Astérisque

MAURIZIO CORNALBA

Systèmes pluricanoniques sur l'espace des modules des courbes et diviseurs de courbes k-gonales

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. nº 615, p. 7-24

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__7_0>

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983/84, n° 615 Novembre 1983

SYSTÈMES PLURICANONIQUES SUR L'ESPACE DES MODULES DES COURBES ET DIVISEURS DE COURBES k-GONALES
[d'après Harris et Mumford]

par Maurizio Cornalba

En 1915, Severi [21] esquissa une démonstration de l'unirationalité de M_g, l'espace des modules des courbes de genre g sur $\mathbb{C}$, pour $g \leqslant 10$. Dans son mémoire Severi conjecturait aussi que le même résultat devrait rester valable pour toute valeur de g. Cependant, ce ne fut qu'en 1980 que quelque progrès fut obtenu dans la direction indiquée par Severi, avec la démonstration par Sernesi de l'unirationalité de M_{12} [20]. En même temps plusieurs résultats, tels que la présence sur M_g d'un grand nombre de formes n-canoniques avec des pôles logarithmiques à l'infini [16], ou, dans une direction quelque peu différente, le fait que l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est de type général pour g assez grand [8] [9] [22], semblaient indiquer que la conjecture de Severi pourrait être fausse. Cela a été en effet prouvé en 1981 par Harris et Mumford [14] [13] qui ont démontré, plus précisement, le résultat suivant.

THÉORÈME. M_g *est de type général pour tout* g *assez grand.*

Plus exactement, il est démontré dans [14] que M_g est de type général si g est impair et $\geqslant 25$ (et de dimension de Kodaira différente de $-\infty$ si $g = 23$), tandis que dans le cas de genre pair le résultat est établi dans [13] pour $g \geqslant 40$. Je viens d'apprendre que Eisenbud et Harris ont récemment montré que M_g est de type général pour tout $g \geqslant 24$ pair ou impair, au moyen d'une variante de la méthode de Harris-Mumford. Leur technique semble montrer aussi que M_g est de dimension de Kodaira positive si $g = 23$. D'autre part, Chang et Ran ont montré que M_g est unirationnel si $g = 11, 13$ [5] [6]. Le problème de calculer la dimension de Kodaira de M_g reste donc ouvert pour g compris entre 14 et 23; on a des résultats partiels seulement pour $g = 23$.

Cet exposé se propose de décrire la méthode employée par Harris-Mumford et Eisenbud-Harris dans leurs démonstrations, avec une attention particulière au cas de genre impair.

1. Le groupe de Picard de M_g

Toutes les variétés qui interviendront par la suite seront des variétés sur le corps des nombres complexes. Rappelons qu'une courbe stable de genre $g>1$ est une courbe connexe, réduite, de genre arithmétique g, ayant pour toute singularité des points doubles ordinaires, et telle que l'intersection de chaque composante rationnelle lisse avec la réunion des autres composantes contient au moins trois points. On note $\bar{M}_g$ l'espace des modules des courbes stables de genre g. Tout point de $\bar{M}_g$ correspond donc à une classe d'isomorphisme de courbes stables de genre g. On sait que $\bar{M}_g$ est une variété irréductible, normale, et projective (voir [17], par exemple). Soit $\Delta=\bar{M}_g-M_g$ le lieu des courbes stables singulières. Puisque toute courbe stable singulière est la spécialisation d'une courbe stable avec un seul point singulier, Δ a pour composantes irréductibles les lieux

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{[g/2]}$$

où un point général de Δ_0 correspond à une courbe singulière irréductible, et un point général de Δ_i, $i>0$, correspond à une courbe lisse de genre i attachée en un point à une courbe lisse de genre $g-i$. Un calcul élémentaire de modules montre que les Δ_i sont des diviseurs dans $\bar{M}_g$.

Soit C une courbe stable et notons $[C]$ le point correspondant de $\bar{M}_g$. La courbe C a une déformation universelle $f:\mathcal{C}\to B$ où B est un polydisque de dimension $3g-3$. Le groupe $\mathrm{Aut}(C)$ agit sur B et sur $\mathcal{C}$ de manière équivariante. On sait que, au voisinage de $[C]$, $\bar{M}_g$ est le quotient de B par $\mathrm{Aut}(C)$. Si $g>2$, le morphisme quotient est ramifié le long du lieu des courbes à automorphismes. On notera $\bar{M}_g^0$ (resp. M_g^0) l'ouvert de $\bar{M}_g$ (resp. M_g) dont les points correspondent à des courbes sans automorphismes non triviaux, et $\bar{M}_{g,reg}$ l'ouvert des points lisses de $\bar{M}_g$. Soit $[C]$ un point de Δ_1; autrement dit, C est obtenue en identifiant un point lisse d'une courbe de genre $g-1$ avec un point lisse q d'une courbe E, elliptique ou rationnelle avec un point double ordinaire. La courbe C a toujours un automorphisme non trivial (et, en général, un seul, si $g\geqslant 3$), c'est à dire la réflexion dans E par rapport à q. Si $g\geqslant 4$, il est facile de montrer que toute composante de $\bar{M}_g-\bar{M}_g^0$, à l'exception de Δ_1, est de codimension au moins deux. C'est une conséquence du théorème de pureté du lieu de ramification que, si $g\geqslant 4$, $\bar{M}_{g,reg}$ est la réunion de $\bar{M}_g^0$ et du lieu des points de Δ_1 correspondents à des courbes avec un seul automorphisme non trivial. Par la suite on supposera en général que $g\geqslant 4$.

