alpha,\alpha^*\}$ où α est un composant isotypique de l'opération de X sur $V = \mathbb{F}^n$, et où α^* est le "composant isotypique contragrédient" (noter que l'on peut avoir $\alpha = \alpha^*$). Dans tous les cas, si $j \in I(X)$, $\mathbb{F}_j$ est l'image de $Z\mathbb{F}X$ dans l'algèbre des endomorphismes d'un composant isotypique associé à j .]

De plus (avec les notations introduites précédemment), pour tout i dans I , on note V_i^X le sous-espace de V_i formé des points fixes par X et on note n_i^X sa dimension sur $\mathbb{F}_i$.

Notons enfin que si G est un groupe de type GL/q , le déterminant, appliqué dans chaque facteur de G , permet de définir un morphisme

$$\det : G \to Z(G) .$$

<u>Les groupes de type GL/q comme groupes de points rationnels</u>

Soit $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $F(q)$ l'endomorphisme de $GL(n,\mathbb{F})$ transformant les matrices $M = (m_{i,j})$ en $(m_{i,j}^q)$ et on note $F(-q)$ l'endomorphisme de $GL(n,\mathbb{F})$ transformant les matrices M en les matrices ${}^t(F(q)(M))^{-1}$. On désigne par $\mathbb{F}_q$ le sous-corps à q éléments de $\overline{\mathbb{F}}$, et on pose

$$GL(n,q) = GL(n,\mathbb{F}_q) \ , \ GL(n,-q) = U(n,\mathbb{F}_{q^2}) \ .$$

Ainsi les sous-groupes de $GL(n,\overline{\mathbb{F}})$ fixes respectivement par $F(q)$ et $F(-q)$ sont $GL(n,q)$ et $GL(n,-q)$.

Un groupe de type GL/q est isomorphe, en tant que groupe, au groupe des points rationnels d'un groupe algébrique connexe réductif défini sur $\overline{\mathbb{F}}$. En effet, soit $\overline{I}$ un ensemble fini , et soit $\overline{G} = \prod_{i\in\overline{I}} GL(n_i,\overline{\mathbb{F}})$ muni d'un endomorphisme F possédant la propriété suivante : F induit une permutation de $\overline{I}$, et si F^{a_i} est la plus petite puissance de F qui stabilise le facteur $GL(n_i,\overline{\mathbb{F}})$, il existe $\varepsilon_i = \pm 1$ tel que F^{a_i} opère sur ce facteur comme $F(\varepsilon_i q^{a_i})$. Le groupe des points rationnels $G = \overline{G}^F$ est alors isomorphe au produit $\prod_{i\in I} GL(n_i,\varepsilon_i q^{a_i})$, où I désigne un système de représentants des orbites de l'opération induite par F sur l'ensemble $\overline{I}$.

<u>Eléments semi-simples et ensemble $S(G)$</u>

Soit $G = GL(n,\mathbb{F})$ (resp. $U(n,\mathbb{F})$), où $\mathbb{F}$ est un corps à q (resp. q^2) éléments. Soit g un élément semi-simple de G et soit $L = C_G(g)$. On note $I(g) = I(<g>)$ et on définit L_i , n_i , a_i (pour $i\in I(g)$) par : $L = \prod_{i\in I(g)} L_i$ et $L_i \simeq GL(n_i,(\varepsilon q)^{a_i})$ où ε vaut $+1$ si $G = GL(n,\mathbb{F})$ et -1 si $G = U(n,\mathbb{F})$. On pose $g = (g_i)_{(i\in I(g))}$. Si $\mathbb{F}_i$ désigne le corps engendré par $Z(L_i)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$, le groupe $Z(L_i)$ est égal au sous-groupe d'ordre $|(\varepsilon q)^{a_i}-1|$ de $\mathbb{F}_i^{\times}$.

Supposons choisis une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$,
un isomorphisme $\iota : \mu(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
un isomorphisme $\iota' : \bar{\mathbb{F}}^\times \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$.

A chaque famille σ de plongements $\sigma_i : \mathbb{F}_i \to \bar{\mathbb{F}}$ au-dessus de $\mathbb{F}$ est associé un caractère $\zeta_\sigma(g)$ de $Z(L)$ à valeurs dans K , défini de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_i^\times \arrow[r, "\sigma_i"] & \bar{\mathbb{F}}^\times \arrow[r, "\iota'"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ Z(L_i) \arrow[u] \arrow[r, "\zeta_\sigma(g)"] & \mu(K) \subset \mu(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

Soit z_i le générateur particulier de $Z(L_i)$ défini par le plongement correspondant de $\mathbb{F}_i^\times$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Le caractère $\zeta_\sigma(g)$ est défini par l'égalité

$$\iota(\zeta_\sigma(g)(z_i)) = \iota'(\sigma_i(g_i)) .$$

Les caractères $\zeta_\sigma(g)$ ainsi définis (pour les différentes familles σ) sont tous conjugués par $\prod N_G(Z(L_i))$.

On désigne par $S(G)$ l'ensemble des couples (L,ζ) tels qu'il existe un élément semi-simple g de G et des plongements $\mathbb{F} \subset \bar{\mathbb{F}}$, ι , ι' , $\sigma = (\sigma_i)$ tels que $L = C_G(g)$ et $\zeta = \zeta_\sigma(g)$. Si $G = \prod_{i\in I} G_i$ est un groupe de type GL/q quelconque, l'ensemble $S(G)$ est par définition l'ensemble des (L,ζ) où $L = \prod L_i$ et $\zeta = \otimes \zeta_i$ $(i \in I)$ sont tels que $(L_i, \zeta_i) \in S(G_i)$. Si $s = (L,\zeta) \in S(G)$, on note $L = C_G(s)$, $I(s) = I(Z(L))$, et on appelle ordre de s l'ordre du caractère ζ . (Pour des compléments sur l'ensemble $S(G)$, on peut se reporter au §4.B1 ci-dessous et à la note [2]).

B. Les théorèmes principaux

On désigne dorénavant par $\mathbf{D}$ l'ensemble des diagrammes de Young.

(3.1) Soit $\mathbf{P}(G,\ell)$ l'ensemble des triples (X,s,C) , où
X est un ℓ-sous-groupe de G ,
s est un ℓ'-élément de $S(G)$
C est une application de $I(s)$ dans $\mathbf{D}$ vérifiant les propriétés suivantes :
pour tout $j \in I(s)$, on a (1) $|C_j| \leq n_j^X$ et $\varphi_{\varepsilon_j q_j}(\ell)$ divise $n_j^X - |C_j|$,
(2) C_j n'a pas de $\varphi_{\varepsilon_j q_j}(\ell)$-crochet .

(3.2) Théorème (Broué-Puig).- Il y a une application surjective, notée $(X,s,C) \mapsto (X,s,C)_G$, de l'ensemble $\mathbf{P}(G,\ell)$ sur l'ensemble des ℓ-paires de Brauer de G , telle que $(X,s,C)_G \subset (X',s',C')_G$ si et seulement si
(1) $X \subset X'$,
(2) il existe $g \in C_G(X)$ tel que $(s',C') = (s,C)^g$.

Le théorème précédent implique immédiatement les trois propositions suivantes.