Si n est un entier assez grand ($n=3$ suffit), l'ensemble H_g des courbes stables n-canoniques de genre g est une sous-variété lisse localement fermée du schéma de Hilbert des sous-variétés de $\mathbb{P}^{(2n-1)(g-1)-1}$ avec polynôme de Hilbert

$$\xi(h) = (2nh-1)(g-1) \quad ,$$

et son quotient par l'action du groupe projectif $G = PGL((2n-1)(g-1))$ est $\bar{M}_g$. On a ainsi une injection

$$\alpha : Pic(\bar{M}_g) \to Pic^G(H_g)$$

du groupe de Picard de $\bar{M}_g$ dans le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles G-linéarisés sur H_g. Par contre, soit $Pic_{fun}(\bar{M}_g)$ le groupe de Picard du "foncteur des modules", c'est à dire le groupe dont les éléments sont constitués par la donnée pour chaque famille plate $f : \mathcal{C} \to S$ de courbes stables, d'un faisceau inversible L_f sur S et par la donnée, pour chaque diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

d'un isomorphisme entre L_f et $h^*(L_{f'})$ avec des propriétés de compatibilité évidentes. Comme il y a sur H_g une famille universelle $\pi : Z_g \to H_g$ on a un homomorphisme naturel

$$\beta : Pic_{fun}(\bar{M}_g) \to Pic^G(H_g) .$$

LEMME 1.1 i) *β est un isomorphisme.*

ii) *Le conoyau de α est un groupe de torsion.*

iii) *$Pic^G(H_g)$ est sans torsion.*

L'assertion i) est presque évidente. Pour iii) on renvoie à [17]. Quant à ii), elle est une conséquence de l'observation qu'il y a une borne supérieure uniforme pour le nombre d'automorphismes d'une courbe stable de genre g. Si L est un fibré en droites G-linéarisé sur H_g, pour que L descende à un fibré sur $\bar{M}_g$, il faut et suffit que pour tout point p de H_g le groupe d'isotropie de p agisse d'une façon triviale sur la fibre L_p. Comme ce groupe s'identifie au groupe d'automorphismes de la courbe stable correspondante à p, il s'ensuit qu'une puissance convenable de L descend à $\bar{M}_g$.

Par la suite nous allons indiquer de façon additive l'opération dans Pic et nous considérons $Pic(\bar{M}_g)$ et $Pic^G(H_g)$ comme des réseaux dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $Pic(\bar{M}_g) \otimes \mathbb{Q}$. Suivant [17], on peut définir certains éléments "naturels" de $Pic^G(H_g)$. Le premier entre eux est la "classe de Hodge" λ, c'est à dire la classe de $\Lambda^g \pi_*(\omega_\pi)$, où ω_π est le faisceau dualisant relatif pour π. Les autres sont les classes $\delta_0, \delta_1, \ldots$ des lieux des images n-canoniques des courbes dans $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$. Puisque $\Delta_0, \Delta_2, \ldots$ rencontrent $\bar{M}_{g,reg} - \bar{M}_g^0$ en une sous-variété de codimension au moins deux dans $\bar{M}_g$, on vérifie aisément que $\delta_0, \delta_2, \ldots$ descendent à des classes sur $\bar{M}_{g,reg}$ correspondantes aux classes des diviseurs $\Delta_0, \Delta_2, \ldots$. D'autre part, si B est la base de la déformation universelle d'une courbe correspondante à un point général de Δ_1, le morphisme naturel $B \to \bar{M}_g$ est un revêtement de degré deux ramifié le long de Δ_1. Il s'ensuit que

$$2\delta_1 = \Delta_1$$

et que δ_1 ne descend pas à $\bar{M}_{g,reg}$. Si on note E la composante elliptique de C, Γ l'autre composante, et φ l'automorphisme non trivial de C, il est clair que φ agit par -1 sur l'unique section de ω_C qui s'annule sur Γ, et agit d'une façon triviale sur les sections qui s'annulent sur E. Donc φ agit par -1 sur $\Lambda^g H^0(C,\omega_C)$, λ ne descend pas à $\bar{M}_{g,reg}$, mais 2λ descend, et $\lambda+\delta_1$ aussi.

2. Plan de la démonstration

On suppose toujours que $g \geqslant 4$. Notons K la classe canonique sur $\bar{M}_{g,reg}$.

LEMME 2.1. *Dans* $\mathrm{Pic}(\bar{M}_{g,reg}) \otimes \mathbb{Q}$ *on a*

$$K = 13\lambda - 2\delta_0 - 3\delta_1 - 2\delta_2 - \cdots - 2\delta_{[g/2]} \quad .$$

L'idée de la démonstration est la suivante. Soit $f: H_g \to \bar{M}_g$ le morphisme naturel. Si $[C]$ est un point de $\bar{M}_g$ et B est la base de la déformation universelle de C, f se factorise, sur un ouvert U de H_g, de la façon suivante:

$$U \xrightarrow{f'} B \xrightarrow{h} \bar{M}_g \quad .$$

Nous rappelons que l'espace tangent à B en un point correspondant à une courbe Γ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$, où Ω^1_Γ est le faisceau des différentielles de Kähler. Par dualité, l'espace cotangent est $H^0(\Gamma, \Omega^1_\Gamma \otimes \omega_\Gamma)$ et on a donc un isomorphisme entre $f'^*(\Omega_B^{3g-3})$ et $\overset{3g-3}{\Lambda}\, \pi_*(\Omega^1 \otimes \omega)$, où nous avons écrit, pour simplifier, Ω^1 et ω au lieu de $\Omega^1_{Z_g/H_g}$ et ω_{Z_g/H_g}. Puisque h est un isomorphisme (sur un ouvert de $\bar{M}_g$) si $[C]$ est un point de $\bar{M}_g^0$, tandis qu'il est un revêtement double ramifié le long de Δ_1 quand $[C]$ est un point général de Δ_1, on conclut que, *sur* $\bar{M}_{g,reg}$, on a

$$K = c_1(\pi_*(\Omega^1 \otimes \omega)) - \delta_1 \quad .$$

Puisque $H^1(\Gamma, \Omega^1_\Gamma \otimes \omega_\Gamma) = 0$ pour toute courbe stable Γ, pour calculer le côté droit on peut employer le théorème de Riemann-Roch de Grothendieck, qui donne

$$\mathrm{ch}(\pi_*(\Omega^1 \otimes \omega)) = \mathrm{ch}(\pi_!(\Omega^1 \otimes \omega)) = \pi_*(\mathrm{ch}(\Omega^1 \otimes \omega) T(\Omega^1))$$

dans $A(H_g) \otimes \mathbb{Q}$. On obtient sans difficulté que $c_1(\pi_*(\Omega^1 \otimes \omega))$ est égal à $13\lambda - 2\Sigma\delta_i$, d'où la thèse.