1. Paramétrage des paires de Brauer

(3.3) On a $(X,s,C)_G = (X',s',C')_G$ si et seulement si les deux triples sont conjugués par un élément de $C_G(X)$.

2. Paramétrage des blocs (Fong-Srinivasan, [F-S])

(3.4) Les ℓ-blocs de G sont en bijection avec les G-classes de conjugaison de couples (s,C) où

s est un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$

C est une application de $I(s)$ dans $\mathfrak{D}$ possédant les propriétés suivantes : pour tout $j \in I(s)$, on a (1) $|C_j| \leq n_j$ et $\varphi_{\varepsilon_j q_j}(\ell)$ divise $n_j - |C_j|$,

(2) C_j n'a pas de $\varphi_{\varepsilon_j q_j}(\ell)$-crochet .

3. Morphisme de Brauer

Soit X un ℓ-sous-groupe de G . On désigne par $b_{(s,C)}$ l'idempotent primitif de ZkG correspondant (d'après ce qui précède) au bloc de G défini par (s,C) , et si $(X,s',C') \in \mathfrak{P}(G,\ell)$, on désigne par $b_{(s',C')}(X)$ l'idempotent primitif de $ZkC_G(X)$ défini par la paire de Brauer $(X,s',C')_G$.

(3.5) On a $Br_X(b_{(s,C)}) = \sum b_{(s',C')}(X)$ où (s',C') parcourt un système de représentants des $C_G(X)$-classes de conjugaison de couples G-conjugués à (s,C) et telles que $(X,s',C') \in \mathfrak{P}(G,\ell)$.

Les deux résultats suivants peuvent aussi être considérés comme des conséquences du théorème (2.2).

4. Paires maximales et groupes de défaut

Soit $(X,s,C)_G$ une paire de Brauer de G . Pour $j \in I(s)$, on note $[V_j,X]$ le supplémentaire de l'espace V_j^X dans V_j qui est stable par X (cf. A. ci-dessus pour les notations). On note $H_{(X,s)}$ l'image réciproque dans $C_G(s)$ du sous-groupe $\prod_{j\in I(s)} GL([V_j,X],\mathbb{F}_j)$ du groupe $\prod_{j\in I(s)} GL(V_j,\mathbb{F}_j)$. Ainsi le groupe $H_{(X,s)}$ est isomorphe à $\prod_{j\in I(s)} GL(n_j - n_j^X, \varepsilon_j q_j)$.

(3.6) Proposition.- La paire de Brauer $(X,s,C)_G$ est maximale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) pour tout $j \in I(s)$, on a $|C_j| = n_j^X$,

(2) X est un ℓ-sous-groupe de Sylow de $H_{(X,s)}$.

Cette proposition montre en particulier que

(3.7) tout groupe de défaut d'un ℓ-bloc d'un groupe de type GL/q est un ℓ-sous-groupe de Sylow d'un sous-groupe de même type.

5. La catégorie de Brauer

Soit (s,C) un couple comme en (3.4) et soit B le bloc de G qu'il définit

On choisit une décomposition en somme directe $V_j = V_j^0 \oplus V_j^1$ de sorte que la dimension de V_j^0 sur $\mathbb{F}_j$ soit égale à $|C_j|$, et on désigne par H l'image réciproque dans $C_G(s)$ du sous-groupe $\prod_{j\in I(s)} GL(V_j^1,\mathbb{F}_j)$ de $\prod_{j\in I(s)} GL(V_j,\mathbb{F}_j)$. Ainsi le groupe H est naturellement isomorphe à $\prod_{j\in I(s)} GL(n_j-|C_j|,\varepsilon_j q_j)$.

(3.8) Proposition.- L'application $X \mapsto (X,s,C)_G$ envoyant les objets de la catégorie de Frobenius $\mathcal{F}r_\ell(H)$ sur des objets de la catégorie de Brauer $\mathbf{Br}_B(G)$ définit une équivalence de catégories.

6. Caractères dans les blocs

Avec les données définies en A. ci-dessus, les caractères irréductibles de G sur K sont en correspondance naturelle avec les classes de conjugaison sous G des couples (t,D) où t est un élément de $\mathcal{S}(G)$

D est une application de I(t) dans $\mathfrak{D}$ telle que, pour tout $j \in I(t)$, $|D_j| = n_j$ (cf.§4.B.3 ci-dessous).

Si (t,D) est un tel couple , on désigne par $\chi^G_{(t,D)}$ le caractère irréductible de G correspondant.

Le résultat suivant, qui est une conséquence de la démonstration du théorème principal (3.2) (cf.§4.C. ci-dessous), et dont l'énoncé donné ici doit être considéré comme une continuation de l'énoncé de (3.2), est le résultat principal de [F-S] (sous l'hypothèse supplémentaire $\ell \neq 2$). (La notion de ℓ'-composante d'un élément de $\mathcal{S}(G)$, est définie au §4.B1).

(3.9) Théorème (Fong-Srinivasan [F-S]).- Soit B le ℓ-bloc de G défini par (s,C) . Le caractère $\chi^G_{(t,D)}$ appartient à B si et seulement si :

(1) les ℓ'-composantes de t sont G-conjuguées à s ,

(2) Supposons que s est une ℓ'-composante de t et ainsi que I(s) est un quotient de I(t). Pour tout $i \in I(s)$, il existe $j \in I(t)$ d'image i et tel que C_i s'obtienne en enlevant à D_j un certain nombre de $\varphi_{\varepsilon_j q_j}(\ell)$-crochets.

On peut noter que pour $\ell = 2$, l'ensemble des résultats précédents se simplifie notablement. En effet, pour tous q et ε on a alors $\varphi_{\varepsilon q}(2) = 1$, et par conséquent le seul diagramme "sans $\varphi_{\varepsilon q}(2)$-crochet" est le diagramme ∅ . Nous laissons au lecteur le soin de ré-écrire tous les énoncés précédents en tenant compte de cette remarque.

§4. L'INDUCTION DE DELIGNE-LUSZTIG ET LA MÉTHODE DE DÉMONSTRATION

A. Les outils : l'induction de Deligne-Lusztig

Nous commençons par rappeler brièvement les principe de la construction de

Deligne-Lusztig ([D-L], [Lu.1], [Sr]).

Soit $\overline{G}$ un groupe algébrique connexe réductif sur une clôture $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}_p$, muni d'un endomorphisme de Frobenius F lui donnant une structure rationnelle sur le sous-corps à q éléments $\mathbb{F}_q$ de $\overline{\mathbb{F}}$. On pose $G = \overline{G}^F$. Soit $\overline{U}$ le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de $\overline{G}$ (non nécessairement rationnel) dont le complément de Levi $\overline{L}$ est rationnel ($\overline{L}$ sera appelé "sous-groupe de Levi rationnel de $\overline{G}$"). On pose $L = \overline{L}^F$. On considère la variété

$\mathfrak{V}(\overline{U}) = \{v \in \overline{G}\ ;\ v^{-1}F(v) \in F(\overline{U})\}$, qui est munie d'une opération évidente du groupe fini $G \times L$:

pour $(g,l) \in G \times L$ et $v \in \mathfrak{V}(\overline{U})$, on pose $(g,l).v = gvl^{-1}$.