Venons maintenant au point central de la démonstration de Harris et Mumford. On suppose désormais que g est impair et on écrit $g=2k-1$. On note D le lieu dans M_g des courbes qui sont des revêtements de $\mathbb{P}^1$ de degré $\leqslant k$. Autrement dit, D et le lieu des points $[C]$ de M_g tels qu'il y a sur C un faisceau inversible L de degré k avec $h^0(L)\geqslant 2$; il s'agit donc d'une sous-variété fermée de M_g. On peut facilement montrer (comme on verra au numéro suivant) qu'un point général de D correspond à une courbe k-gonale, c'est à dire une courbe qui peut être représentée comme revêtement de $\mathbb{P}^1$ de degré k. Le lieu D est donc l'adhérence de l'image dans M_g de l'espace de Hurwitz des revêtements simples de genre g et degré k de $\mathbb{P}^1$ (on rappelle que simple signifie avec *un* point de ramification simple, au plus, au dessus de chaque point de $\mathbb{P}^1$). Comme l'espace de Hurwitz est irréductible [7] [10], D aussi est irréductible. La formule de Hurwitz entraîne qu'un revêtement de $\mathbb{P}^1$ de genre g et degré k a exactement

$$2g-2+2k = 3g-1$$

points de ramification. L'espace de Hurwitz en question est donc de dimension $3g-4$. Il n'est pas immédiat, mais cependant connu [19], qu'un point général de D peut être représenté comme revêtement k-uple de $\mathbb{P}^1$ d'un nombre fini de manières (en effet, d'une seule [3]): cela va suivre, en tout cas, des résultats du numéro suivant. Le lieu D est donc un diviseur dans M_g; il s'agit maintenant d'en calculer la classe. Remarquons que tout diviseur (pas nécessairement de Cartier) dans $\bar{M}_g$ définit une classe dans $\mathrm{Pic}^G(H_g)$; il suffit d'observer que son image réciproque dans H_g est un diviseur (de Cartier, puisque H_g est lisse) G-invariant. En particulier, on peut définir la classe $[\bar{D}]$ de l'adhérence de D dans $\bar{M}_g$. Harris et Mumford prouvent d'abord le

LEMME 2.2. *Il y a des nombres rationnels* $a, b_0, b_1,\dots$ *tels que*

$$[\bar{D}] = a\lambda+\Sigma b_i\delta_i \ .$$

Ce résultat, dont ils donnent une démonstration "ad hoc" est un cas particulier du théorème suivant, dû à Harer [12], et de son corollaire.

THÉORÈME 2.3 [Harer] $\mathrm{Pic}(M_g^0)$ *est un groupe cyclique infini si* $g\geqslant 5$.

COROLLAIRE 2.4. *Les éléments* $\lambda,\delta_0,\delta_1,\dots,\delta_{[g/2]}$ *sont une base de*

$$\mathrm{Pic}(\bar{M}_g)\otimes\mathbb{Q} = \mathrm{Pic}(\bar{M}_{g,reg})\otimes\mathbb{Q} \ .$$

Bien entendu, le théorème de Harer et son corollaire sont valables pour tout g, pair on impair. On verra directement plus tard que $\lambda,\delta_0,\delta_1,\dots$ sont indépendants. Pour démontrer le corollaire remarquons que $\mathrm{Pic}(\bar{M}_g)$ s'injecte dans $\mathrm{Pic}(\bar{M}_{g,reg})$, puisque $\bar{M}_g$ est normal. Comme le complémentaire de M_g^0 dans $\bar{M}_{g,reg}$ est la réunion des Δ_i, $\mathrm{Pic}(\bar{M}_{g,reg})\otimes\mathbb{Q}$ est engendré par $\mathrm{Pic}(M_g^0),\delta_0,\dots,\delta_{[g/2]}$, donc est de dimension $[g/2]+2$ et égal à $\mathrm{Pic}(\bar{M}_g)\otimes\mathbb{Q}$.

Pour calculer les coefficients $a, b_0, b_1, \dots$ qui apparaissent dans l'énoncé de 2.2 on "évalue" $[\bar{D}]$, $\lambda, \delta_0, \delta_1, \dots$ sur des familles convenables de courbes stables. Nous verrons comment par la suite. En tout cas le résultat final est le suivant.

PROPOSITION 2.5. $[\bar{D}] = d_k(6(k+1)\lambda - k\delta_0 - \Sigma_{i\geqslant 1}\, 3i(2k-i-1)\delta_i)$

où $\qquad d_k = (2k-4)!/k!(k-2)!$.

Cette formule, unie à celle pour la classe canonique, donne

$$kd_k K = 2[\bar{D}] + (k-12)d_k\lambda + \alpha \ ,$$

où α est une combinaison à coefficients *positifs* de $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}$. Comme on sait [1] [17] qu'un multiple assez élevé de λ donne un morphisme birationnel de $\bar{M}_g$ dans un espace projectif, et $2[\bar{D}] + \alpha$ est la classe d'un diviseur effectif, cette formule permettrait de conclure que M_{2k-1} est de type général pour $k > 12$ si elle n'était valable que sur l'ouvert $\bar{M}_{g,reg}$. Le résultat qui permet de surmonter cette difficulté est le suivant.

LEMME 2.6. *Si* $g \geqslant 4$, *toute forme* n*-canonique sur* $\bar{M}^0_g$ *s'étend à une forme* n*-canonique sur une désingularisation de* $\bar{M}_g$.

Soit V un espace vectoriel de dimension h et soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$. Notons V_0 l'ouvert de V sur lequel l'action de G est libre. Du point de vue local le problème de démontrer 2.6 est un cas particulier du problème de décider quand les formes n-canoniques sur V_0/G s'étendent à une désingularisation $\widetilde{(V/G)}$ de V/G. Si $g \in G$, ses valeurs propres sont de la forme $\zeta^{\alpha_1}, \dots, \zeta^{\alpha_h}$, où ζ est une racine m-ème primitive de l'unité et $0 \leqslant \alpha_i < m$ pour tout i. On pose

$$\nu(g) = \min_{\zeta} (\Sigma\alpha_i/m) \quad .$$

On démontre 2.6 en vérifiant, par des calculs élémentaires mais très longs et pénibles, que les conditions du critère suivant, dû pour l'essentiel à Reid [18] et Tai [22], sont satisfaites par l'action de $\mathrm{Aut}[C]$ sur la base de la déformation universelle d'une courbe stable C de genre $g \geqslant 4$.

LEMME 2.7. *Soit* ω *une forme* n*-canonique sur* V_0/G. *Si, pour tout* $g \in G$ *tel que* $\nu(g) < 1$, ω *est holomorphe sur les diviseurs de* $\widetilde{(V/G)}$ *se projetant sur l'image dans* V/G *du lieu des points de* V *fixés par* g, ω *s'étend à une forme* n*-canonique sur* $\widetilde{(V/G)}$.

On a dit que la démonstration de 2.5 à partir de 2.2 consiste à évaluer $[\bar{D}]$, $\lambda, \delta_0, \dots$ sur des familles convenables. Nous allons montrer dans un exemple ce qu'on entend par là.

Exemple 2.8. Soient S une courbe générale de genre $g-1$ et q un point général de S. Soit Y la surface obtenue de $S\times S$ par éclatement de (q,q). On note E la droite exceptionnelle, Σ et Γ les transformées propres de la diagonale et de $\{q\}\times S$. Soit X la surface obtenue de Y en identifiant les points de Σ et Δ ayant la même projection sur le deuxième facteur de $S\times S$. Notons aussi $f:X\to S$ la projection sur le deuxième facteur de $S\times S$. On obtient ainsi une famille de courbes stables dont la fibre sur $p\neq q$ est S avec p et q identifiés, et la fibre sur q est obtenue en recollant à S en q une courbe rationnelle avec un point double ordinaire. Notre famille est donc contenue dans Δ_0, rencontre Δ_1 en un point (de façon transverse) et ne rencontre pas Δ_i si $i>1$. Par conséquent on a

$$\deg_S \delta_1 = 1 \quad ; \qquad \deg_S \delta_i = 0 \quad , \qquad i>1 .$$

Quant à λ, il y a sur S une suite exacte

$$0\to H^0(\omega_S)\otimes \mathcal{O}_S \to f_*(\omega_{X/S}) \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathcal{O}_S \to 0$$

où γ est le résidu sur Γ. Il s'ensuit que $\lambda=0$ sur S. On va calculer le degré de δ_0 au moyen de l'observation suivante. Soit C une courbe stable avec un seul point singulier de type i (i.e. séparant C en deux composantes de genres i et $g-i$, ou ne la séparant pas, pour $i=0$). Si B est la base de la déformation universelle de C, le diviseur dans B paramétrisant les courbes qui sont dans Δ_i est lisse et son espace normal en $[C]$ s'identifie à

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{C,p},\mathcal{O}_{C,p}) \simeq \Lambda^2(\Omega^1_{C,p}\otimes k(p))^\vee ,$$

où p est le point de type i sur C. Par conséquent, si $f':X'\to S'$ est une famille de courbes stables dont chaque fibre a un seul point singulier de type i, et si on note W le lieu des points de type i, le degré de $-\delta_i$ sur S est le degré de $\Lambda^2 f'_*(\Omega^1_{X'/S'}\otimes \mathcal{O}_W)$. Dans notre exemple on a donc

$$\deg \delta_0 = \deg(N_{\Sigma/Y}\otimes N_{\Gamma/Y}) = 2-2g .$$

Il reste à calculer le degré de $[\bar{D}]$. Puisque notre famille est contenue dans $\bar{M}_g - M_g$ il faudra décrire d'une manière explicite l'intersection de $\bar{D}$ avec ce diviseur. On le fera au numéro 4.

La famille de l'exemple précédent est la première des familles considérées par Harris et Mumford. La deuxième s'obtient de la manière suivante. Choisissons S et q comme dans l'exemple précédent et soit Y une surface lisse avec une fibration elliptique $\gamma:Y\to T$, telle que chaque fibre singulière soit une courbe rationnelle irréductible avec un point double ordinaire. On suppose aussi que γ a une section B, ne rencontrant pas les points singuliers des fibres. On note d

le degré du fibré normal à B dans Y. On obtient une famille de courbes stables de genre g sur T en recollant $S\times T$ et Y le long de $\{q\}\times T$ et de B. Les autres familles s'obtiennent par le procédé suivant. On fixe un entier i entre 1 et $[g/2]$ et on choisit deux courbes générales C_1 et C_2 de genres i et $g-i$, plus un point q général sur C_1. On obtient une famille de courbes stables de genre g sur C_2 en recollant $C_1\times C_2$ et $C_2\times C_2$ le long de $\{q\}\times C_2$ et de la diagonale. On omet, pour ces familles, les détails des calculs des degrés de λ et des δ, qui sont d'ailleurs aussi faciles que dans l'exemple 2.8. On se contentera de résumer les résultats dans le tableau suivant.