Les groupes $H^i_c(\mathfrak{V}(\overline{U}),\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de la cohomologie ℓ-adique à support compact de $\mathfrak{V}(\overline{U})$ sont ainsi munis d'une opération de $G \times L$. On pose

$$\Lambda(\mathfrak{V}(\overline{U})) = \sum (-1)^i H^i_c(\mathfrak{V}(\overline{U}),\overline{\mathbb{Q}}_\ell) .$$

Puisque la trace d'un élément d'ordre fini agissant sur $\Lambda(\mathfrak{V}(\overline{U}))$ est un entier (cf.[D-L]), il existe un élément du groupe de Grothendieck des $K(G\times L)$-modules dont le caractère est la trace sur $\Lambda(\mathfrak{V}(\overline{U}))$ et qui est isomorphe à son dual. On le désigne (de même, par abus de notation, que son caractère) par $\Lambda^G_L(\overline{U})$. Ainsi

$$\Lambda^G_L(\overline{U})(g,l) = \mathrm{Tr}((g,l);\Lambda(\mathfrak{V}(\overline{U}))) .$$

Dans les cas que nous considérons (où $\overline{G}$ est un produit direct de groupes simples de type A), il s'avère que $\Lambda^G_L(\overline{U})$ est indépendant du choix de $\overline{U}$ et ne dépend que de $\overline{L}$. Il est vraisemblable (bien que non encore complètement démontré) qu'il en est de même dans le cas général. La notation Λ^G_L à la place de $\Lambda^G_L(\overline{U})$, que nous utiliserons, n'est donc que légèrement abusive.

L'induction de Deligne-Lusztig est l'homomorphisme R^G_L du groupe de Grothendieck $\mathcal{R}_K(L)$ des KL-modules dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}_K(G)$ défini par la formule

$$R^G_L(N) = \Lambda^G_L \otimes_{KL} N \quad \text{pour tout KL-module } N ,$$

où l'on considère de manière évidente le "module" Λ^G_L comme un (KG,KL)-"bimodule".

De même, la restriction de Deligne-Lusztig

$$^*R^G_L : \mathcal{R}_K(G) \to \mathcal{R}_K(L)$$

est définie par la formule $^*R^G_L(M) = (\Lambda^G_L)^* \otimes_{KG} M$ pour tout KG-module M , où le dual $(\Lambda^G_L)^* =$ "$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^G_L,K)$" de Λ^G_L est considéré de manière évidente comme un (KL,KG)-"bimodule".

Les applications R^G_L et $^*R^G_L$ sont adjointes l'une de l'autre pour les produits scalaires usuels sur $\mathcal{R}_K(G)$ et $\mathcal{R}_K(L)$. En termes de caractères, on a les formules suivantes (notations évidentes) :

$$R^G_L(\zeta)(g) = \frac{1}{|L|} \sum_{l\in L} \Lambda^G_L(g,l)\zeta(l) \qquad \text{et} \qquad ^*R^G_L(\chi)(l) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \Lambda^G_L(g,l)\chi(g) .$$

La proposition suivante est l'un des éléments clé du travail présenté ici. Elle établit en effet le "bon comportement" relatif de l'opération de Deligne-Lusztig et de l'application de décomposition généralisée $d_\ell^{x,G}$ définie en (1.11). Cette proposition généralise des résultats successifs de Curtis ([Cu.1]), Fong et Srinivasan ([F-S]), Lusztig, Digne et Michel ([Mi]). Pour l'énoncer, nous introduisons les notations supplémentaires suivantes.

Soit π un ensemble de nombres premiers ne contenant pas p (par exemple, $\pi = \{\ell\}$, ou $\pi = p'$). Soit x un π-élément de G . L'assertion suivante est une remarque classique de la théorie des groupes réductifs.

(4.1) Le groupe $C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^\circ$ est un π-groupe.

On note $C_G^\circ(x)$ le groupe des points rationnels de $C_{\overline{G}}(x)^\circ$; ce groupe contient donc l'ensemble $C_G(x)_{\pi'}$ des π'-éléments de $C_G(x)$.

(4.2) <u>Définition</u>.- On désigne par $d_\pi^{x,G} : \mathcal{ZF}(G) \to \mathcal{ZF}(C_G(x) | C_G(x)_{\pi'})$ l'application définie par

$$d^{x,G}(f)(y) = f(xy) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{ZF}(G) \text{ et } y \in C_G(x)_{\pi'} \ .$$

Il est clair que pour $\pi = \{\ell\}$, on retrouve la définition (1.11).

(4.3) <u>Proposition</u>.- <u>Soient</u> π <u>et</u> x <u>comme ci-dessus. Pour tout sous-groupe de Levi rationnel</u> $\overline{L}$ <u>de</u> $\overline{G}$ <u>contenant</u> x , <u>on a</u>

$$d_\pi^{x,L} \circ {}^*R_L^G = {}^*R_{C_L^\circ(x)}^{C_G^\circ(x)} \circ d_\pi^{x,G} \ .$$

<u>Remarque</u>.- Dans le cas où $\overline{G}$ est le groupe présenté au §3, $C_{\overline{G}}(x)$ est toujours un sous-groupe de Levi (rationnel) de $\overline{G}$.

Plan de la démonstration de (4.3).- Nous suivons ici pour l'essentiel une méthode empruntée à Digne et Michel ([Mi], [D-M]).

1. Grâce à Deligne-Lusztig ([D-L]), on établit d'abord que si $(g,l) \in G \times L$ a pour π-composantes et π'-composantes respectives (x,y) et (g',l') , on a

$$\mathrm{Tr}((g,l);\Lambda(\mathfrak{D}(\overline{U}))) = \mathrm{Tr}((g',l');\Lambda(\mathfrak{D}(\overline{U})^{(x,y)}))$$, où $\mathfrak{D}(\overline{U})^{(x,y)}$ désigne la sous-variété des points fixes par l'opération de (x,y) .

2. On vérifie que l'application : $\{g \in G \ ; \ x^g = y\} \underset{C_G^\circ(y)}{\times} \mathfrak{D}(C_{\overline{U}}(y)) \to \mathfrak{D}(\overline{U})^{(x,y)}$ telle que $(g,v) \mapsto gv$ est bijective.

On en déduit la formule

$$\Lambda_L^G(g,l) = \frac{1}{|C_G^\circ(y)|} \sum \Lambda_{C_L^\circ(y)}^{C_G^\circ(y)}(g'^g,l')$$ où la somme est prise sur l'ensemble des $g \in G$ tels que $x^g = y$. Il est facile d'en déduire (4.3).

B. Description et propriétés des caractères des groupes de type GL/q

On utilise dorénavant les notations, données et conventions introduites dans le §3.A .

B1. L'ensemble $\mathcal{S}(G)$

L'ensemble $\mathcal{S}(G)$ a été défini au §3.A (cf. aussi note [2]). D'après cette définition, on voit que

(4.4) l'ensemble des orbites de $\mathcal{S}(G)$ sous l'action (par conjugaison) de G est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semi-simples de G .

π-composantes d'un élément de $\mathcal{S}(G)$

Supposons $|I| = 1$, donc $G = GL(n,\mathbb{F})$ ou $U(n,\mathbb{F})$. Supposons choisis un plongement de $\mathbb{F}$ dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}$, et des isomorphismes
$\iota : \mu(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\iota' : \bar{\mathbb{F}}^\times \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$.