degré de	1re famille	2e famille	(i+2)e famille
λ	0	d	0
δ_0	2-2g	12d	0
δ_1	1	-d	$-2(g-1-i)\delta_{ij}$
$\delta_j,\ j>1$	0	0	$-2(g-1-i)\delta_{ij}$

(δ_{ij} est le symbole de Kronecker)

Le tableau montre, en particulier, que la matrice des degrés de λ, $\delta_0,\ldots$ est inversible (si $d\neq 0$). Par conséquent, $\lambda,\delta_0,\ldots,\delta_{[g/2]}$ sont indépendants, comme on avait déjà annoncé dans la démonstration de 2.4, et il suffira de calculer les degrés de $[\bar{D}]$ sur les familles qu'on vient d'introduire pour déterminer a, $b_0,\ldots,b_{k-1}$ dans 2.2.

La plupart du plan de la démonstration qu'on a ci-dessus exposé est indépendante du choix particulier qu'on a fait du diviseur D. Il est donc naturel d'essayer d'adapter ce plan à d'autres diviseurs dans $\bar{M}_g$. C'est ce que Harris [13] a fait dans le cas de genre pair $g=2k-2$. Le diviseur qu'il choisit est l'adhérence du lieu des courbes lisses qui sont des revêtements k-uples de $\mathbb{P}^1$ avec un point de ramification double.

3. Revêtements admissibles

Un *revêtement admissible* de degré k avec m points de ramification est la donnée de:

i) Une courbe connexe E de genre arithmétique zéro (c'est à dire une courbe à points doubles ordinaires dont toutes les composantes sont rationnelles lisses et le graphe dual est simplement connexe) avec m points lisses marqués $x_1,\ldots,x_m$. On veut que $(E,x_1,\ldots,x_m)$ soit *stable* au sens que toute composante de E doit contenir au moins trois des points marqués ou bien singuliers de E. Cela revient à dire que $(E,x_1,\ldots,x_m)$ n'a pas d'automorphismes non triviaux.

ii) Une courbe connexe à points doubles ordinaires C et un morphisme

$f:C\to E$, partout de degré k, avec les propriétés suivantes. Au dessus de chaque point marqué de E, C est lisse et f a un seul point de ramification simple. Au dessus des autres points lisses de E, f est étale. Si p est un point double de E et $f(q)=p$, au voisinage de p et de q, C, E et f sont de la forme suivante:

$$C: xy=0; \qquad E: uv=0; \qquad f: u=x^r,\ v=y^r$$

pour un r convenable.

On définit également la notion de famille de revêtements admissibles paramétrée par une variété S. On veut qu'une telle famille

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

soit de la forme

$$\mathcal{C}: xy=a; \qquad \mathcal{D}: uv=a^r; \qquad \varphi: u=x^r,\ v=y^r\ ,$$

où a est une fonction sur S, au voisinage d'un point singulier d'une fibre de α et de son image dans $\mathcal{D}$.

Si E est lisse, un revêtement admissible $C\to E$ n'est qu'un revêtement simple de $\mathbb{P}^1$, plus un ordre fixé sur les points de ramification. Harris et Mumford construisent une compactification $\bar{H}_{k,m}$ de l'espace de Hurwitz paramétrisant ces revêtements, et l'emploient pour décrire $\bar{D}$, qui est manifestement l'image de $\bar{H}_{m,k}$ dans $\bar{M}_g$ pour $g=2k-1$, $m=2g+2k-2$. L'espace $\bar{H}_{k,m}$ est un espace grossier de modules pour les revêtements admissibles de degré k avec m points de ramification. Les propriétés de $\bar{H}_{k,m}$ qu'on va employer sont contenues dans l'exemple qui suit et dans le lemme 3.5.

<u>Exemple</u> 3.1 (déformation universelle d'un revêtement admissible). Soit $f:C\to E$ un revêtement admissible de degré k avec m points de ramification. Il est évident que toute déformation localement triviale de ce revêtement s'obtient en faisant bouger, sur les composantes de E, les points de ramification (y compris les points de ramification multiple dans les points doubles). En tenant compte des automorphismes des composantes de E on peut ainsi construire une déformation localement triviale universelle $\varphi:\mathcal{C}'\to\mathcal{E}'$, ayant pour espace des paramètres un polydisque Δ de dimension

$$m+2\nu-3\mu = m-3-\nu$$

où ν est le nombre des points doubles de E et μ le nombre des composantes. En construisant une déformation universelle de f, à partir de φ', on se bornera au cas $\nu=1$. C'est d'ailleurs le seul cas dont on aura besoin dans la suite, et la construction générale est essentiellement la même. Notons P la section singulière de E' et $P_1,\dots,P_h$ celles de C'. Au voisinage de ces sections, C', E' et φ' sont des produits. Autrement dit, au voisinage de P et de P_i, C' et E' sont de la forme

$$\{(u,v) : uv=0\}\times\Delta \ ; \qquad \{(x_i,y_i) : x_iy_i=0\}\times\Delta$$

et φ' est donnée par $u=x_i^{r_i}$, $v=y_i^{r_i}$. Soit S la courbe analytique définie par

$$t=t_i^{r_i}, \qquad |t_i|<1, \qquad |t|<1, \qquad i=1,\dots,h$$

dans l'espace de $h+1$ coordonnées complexes $t,t_1,\dots,t_h$. L'espace des paramètres de la déformation universelle $\varphi : C\to E$ de f sera $\Delta\times S$. La construction se fait de la manière suivante. On note U le complémentaire dans $E'\times S$ de

$$\{(e,s):|u(e)|\leqslant|t(s)|,v(e)=0\}\cup\{(e,s):|v(e)|\leqslant|t(s)|,u(e)=0\}$$

et U' le complémentaire dans $C'\times S$ de

$$\bigcup_i\left(\{(c,s):|x_i(c)|\leqslant|t_i(s)|,y_i(c)=0\}\cup\{(c,s):|y_i(c)|\leqslant|t_i(s)|,x_i(c)=0\}\right) .$$

On écrit encore

$$V = \{(u,v,s)\in\mathbb{C}^2\times S:\ uv=t,\ |u|<1,\ |v|<1,\ |t|<1\}$$
$$V_i = \{(x_i,y_i,s)\in\mathbb{C}^2\times S:\ x_iy_i=t,\ |x_i|<1,\ |y_i|<1,\ |t_i|<1\} .$$

On obtient E en recollant U et $V\times\Delta$ par

$$(u,0,s)\longmapsto\left(u,\frac{t}{u},s\right) \ ; \qquad (0,v,s)\longmapsto\left(\frac{t}{v},v,s\right) ,$$

et C en recollant U' aux V_i par

$$(x_i,0,s)\longmapsto\left(x_i,\frac{t_i}{x_i},s\right) \ ; \qquad (0,y_i,s)\longmapsto\left(\frac{t_i}{y_i},y_i,s\right) .$$

La restriction de φ à U' est $\varphi\times 1_S$ et la restriction à V_i est

$$(x_i,y_i,s)\longmapsto(x_i^{r_i},y_i^{r_i},s) .$$

On peut facilement constater que celle que nous venons de construire est en fait la déformation universelle de f. En effet, le produit de Δ avec le disque $\Delta_1=\{t:|t|<1\}$ est la base de la déformation universelle de E avec les m points de ramification marqués. Donc toute déformation $f':C'\to E'$ de f donne lieu à un morphisme α de l'espace des paramètres dans $\Delta\times\Delta_1$. Si f' est donnée localement par

$$uv = \tau_i^{r_i}; \qquad x_i y_i = \tau_i; \qquad u = x_i^{r_i}; \qquad v = y_i^{r_i},$$

la composition de α avec la projection sur Δ_1 est $\tau_i^{r_i}$. Il y a alors un seul relèvement de α à un morphisme dans $\Delta \times S$ qui induise f', c'est à dire celui qu'on obtient en posant $t_i = \tau_i$ pour tout i.

Il est important de remarquer que, si $r_i = 1$ pour tous les i, sauf au plus un, S, et par conséquent l'espace des paramètres de la déformation universelle de f, sont lisses.

Pour le moment, la seule conséquence de la construction de la déformation universelle d'un revêtement admissible que nous allons employer est que tout revêtement admissible a des déformations arbitrairement petites qui sont des revêtements simples de $\mathbb{P}^1$. Cela permet de démontrer plusieurs propriétés du diviseur $\bar{D}$ que nous avons seulement énoncées lors de son introduction.

Remarque 3.2. Soit

$$f : C \to E \simeq \mathbb{P}^1$$

un revêtement de degré k et genre g. Supposons que f ne soit pas simple. Nous allons associer à f un revêtement admissible $f' : C' \to E'$, tel que le point de $\bar{M}_g$ correspondant à C' soit $[C]$. Compte tenu de 3.1 cela montre qu'un revêtement général de $\mathbb{P}^1$ est simple. Nous allons nous limiter, pour simplifier, au cas où il y a un seul point q de E sur lequel f n'est pas simple. Soient $q_1, \ldots, q_h$ les points de $f^{-1}(q)$, et $m_1, \ldots, m_h$ les ordres de ramification correspondants pour f. La courbe E' est E avec une copie P de $\mathbb{P}^1$ attachée en q. Soit p le point d'attachement sur P. On choisit, pour chaque i, un revêtement de P de degré m_i avec un point de ramification (m_i-1)-uple p_i au dessus de p et m_i-1 points de ramification simple au dessus de points généraux de P. C' est obtenue en identifiant p_i à q_i, pour chaque i.

Remarque 3.3. Nous allons montrer qu'un point général de $\bar{D}$ correspond à un revêtement simple k-uple de $\mathbb{P}^1$. D'après la remarque précédente et 3.1, il suffira d'attacher à chaque revêtement admissible $f : C \to E$ de degré $k-1$ un revêtement admissible de degré k $f' : C' \to E'$ tel que $[C'] = [C]$. Pour cela on choisit d'abord un point général q de E, et on note $q_1, \ldots, q_{k-1}$ les points de $f^{-1}(q)$. Puis on choisit une copie P de $\mathbb{P}^1$ et un revêtement double Q de P ramifié en deux points; on choisit aussi un point général r sur P, on note F une copie de E, et q' le point de F correspondant à q. La courbe E est obtenue en identifiant le point q de E avec le point r de P, tandis que C' est obtenue en identifiant le point q_1 à un des deux points de Q au dessus de r et q' à l'autre, et en recollant ensuite des copies de P à $q_2, \ldots, q_{k-1}$.

Remarque 3.4. On va démontrer, inductivement sur le genre, que la sous-variété de M_g des courbes h-gonales, pour quelque $h \leqslant k$, est de dimension

$$\min(2g+2k-5, 3g-3) \ .$$

Comme cas particulier, on obtient que $\bar{D}$ est un diviseur. Pour $g=2$ il n'y a rien à démontrer. Pour passer du genre $g-1$ au genre g il suffit de construire une famille de revêtements admissibles de degré k $C' \to E'$, où $[C']$ parcourt une sous-variété de $\bar{M}_g - M_g$ de dimension $\min(3g-3, 2g+2k-5)-1$. Pour le faire, soit

$$f: C \to E = \mathbb{P}^1$$

un revêtement de degré k et genre $g-1$. L'hypothèse d'induction dit que C dépend de $\min(3g-6, 2g+2k-7)$ paramètres. En plus, si $3g-6 < 2g+2k-7$, C peut être représentée comme revêtement k-uple de $\mathbb{P}^1$ d'une infinité de manières. On construit E' en recollant une copie P de $\mathbb{P}^1$ à E en un point général p, et C' en recollant un revêtement double rationnel de P à deux points de $f^{-1}(p)$ et une copie de P aux autres.