Si $s \in \mathcal{S}(G)$, on note alors $\mathcal{el}(s)$ l'ensemble des éléments semi-simples de G tels que $s = (C_G(g), \zeta_\sigma(g))$ pour un choix convenable de σ (cf. §3.A). Si π est un ensemble de nombres premiers, les éléments de $\mathcal{S}(G)$ associés aux π-composantes des éléments de $\mathcal{el}(s)$ sont appelés les π-composantes de s .

L'ensemble des π-composantes de s ne dépend pas des choix initiaux $\mathbb{F} \subset \bar{\mathbb{F}}$, ι et ι' . Ainsi, si s' est une π-composante de s , on a

(πC.1) l'ordre de s' est la π-partie de l'ordre de s ,

(πC.2) $Z(C_G(s')) \subset Z(C_G(s))$ et $I(s')$ est un ensemble quotient de $I(s)$.

Une définition "intrinsèque" de $\mathcal{S}(G)$

Supposons $|I| = 1$, donc $G \simeq GL(n,\varepsilon q)$. Soit $L = \prod_{I(Z(L))} L_i$, où L_i est isomorphe à $GL(n_i,(\varepsilon q)^{a_i})$, un "sous-groupe de Levi" de G . Un caractère ζ de $Z(L)$ à valeurs dans K définit un élément $s = (L,\zeta)$ de $\mathcal{S}(G)$ si et seulement si

(1) pour tout $i \in I(Z(L))$, on a $\varphi_{\varepsilon q}(|\zeta(Z(L_i))|) = a_i$,

(2) si $L = C_G(g)$ où $g = (g_i)$ et si (i,j) est tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$, il n'existe aucun entier m tel que $\zeta(g_i) = \zeta(g_j)^{(\varepsilon q)^m}$.

Si $s = (L,\zeta) \in \mathcal{S}(G)$, on désigne par $\hat{s}$ le caractère linéaire de $L = C_G(s)$ à valeurs dans K obtenu en composant ζ avec le morphisme $\det : L \to Z(L)$ (bien défini puisque L est un groupe de type GL/q , cf. §3.A).

On peut caractériser les éléments de $\mathrm{Hom}(L/[L,L],K^\times)$ ainsi obtenus ; ce sont les caractères linéaires θ de L tels que

(1) $\theta(g) = \theta(g_s)$ pour tout élément g de L de composante semi-simple g_s ,

(2) pour tout tore maximal T de L , le groupe d'inertie de la restriction $\theta_{|T}$ de θ à T est contenu dans L (en d'autres termes, on a $W_G(T,\theta_{|T}) = W_L(T)$) .

$\mathcal{S}(G)$ et p'-sous-groupes de G

Soit $s = (C_G(s),\zeta) \in \mathcal{S}(G)$, et soit X un p'-sous-groupe de $C_G(s)$. On pose $C_G(X,s) = C_G(X) \cap C_G(s)$, et on définit un élément $s_X = (C_G(X,s),\zeta_X)$ de $\mathcal{S}(C_G(X))$ de la manière suivante : puisque $C_G(s)$ est un groupe de type GL/q , on peut supposer que $C_G(s) = GL(n,\mathbb{F})$ (resp. $U(n,\mathbb{F})$). Dans ce cas, $Z(C_G(X,s))$ est un groupe de type GL/q dont chaque facteur est $GL(1,\mathbb{F}')$ ou $U(1,\mathbb{F}')$ pour une certaine extension $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{F}$. Pour tout élément z d'un tel facteur, on pose alors

$$\zeta_X(z) = \zeta(N_{\mathbb{F}'/\mathbb{F}}(z)) \quad .$$

La surjectivité de la norme dans les extensions finies des corps finis permet alors d'établir que $(C_G(X,s),\zeta_X)$ appartient à $\mathcal{S}(C_G(X)$.

Si X est abélien , le caractère linéaire $\hat{s}_X$ est simplement la restriction à $C_G(X,s)$ du caractère linéaire $\hat{s}$ de $C_G(s)$. La relation entre $\hat{s}$ et $\hat{s}_X$ est plus compliquée à décrire si X n'est pas abélien ; mentionnons simplement l'exemple suivant. Supposons $C_G(s) = GL(n,\mathbb{F})$, notons $V = \mathbb{F}^n$, et supposons V isotypique pour l'action de X . Alors si $\mathbb{F}_X$ désigne l'image de $Z\mathbb{F}X$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ et si S est un $\mathbb{F}X$-module simple contenu dans V , on a

$$\hat{s}(g) = \hat{s}_X(g)^{[S:\mathbb{F}_X]} \quad \text{pour tout } g \in C_G(X,s) \ .$$

Enfin l'application de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(C_G(X))$ qui à s associe s_X est surjective. Dans la suite, on omettra souvent l'indice "X" dans s_X .

B2. Les caractères unipotents

La présentation des caractères unipotents donnée ici est essentiellement due à Lusztig (cf. aussi [L-S] et [Sr]). L'idée de prendre pour "tore de référence" le "tore diagonal" et non, comme il est d'usage, le tore quasi-déployé, est empruntée à Digne et Michel ([Mi]) et à Fong et Srinivasan ([F-S]).

(4.5) Definition.- Soit $\overline{G} = \Pi\, GL(n_i,\overline{\mathbb{F}})$ un groupe comme au §3.A. On appelle tore diagonal de $\overline{G}$ et on note $\overline{T}_o$ le produit des tores diagonaux de chacun des $GL(n_i,\overline{\mathbb{F}})$.

Si $\overline{T}_i$ est le tore diagonal de $GL(n_i,\overline{\mathbb{F}})$, F^{a_i} y opère en élevant chaque coefficient d'un élément de $\overline{T}_i$ à la puissance $\varepsilon_i q^{a_i}$. Posons $q_i = q^{a_i}$. Le groupe $T_o = \overline{T}_o^F$ des points rationnels de $\overline{T}_o$ est alors formé d'éléments du groupe $G = \prod_{i\in I} GL(n_i,\varepsilon_i q_i)$ dont les composants dans chacun des facteurs sont diagonaux , et T_o a pour ordre $\prod_{i\in I} |\varepsilon_i q_i - 1|^{n_i}$.

La G-classe de conjugaison de $\overline{T}_o$ servant de référence, il résulte de la théorie générale des groupes réductifs rationnels sur les corps finis (cf. [D-L] ou [Sr]) que les G-classes de conjugaison de tores maximaux rationnels de $\overline{G}$ sont en bijection avec les classes de conjugaison du groupe $W(\overline{T}_o)^F \simeq \prod_{i\in I} \mathfrak{S}_{n_i}$, dorénavant désigné par W (cf. par exemple [Mi]).

Ainsi si $|I| = 1$ et $G = GL(n,\varepsilon q)$, les G-classes de conjugaison de tores maximaux rationnels sont en bijection avec les partitions de n , de sorte qu'un tore correspondant à la partition $((a)^\alpha,(b)^\beta, \ldots)$ de n $(n = \alpha a+\beta b+\ldots)$ a pour groupe de points rationnels un groupe d'ordre $|(\varepsilon q)^a-1|^\alpha \times |(\varepsilon q)^b-1|^\beta \times \ldots$. On appelle <u>tore de Coxeter</u> tout tore correspondant à l'élément de Coxeter de W . Dans le cas où $|I| = 1$ (cf. ci-dessus), les tores de Coxeter correspondent aux cycles de longueur n , leurs points rationnels sont des groupes d'ordres $|(\varepsilon q)^n-1|$ et ce sont les seuls tores cycliques de G .

Pour $w \in W$, on note R_w le caractère (virtuel) de G défini par $R_w = R_T^G(1)$ où $\overline{T}$ est un élément de la classe de conjugaison correspondant à w .

Les caractères de W sont en bijection avec les applications D de I dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des diagrammes de Young telles que pour tout $i \in I$, $|D_i| = n_i$. Si D est une telle application, on désigne par χ_D le caractère de W qui lui correspond (cf. §2.A).

(4.6) <u>Les caractères unipotents</u> de G sont les caractères irréductibles de G sur K égaux, aux signes près, aux fonctions

$$f_D = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} \chi_D(w)R_w \quad , \text{ où D parcourt l'ensemble des}$$

applications de I dans $\mathcal{D}$ décrites ci-dessus.

Pour la théorie des blocs, un rôle essentiel est joué (voir ci-dessous) par l'induction et la restriction de Deligne-Lusztig des caractères unipotents. Les résultats qui suivent ((4.8) et (4.9)) sont adaptés de résultats dûs à Fong et Srinivasan ([F-S]). La proposition (4.9) permet de faire le lien entre les opérations de Deligne-Lusztig et la combinatoire des diagrammes de Young.

(4.7) On dit qu'un sous-groupe de Levi rationnel de $\overline{G}$ est <u>de type diagonal</u> s'il contient un tore G-conjugué au tore diagonal.

Si $\overline{L}$ est un sous-groupe de Levi rationnel contenant $\overline{T}_o$, posons $W_L = W_L(\overline{T}_o)^F$: le groupe W_L s'identifie de façon naturelle à un sous-groupe de W .

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la formule (4.6) .

(4.8) <u>Lemme</u>.- Soit $\overline{L}$ un sous-groupe de Levi rationnel de $\overline{G}$ de type diagonal, soient χ_D et $\chi_{D'}$ des caractères irréductibles respectifs de W et W_L correspondant à des applications convenables D et D' , et soient f_D et $f_{D'}$ les fonctions qui leur correspondent selon (4.6). On a

$$\langle {}^*R_L^G(f_D),f_{D'}\rangle_L = \langle \mathrm{Res}_{W_L}^W(\chi_D),\chi_{D'}\rangle_{W_L} .$$

Pour énoncer la proposition suivante, nous avons besoin de définir l'analogue, pour le cas de $GL(n,\varepsilon q)$, des cycles du groupe symétrique.

On suppose donc $\overline{G} = GL(n,\overline{\mathbb{F}})$, $F = F(\varepsilon q)$, donc $G = GL(n,\varepsilon q)$ et $W = \mathfrak{S}_n$.

(4.9) Soit e un entier $\leqslant n$. On appelle e-cycle de G tout élément semi-simple x de G de polynôme caractéristique $(X-1)^{n-e}(X-a)(X-a^{\varepsilon q})\ldots(X-a^{(\varepsilon q)^{e-1}})$, où a est un élément d'ordre m avec $\varphi_{\varepsilon q}(m) = e$. Si x est un e-cycle de G , on a $C_G(x) = G_o \times G_1$ où $G_o \simeq GL(1,(\varepsilon q)^e)$, $G_1 \simeq GL(n-e,\varepsilon q)$, $x \in G_o$.

Soit D un diagramme de Young de cardinal n , soit D' un diagramme de Young de cardinal n-e . Si x est un e-cycle de G , D' définit un caractère unipotent de $C_G(x)$, égal (au signe près) à $1 \otimes f_{D'}$ où 1 est le caractère trivial de G_o et $f_{D'}$ la fonction sur G_1 associée à D'.

Identifions de la manière habituelle le groupe $\mathfrak{S}_e \times \mathfrak{S}_{n-e}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. On désigne par γ_e la fonction caractéristique de l'ensemble des e-cycles dans $\mathfrak{S}_e$.

(4.9) Proposition.- Avec les notations précédentes, on a

$$<{}^*R^G_{C_G(x)}(f_D),(1\otimes f_{D'})>_{C_G(x)} = <\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_e\times\mathfrak{S}_{n-e}}(\chi_D),(e\gamma_e\otimes\chi_{D'})>_{\mathfrak{S}_e\times\mathfrak{S}_{n-e}} .$$

En particulier ce produit scalaire n'est différent de 0 que si D' se déduit de D en enlevant un e-crochet, auquel cas il vaut $(-1)^{h(D,D')}$.

La démonstration est immédiate grâce au lemme (4.8) , puis en utilisant la formule de Murnagham-Nakayama (2.1).

B3. La décomposition de Jordan des caractères irréductibles

Soit s un élément de $\mathcal{S}(G)$ et soit λ un caractère unipotent de $C_G(s)$. On pose

$$f^G_{(s,\lambda)} = R^G_{C_G(s)}(\hat{s}\lambda) .$$

(4.10) Théorème (Lusztig).- (1) Il existe $\varepsilon_s = \pm 1$ tel que $\varepsilon_s f^G_{(s,\lambda)}$ soit un caractère irréductible de G .

(2) L'application $(s,\lambda) \mapsto \varepsilon_s f^G_{(s,\lambda)}$ définit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison sous G des couples (s,λ) (où s est un élément de $\mathcal{S}(G)$ et λ un caractère unipotent de $C_G(s)$) sur l'ensemble des caractères irréductibles de G .

Les deux propriétés suivantes des fonctions $f^G_{(s,\lambda)}$ sont essentielles pour la démonstration des résultats énoncés au §3.

Soit π un ensemble de nombres premiers ne contenant pas p . On désigne par d^G_π l'application $d^{1,G}_\pi : \mathcal{ZF}(G) \to \mathcal{ZF}(G|G_{\pi'})$ (cf.(4.2)).

(4.11) Proposition.- (1) Soit $t \in \mathcal{S}(G)$, soit $s \in \mathcal{S}(G)$ une π'-composante de t , et soit μ un caractère unipotent de $C_G(t)$. On a

$$d_\pi^G(f^G_{(t,\mu)}) = \sum \langle\lambda, R^{C_G(s)}_{C_G(t)}(\mu)\rangle \; d_\pi^G(f^G_{(s,\lambda)})$$, où λ parcourt l'ensemble des caractères unipotents de $C_G(s)$.

(2) La famille des $d_\pi^G(f^G_{(s,\lambda)})$, où (s,λ) parcourt un système de représentants des G-classes de conjugaison de couples tels que s est un π'-élément de $\mathcal{S}(G)$ et λ un caractère unipotent de $C_G(s)$, est une base de $\mathcal{ZF}(G|G_{\pi'})$.

Indications sur la démonstration.- La première assertion se démontre en utilisant (4.3) et (4.10). Il en résulte que la famille décrite dans la deuxième assertion est un système générateur de $\mathcal{ZF}(G|G_{\pi'})$. Un argument de comptage permet de conclure.