On a dit que $\bar{H}_{k,m}$ est propre. Cela suit du résultat suivant.

LEMME 3.5. *Soit* Δ *le disque ouvert* $\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$, *et soient*

$$p_i : \Delta \to \mathbb{P}^1 \times \Delta \qquad i = 1, \dots, m$$

des sections, disjointes sur le disque épointé $\Delta^* = \Delta - \{0\}$. *Toute famille*

$$\varphi^* : C^* \to \mathbb{P}^1 \times \Delta^*$$

de revêtements admissibles de degré k, *ramifiés le long de* $p_1, \dots, p_m$, *s'étend à une famille* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, *après un changement de base* $t = \tau^h$, *pour un* h *convenable.*

Démonstration. Par éclatements successifs de $\mathbb{P}^1 \times \Delta$ en des points de la fibre centrale on obtient $\mathcal{D} \to \Delta$ et des sections disjointes Z_i ne rencontrant pas les points singuliers des fibres. En contractant des composantes de $\mathcal{D}_0$, si nécessaire, on peut supposer que la fibre centrale avec les points $Z_1(0), \dots, Z_m(0)$ marqués est stable. Le morphisme φ^* peut s'étendre à un morphisme fini $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, où $\mathcal{C}$ est normal. Ce morphisme peut être ramifié le long de quelque composante de $\mathcal{D}_0$, mais, quitte à remplacer t par t^h, pour un h convenable, et à normaliser, on peut supposer que tel n'est pas le cas. Le morphisme φ est donc ramifié seulement le long des sections Z_i et sur les points singuliers de $\mathcal{D}$. Ce sont là des singularités du type $uv = t^r$. Comme le revêtement universel d'un voisinage épointé d'une telle singularité p est

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi^r, \eta^r, \xi\eta) \quad ,$$

il s'ensuit que, pour tout point q de $\mathcal{C}$ au dessus de p il y a des entiers s et w tels que $ws = r$ et que $x = \xi^w$, $y = \eta^w$, t sont des paramètres locaux sur $\mathcal{C}$.

Par conséquent, au voisinage de q, $\mathcal{C}$ est de la forme $xy = t^w$ et φ est donnée par $u = x^s$, $v = y^s$. La famille $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est donc une famille de revêtements admissibles.

4. Le degré de $\bar{D}$

On suppose toujours que $g = 2k-1$. Nous sommes maintenant en mesure de décrire, à l'aide de la notion de revêtement admissible, l'intersection de $\bar{D}$ et de $\bar{M}_g - M_g$, ou, du moins, les points de cette intersection qui peuvent apparaître comme fibres d'une des familles envisagées à la fin du numéro 2. Le résultat principal est le suivant.

PROPOSITION 4.1. *Soit C une courbe stable singulière de genre g.*

i) *Si C est irréductible, $[C]$ appartient à $\bar{D}$ si et seulement si il y a sur C un faisceau sans torsion de rang un F tel que*

$$\chi(F) = 2-k; \qquad h^0(F) \geqslant 2 .$$

ii) *Si C est la réunion de deux courbes irréductibles C_1 et C_2, attachées en un seul point p, C appartient à $\bar{D}$ si et seulement si il y a des faisceaux sans torsion de rang un, F_1 et F_2, sur C_1 et C_2 et un entier ℓ tels que*

$$\chi(F_1) + \chi(F_2) = 3 - k + \ell$$

$$h^0(F_1) \geqslant 2; \quad h^0(F_i(-\ell p)) \geqslant 1, \qquad i = 1,2 .$$

Nous allons démontrer seulement i). Le lieu des courbes stables sur lesquelles il y a un faisceau F sans torsion, de rang un, satisfaisant les conditions de i), contient D et est fermé dans $\bar{M}_g$, d'après la théorie de la compactification de la Jacobienne. Soient donc C et F comme dans i); en plus on va supposer, pour simplifier, que C n'a qu'un point singulier et est donc obtenue de sa normalisation $\tilde{C}$ par identification de deux points p_1 et p_2. Pour démontrer i) il suffit d'associer à C un revêtement admissible $f' : C' \to E$ tel que $[C] = [C']$. On choisit deux sections indépendantes s_1, s_2 de F et on note F' le faisceau qu'elles engendrent. Les sections s_1, s_2 définissent un morphisme $f : \tilde{C} \to \mathbb{P}^1$. Les points p_1 et p_2 on la même image si et seulement si F' est inversible. Dans ce cas, on voit sans difficulté que $\deg(f) \leqslant k$. Pour construire C' et f' à partir de f on applique d'abord la construction de la remarque 3.2 à tous les points de $\mathbb{P}^1$ (à l'exception de $f(p_1) = f(p_2)$) sur lesquels f n'est pas simple et on obtient $C'' \to E'$. On fait la même chose pour $f(p_1)$ sauf que, si ℓ_1 et ℓ_2 sont les ordres de ramification de f en p_1 et p_2, on recolle à p_1 et p_2 un revêtement rationnel $(\ell_1+\ell_2)$-uple du $\mathbb{P}^1$ recollé à $f(p_1)$, avec un point de ramification d'ordre ℓ_i dans le point de recollement avec p_i, pour $i=1,2$. Enfin, par le procédé de la remarque 3.3, on élève le degré de f' jusqu'à k.