(4.12) Proposition.- Soit x un π-élément de G , soit s un π'-élément de $\mathcal{S}(G)$ et soit λ un caractère unipotent de $C_G(s)$. On a

$$d_\pi^{x,G}(f^G_{(s,\lambda)}) = \sum_{(s^g,\mu)} \langle\lambda, R^{C_G(s)}_{C_G(s,{}^g x)}({}^g\mu)\rangle \; d_\pi^{C_G(x)}(f^{C_G(x)}_{(s^g,\mu)})$$, où s^g parcourt un système de représentants des classes de conjugaison sous $C_G(x)$ des G-conjugués de s tels que $x \in C_G(s^g)$, et où μ parcourt l'ensemble des caractères unipotents de $C_G(x,s^g)$.

Comme précédemment, la démonstration est facile à l'aide de (4.3) et (4.10).

C. Indications sur la démonstration des résultats principaux

La méthode est la même que celle présentée au §2 pour la cas du groupe symétrique : elle consiste à "agrandir" une paire arbitraire jusqu'à obtenir une paire maximale, puis à classifier les paires maximales donc les blocs (d'après (1.6)).

Une paire arbitraire est *a priori* de la forme

$$(X, B(f^{C_G(X)}_{(t,\mu)}))$$, où X est un ℓ -sous-groupe de G , t un élément de $\mathcal{S}(C_G(X))$ et μ un caractère unipotent de $C_G(X,t)$, et où $B(f^{C_G(X)}_{(t,\mu)})$ désigne le bloc de $C_G(X)$ contenant le caractère irréductible $\pm f^{C_G(X)}_{(t,\mu)}$.

La première étape consiste à se ramener au cas où t est un ℓ'-élément. En effet, grâce à (4.11) on peut démontrer

(4.13). Proposition.- Soient X , t et μ comme ci-dessus, définissant $(X, B(f^{C_G(X)}_{(t,\mu)}))$. Soit s une ℓ'-composante de $t \in \mathcal{S}(C_G(X))$. Si λ est un caractère unipotent du groupe $C_G(X,s)$ tel que $\langle\lambda, R^{C_G(X,s)}_{C_G(X,t)}(\mu)\rangle \neq 0$, alors $B(f^{C_G(X)}_{(t,\mu)}) = B(f^{C_G(X)}_{(s,\lambda)})$.

La deuxième étape consiste à agrandir une paire arbitraire $(X, B(f^{C_G(X)}_{(s,\lambda)}))$ (où l'on peut supposer que s est un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$) par un procédé analogue à celui employé pour le groupe symétrique (cf.(2.8)). On utilise pour cela le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate à partir des propositions (4.11) et (4.12) et du Second Théorème Principal de Brauer (sous la forme énoncée en (1.13)).

(4.14) Proposition.- Soit X un ℓ-sous-groupe de G , soit s un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$ tel que $X \subset C_G(s)$ et soit λ un caractère unipotent de $C_G(X,s)$. Soit x un ℓ-élément de $C_G(X,s)$. On pose $X' = X\langle x\rangle$. Si μ est un caractère unipotent de $C_G(X',s)$ tel que $\langle\lambda, R_{C_G(X',s)}^{C_G(X,s)}(\mu)\rangle \neq 0$, on a $(X, B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)})) \subset (X', B(f_{(s,\mu)}^{C_G(X')}))$.

La proposition précédente mène donc à considérer les paires qui ne peuvent pas être agrandies par ce procédé.

(4.15) Définition.- Soit $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))$ une paire (notations comme ci-dessus), où s est un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$. On dit que cette paire est extrémale si, pour tout ℓ-élément x de $C_G(X,s)$, on a $^*R_{C_G(X,x,s)}^{C_G(X,s)}(\lambda) = 0$, sauf pour $x \in Z(X)$.

La caractérisation suivante des paires extrémales est fondamentale (comparer avec le cas du groupe symétrique (2.11)). L'assertion (ii) fait le lien avec la théorie locale des blocs. L'assertion (iii) fait le lien avec la combinatoire des diagrammes de Young, comme nous le verrons plus loin.

(4.16) Proposition.- Soit $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))$ une paire, où s est un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La paire $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))$ est extrémale ,

(ii) La paire $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))$ est autocentralisante,

(iii) (Enguehard) Pour tout tore maximal T de $C_G(X,s)$ dont le ℓ-sous-groupe de Sylow T_ℓ n'est pas contenu dans $Z(X)$, on a $\langle R_T^{C_G(X,s)}(1),\lambda\rangle = 0$.

De plus, dans ce cas, $f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}$ est le caractère canonique de la paire (cf.(1.9)).

Grâce à (4.12), l'équivalence de (i) et (ii) est facile. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate en utilisant la transitivité de la restriction de Deligne-Lusztig. L'implication inverse résulte du fait que tous les caractères unipotents d'un groupe de type GL/q (en l'occurrence, le groupe $C_G(X,s)$) sont des fonctions uniformes (cf.[Sr]).

La structure, trés particulière, des paires extrémales n'est pas difficile à mettre en évidence à partir de la proposition précédente. Pour décrire cette structure, supposons que $|I| = 1$, i.e. que $G = GL(n,\varepsilon q)$. On note V l'espace vectoriel de la représentation donnée de G sur le corps $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ou $\mathbb{F}_{q^2}$ selon que $\varepsilon = +1$ ou -1). Soit X un ℓ-sous-groupe de G et soit s un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$ tel que $X \subset C_G(s)$. Soit $V = V^X \oplus [V,X]$ la décomposition canonique de V pour l'action de X , et soit $G_o \times G_1$ ($G_o \simeq GL(n^X, \varepsilon q)$, $G_1 \simeq GL(n-n^X, \varepsilon q)$) le sous-groupe de Levi de type diagonal correspondant à cette décomposition. On pose $s = (s_o, s_1)$.

$$\begin{array}{ccccccc} C_G(X) & = & G_o & \times & C_{G_1}(X) & & H = C_{G_1}(s) \\ | & & | & & | & / & \\ C_G(X,s) & = & C_{G_o}(s) & \times & C_{G_1}(X,s) & & \end{array}$$

Si λ est un caractère unipotent de $C_G(X,s)$, on désigne par $\lambda = \lambda_o \otimes \lambda_1$ sa décomposition associée (λ_o caractère unipotent de $C_{G_o}(s)$, λ_1 caractère unipotent de $C_{G_1}(X,s)$) .

(4.17) <u>Proposition</u>.- <u>Avec les notations précédentes, supposons la paire</u> $(X, B(f^{C_G(X)}_{(s,\lambda)}))$ <u>extrémale</u>.

(1) <u>Le caractère</u> λ_o (<u>resp</u>. $R^{G_o}_{C_{G_o}(s)}(\hat{s}_o \lambda_o)$) <u>est un caractère de défaut nul</u> (i.e. provenant d'un module projectif, cf [Se]) <u>du groupe</u> $C_{G_o}(s)$ (<u>resp</u>. G_o) .

(2) <u>Le groupe</u> $C_{G_1}(X,s)$ <u>est un tore de Coxeter de</u> $C_{G_1}(s)$. <u>En particulier</u>, $\lambda_1 = 1$.

(3) <u>On a</u> $N_G(X, B(f^{C_G(X)}_{(s,\lambda)})) = C_G(X) N_H(X)$ <u>et</u> $C_G(X)_\ell \subset Z(X)$.

On peut noter le caractère "général" des assertions précédentes, prêtes pour être adaptées au cas des autres types de groupes classiques. Cependant, la relation avec la combinatoire particulière des diagrammes de Young trouve une explication naturelle à ce point de la démonstration.

Le lien avec l'amputation des diagrammes par des $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$-crochets est clair d'après les propositions (4.9) et (4.14) : on agrandit les paires en utilisant des ℓ-éléments qui sont des "$\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$-cycles". La troisième assertion de la proposition (4.16) permet en outre d'expliquer directement pourquoi les paires extrémales sont associées à des diagrammes de Young "sans $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$-crochet". Supposons en effet que $G = GL(n, \varepsilon q)$, et soit λ un caractère unipotent de G tel que $\langle R^G_T(1), \lambda \rangle = 0$ pour tout tore maximal T de G tel que $T_\ell \not\subset Z(G)$ (cf.(4.16)(iii)). Si ℓ divise $|Z(G)| = |\varepsilon q - 1|$ (i.e. si $\varphi_{\varepsilon q}(\ell) = 1$), il est immédiat de vérifier qu'alors $n = 1$. Supposons donc que $\varphi_{\varepsilon q}(\ell) \neq 1$. Si $\lambda = \pm f_D$, où D est un diagramme de cardinal n (cf. §4.B3), la formule (4.6) montre que le caractère χ_D de $\mathfrak{S}_n = W$ possède la propriété suivante : si w est un élément de $\mathfrak{S}_n$ dont l'un des cycles a une longueur divisible par $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$, alors $\chi_D(w) = 0$. On retrouve là une caractérisation connue des caractères associés à un diagramme de Young sans $\varphi_{\varepsilon q}(\ell)$-crochet (cf.[Ja]).

La dernière étape de l'agrandissement des paires consiste à passer d'une paire de Brauer extrémale à une paire de Brauer maximale. La caractérisation de la maximalité donnée en (1.10) et la proposition (4.17)(3) montrent que, avec les notations précédentes utilisées en (4.17) :

(4.18) la paire extrémale $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))$ est maximale si et seulement si X est un ℓ-sous-groupe de Sylow de H .

A ce point de la démonstration, on peut déjà fournir une classification des blocs comme énoncée en (3.4), de même que la description des paires maximales et des groupes de défaut énoncée en (3.6). Cependant, pour obtenir une démonstration complète des énoncés du §3, il est nécessaire de vérifier une inclusion supplémentaire.

Reprenons les notations introduites pour (4.17). Soit X' un ℓ-sous-groupe de $H = C_{G_1}(s)$ contenant X . Puisque $X'\subset G_1$, on a $V^{X'} = V^X$ et par conséquent

$$C_G(X') = G_o \times C_{G_1}(X') \quad , \text{ où } \quad C_{G_1}(X') \subset C_{G_1}(X) \quad .$$

De même, $C_G(X',s) = C_{G_o}(s) \times C_{G_1}(X',s)$. Le caractère unipotent $\lambda = \lambda_o \otimes 1$ de $C_G(X,s)$ définit un caractère unipotent de $C_G(X',s)$ encore désigné par $\lambda = \lambda_o \otimes 1$.

(4.19) <u>Lemme</u>.- Avec les notations précédentes, on a $(X,B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X)}))\subset(X',B(f_{(s,\lambda)}^{C_G(X')}))$.

Pour démontrer ce lemme, on voit, d'après (4.17) et nos conventions ci-dessus, que l'on peut se ramener au cas où le groupe $C_G(X,s)$ est un tore de Coxeter de $C_G(X)$ (donc de $C_G(X')$). Le problème se réduit en fait sans difficulté au cas suivant.

(4.20) On suppose que $\varphi_{\varepsilon q}(\ell) = 1$. Soit $G = GL(n,(\varepsilon q)^{\ell})$ et soit $\sigma = F(\varepsilon q)$ opérant sur G (cf.§3.A) : σ est un automorphisme d'ordre ℓ de G , et $G^{\sigma} = GL(n,\varepsilon q)$. Soit $s = (T,\xi)$ un ℓ'-élément de $\mathcal{S}(G)$ fixe par σ et tel que T est un tore de Coxeter de G . L'élément s définit un élément de $\mathcal{S}(G^{\sigma})$, encore noté s . Le caractère $R_T^G(\hat{s})$ (resp. $R_{T^{\sigma}}^{G^{\sigma}}(\hat{s})$) est, au signe près, un caractère irréductible de G (resp. de G^{σ}) , et définit donc (cf.§1) un idempotent primitif de ZkG (resp. de ZkG^{σ}) noté $b_s(G)$ (resp. $b_s(G^{\sigma})$. Le caractère $R_T^G(\hat{s})$ est fixe par σ , et il en est donc de même de l'idempotent $b_s(G)$. Enfin on désigne par Br_{σ} le morphisme de Brauer associé au ℓ-groupe $<\sigma>$ dans le produit semi-direct de G par $<\sigma>$. On a

$$Br_{\sigma}(b_s(G)) = b_s(G^{\sigma}) \ .$$

L'ingrédient essentiel pour démontrer l'assertion précédente est le résultat général suivant.

(4.21) Proposition (Digne).- Soit $\overline{G}$ un groupe réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}$ muni d'un endomorphisme F qui lui donne une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\overline{T}$ un tore maximal rationnel de $\overline{G}$. On pose

$$T = \overline{T}^F \quad , \quad G = \overline{G}^F \quad , \quad T_o = \overline{T}^{F^\ell} \quad , \quad G_o = \overline{G}^{F^\ell} \quad .$$

Pour tout $g \in G$, on a

$$R_T^G(1)(g) \equiv R_{T_o}^{G_o}(1)(g) \quad \text{mod.}\,\ell \quad .$$

Une fois établi (4.9), des considérations classiques sur la fusion des ℓ-sous-groupes permettent de terminer la démonstration du théorème principal.

D. Bilan et perspectives

Soit G un groupe de type GL/q, soit (s,C) un couple définissant un bloc $B^G_{(s,C)}$ de G (cf.(3.4)). On pose $L = C_G(s)$, et on désigne par B^L_C le bloc "unipotent" de L défini par le couple (1,C). La description de la répartition des caractères dans les blocs (3.9) montre que

(4.22) L'application $f \to R_L^G(\hat{s}f)$ définit une isométrie de l'ensemble des fonctions centrales associées au bloc B^L_C sur l'ensemble des fonctions centrales associées au bloc $B^G_{(s,C)}$.

Michler et Olsson ([M-O]) ont mis en évidence des relations plus profondes entre le bloc $B^G_{(s,C)}$, le bloc B^L_C et le bloc principal de H (cf.§3.B pour la définition de H) que nous n'avons pas la place de commenter ici.

En vue d'une généralisation aux autres type de groupes de type de Lie des résultats qui viennent d'être exposés, nous nous contenterons des trois remarques suivantes.

1. La classification des blocs unipotents (et de leur structure locale) des groupes de type GL/q est notablement plus simple que la classification de toutes les paires de Brauer. Pour s'en convaincre, le lecteur peut poser s = (G,1) dans la plupart des énoncés des §3 et 4 ... En particulier, la dernière étape de l'agrandissement des paires (lemme (4.19)) est alors triviale.

2. Telle qu'elle vient d'être présentée, cette classification fait jouer un rôle essentiel à l'induction-restriction de Deligne-Lusztig (cf. notamment les propositions (4.13),(4.14) et (4.15)), au détriment de la combinatoire des diagrammes de Young. Il semble raisonnable d'essayer d'employer des méthodes analogues pour classifier les blocs unipotents et leurs structures locales pour les autres types de groupes de type de Lie — tout au moins pour presque tout ℓ.

3. La classification des autres blocs (à défaut, pour le moment, de leur structure locale) serait alors une conséquence du résultat suivant, d'ores et déjà

démontré (comparer avec (4.22)).

(4.23) Proposition.- Soit $\overline{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}$ muni d'un endomorphisme F qui lui donne une structure rationnelle sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\overline{L}$ un sous-groupe de Levi rationnel de $\overline{G}$, et soit B un bloc de $L = \overline{L}^F$. Supposons que R_L^G induise une isométrie de l'ensemble des fonctions centrales sur L associées au bloc B dans l'ensemble des fonctions centrales sur G . Alors il existe un bloc B^G de G dont l'ensemble des fonctions centrales associées est l'image par R_L^G de celui de B .

Une autre généralisation possible consiste à étudier les π-blocs des groupes finis de type de Lie pour une ensemble π de nombres premiers ne contenant pas p , tel que, par exemple, l'ensemble des nombres premiers qui divisent l'ordre du groupe des points rationnels d'un tore maximal rationnel. On est encouragé dans cette direction par un résultat comme (4.3). On peut aussi essayer de définir des " P(q)-blocs ", où P(q) est un diviseur irréductible du polynôme en q donnant l'ordre du groupe. Certains résultats obtenus récemment dans cette direction par Boyce sont encourageants.

note [1] .- La classification des p-blocs des groupes finis de type de Lie sur un corps de caractéristique p est triviale et n'est pas abordée dans cet exposé.

note [2] .- L'ensemble $\mathcal{S}(G)$ remplace ici l'ensemble des éléments semi-simples de G . Il est à noter en effet que l'isomorphisme $Z(L) \simeq \mathrm{Hom}(L/[L,L],\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ présenté dans [F-S] n'est pas uniquement défini : conformément à la théorie de la dualité de Langlands-Deligne (cf. [D-L]), le choix d'une dualité entre $\overline{G}$ et lui-même ne définit pas une unique dualité entre $\overline{L}$ et lui-même, mais une orbite sous l'action de $N_G(\overline{L})/\overline{L}$.

Je tiens à remercier François Digne et Jean Michel pour les réponses qu'ils

ont apportées à mes questions, et à remercier tout particulièrement Michel Enguehard pour sa participation active à la préparation de cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[A-B] J.L.Alperin, M.Broué - *Local methods in block theory,* Ann. of Math. 110 (1979), 143-157.

[Br.1] R.Brauer - *On a conjecture by Nakayama,* Trans.Roy.Soc.Can.XLI(1947), 11-19.

[Br.2] R.Brauer - *Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung,* (I) Math. Z.63(1956), 406-444, (II) Math.Z.72(1959), 25-46.

[Br.3] R.Brauer - *On blocks and sections,* (I) Amer.J.Math.89(1967), 1115-1136, (II) Amer.J.Math.90(1968), 895-925.

[Br.4] R.Brauer - *On the structure of blocks of characters of finite groups,* Proc. Second Intern. Conf. Theory of Groups, Canberra (1973), 103-130.

[Br] M.Broué - *Radical , hauteurs, p-sections et blocs,* Ann. of Math. 107 (1978), 89-107.

[B-P.1] M.Broué, L.Puig - *Characters and local structure on G-algebras,* J.of Alg. 63(1980), 306-317.

[B-P.2] M.Broué, L.Puig - *A Frobenius theorem for blocks,* Inv.Math.56(1980), 117-128.

[Cu.1] C.W.Curtis - *Reduction theorems for characters of finite groups of Lie type,* J.Math.Soc. Japan 27(1975), 666)688.

[Cu.2] C.W.Curtis - *Representations of finite groups of Lie type,* Bull.AMS (N.S)1 (1979), 721-757.

[D-L] P.Deligne, G.Lusztig - *Representations of reductive groups over finite fields,* Ann. of Math. 103(1976), 103-161.

[Di] F.Digne - *Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani,* Thèse Un.Paris-Sud (1984).

[D-M] F.Digne, J.Michel - *Foncteur de Lusztig et fonctions de Green généralisées,* CRAS 297(1983), 89-92.

[Fe] W.Feit - The representation theory of finite groups, North-Holland (1982).

[F-S] P.Fong, B.Srinivasan - *The blocks of finite general linear and unitary groups,* Inv.Math.69(1982), 109-153.

[Gr] J.A.Green - *The characters of the finite general linear groups,* Trans.AMS 80(1955), 402-447.

[Ja] G.James - The representation theory of the symmetric group, L.N.in Math. vol.682, Springer-Verlag (1978).

[Lu.1] G.Lusztig - *Representations of finite classical groups,* Inv.Math.43(1977), 125-175.

[Lu.2] G.Lusztig - Characters of reductive groups over a finite field, Princeton University Press, Princeton (1984).

[L-S] G.Lusztig, B.Srinivasan - *The characters of the finite unitary groups,* J.of Alg.49(1977), 167-171.

[Mi] J.Michel - *Théorie de Deligne Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires,* Thèse Un.Paris-Sud (1984).

[M-O] G.O.Michler, J.B.Olsson - *Character correspondences in finite general linear, unitary and symmetric groups,* Math.Z.184(1983), 203-233.

[Na] T.Nakayama - *On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group,* Jap.J.Math.17(1940), (I) 89-108, (II) 411-423.

[Pu.1] L.Puig - *La classification des groupes finis simples : bref aperçu et quelques conséquences internes,* Sém.Bourbaki, 34e année (1981/82), n°584, Astérisque 92-93(1982), 101-128.

[Pu.2] L.Puig - *The Nakayama conjecture and the Brauer pairs,* Preprint (1982).

[Pu.3] L.Puig - *The source algebra of a nilpotent block,* Preprint (1982).

[Ro] G.Robinson - *On group algebras of finite groups over semi-local rings,* Manuscrit (1984).

[Se] J.-P.Serre - Représentations linéaires des groupes finis, 3ème éd. Hermann, Paris (1978).

[Sr] B.Srinivasan - Representations of finite Chevalley groups, L.N.in Math. vol.764, Springer-Verlag (1979).

[Zh] A.Zhelevinski - Representation of finite classical groups, L.N.in Math. vol.869, Springer-Verlag (1981).

Pour une introduction à la théorie de Deligne-Lusztig, on peut consulter

J.-P.Serre - *Représentations linéaires des groupes finis "algébriques"* , Séminaire Bourbaki 487, 1975-76, L.N. in Math. 567, Springer-Verlag.

Michel Broué

Service de Mathématiques et d'Informatique
Ecole Normale Supérieure
1 rue Maurice Arnoux
92120 Montrouge