Si, par contre, F' n'est pas inversible, on voit facilement que le degré de f ne dépasse pas $k-1$, et on construit f' par un procédé semblable à celui qu'on vient de décrire. La seule différence est la suivante. On recolle à $f(p_1)$ et $f(p_2)$ deux droites P_1 et P_2. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont les ordres de ramification de f en p_1 et p_2 on choisit un revêtement P'_i de P_i de degré ℓ_i+1 avec un point de ramification p'_i d'ordre ℓ_i au dessus de $f(p_i)$ et on note p''_i l'autre point au dessus de $f(p_i)$. On identifie ensuite p_i et p'_i et on recolle une copie de E à p''_1 et p''_2.

COROLLAIRE 4.2. *Soit* C' *une courbe lisse de genre* $g-1$.

i) *Si* C *est obtenue en identifiant deux point* p,q *de* C', $[C]$ *appartient à* $\bar{D}$ *si et seulement si il y a sur* C' *un faisceau inversible* L *de degré* k *tel que*

$$h^0(L) \geqslant 2 \ ; \qquad h^0(L(-p-q)) \geqslant 1 \ .$$

ii) *Si* C *est obtenue en identifiant un point* p *de* C' *avec un point lisse d'une courbe elliptique ou rationnelle avec un point double ordinaire, alors* $[C]$ *appartient à* $\bar{D}$ *si et seulement si il y a sur* C' *un faisceau inversible* L *de degré* k *tel que*

$$h^0(L) \geqslant 2 \ ; \qquad h^0(L(-2p)) \geqslant 1 \ .$$

Revenons à la famille $f:X\to S$ de l'exemple 2.8, dont nous reprenons les notations. Il reste à calculer le degré de $[\bar{D}]$ sur S. Puisque S est une courbe générale de genre $g-1$, il y a sur S un nombre fini de faisceaux inversibles $L_1,\dots L_\alpha$ de degré k tels que $h^0(L_i)\geqslant 2$; cela résulte du fait que M_{g-1} et l'espace de Hurwitz des revêtements de degré k et genre $g-1$ de $\mathbb{P}^1$ (qui domine M_{g-1}) ont la même dimension

$$3g-6 = 2k+2(g-1)-5 \ .$$

Puisque q est un point général de S, aucun de ces faisceaux n'a des sections s'annulant doublement en q. Donc la partie ii) du corollaire 4.2 montre que la fibre dégénérée de la famille n'est pas dans $\bar{D}$. En plus, les remarques 3.2 et 3.3 montrent que, pour chaque i, on a:

a) $h^0(L_i) = 2$.
b) $|L_i|$ n'a pas de points fixes.
c) Si on note $\varphi_i:S\to\mathbb{P}^1$ le morphisme associé à $|L_i|$, φ_i est un revêtement simple et $\varphi_i(q)$ n'est pas un point de diramation pour φ_i.

Pour chaque i il y a donc $k-1$ points p tels que

$$h^0(L_i(-p-q)) \geqslant 1 .$$

Puisque q est général, les $(k-1)\alpha$ points ainsi obtenus sont distincts. Par conséquent la famille $f:X\to S$ a exactement $(k-1)\alpha$ fibres dans $\bar{D}$. Il reste à évaluer α et à montrer que la contribution de chacune de ces fibres au degré de $[\bar{D}]$ est exactement égale à un.

LEMME 4.3. $\alpha = (2k-2)!(k-1)!k!$

Démonstration. Si C est une courbe lisse de genre γ, on note $W_d^r(C)$ la sous-variété de $\mathrm{Pic}^d(C)$ dont les points sont les faisceaux inversibles L de degré d sur C tels que $h^0(L) \geqslant r+1$. Nous devons calculer le nombre des points de $W_k^1(S)$. On sait [15] que $W_d^r(C)$ est de dimension au moins

$$\rho = \gamma-(r+1)(\gamma-d+r) ,$$

et n'est pas vide si $\rho \geqslant 0$. En plus, si $W_d^r(C)$ est de dimension ρ, on sait en calculer la classe dans l'anneau de Chow de $\mathrm{Pic}^d(C)$ [15]. Dans le cas où $\rho=0$, on a la formule suivante, due à Castelnuovo [4].

$$\deg W_d^r(C) = \frac{r!\cdots 0!}{(\gamma-d+2r)!\cdots(\gamma-d+r)!} \cdot \gamma!$$

Comme cas particulier on obtient

$$\deg W_k^1(S) = (2k-2)!/(k-1)!k! \quad .$$

La thèse suit du théorème que, si C est générale, $W_d^r(C)$ est réduite (et de dimension $\min(\gamma,\rho)$) [11]; dans le cas particulier de $W_k^1(S)$ ce fait est presque trivial (voir [2], par exemple). q.e.d.

Choisissons un point p sur S tel que $C = S/p\sim q$ soit dans $\bar{D}$, et notons $\mathcal{C}\to B$ la déformation universelle de C. On peut choisir des coordonnées $t_1,\ldots,t_{3g-3}$ sur B de manière que $\mathcal{C}$ soit de la forme $xy=t_1$ au voisinage de $p=q$; en plus on peut supposer que $t_4,\ldots,t_{3g-3}$ soient des coordonnées locales sur l'espace des paramètres de la déformation universelle $\mathcal{S}\to T$ de S, que t_2, t_3 soient des coordonnées sur $\mathcal{S}$ au voisinage de p et q, et que la fibre de $\mathcal{C}$ sur le point $(0,a_2,\ldots,a_{3g-3})$ s'obtienne en identifiant les points tels que $t_2=a_2$, $t_3=a_3$ dans la fibre correspondante de $\mathcal{S}\to T$. Dans ces coordonnées, les équations de la courbe tracée par $f:X\to S$ dans B sont donc les suivantes:

$$t_1 = t_3 = t_4 = \cdots = t_{3g-3} = 0 \quad .$$

Comme $[C]$ est dans $\bar{D}$, il y a un seul revêtement simple de degré k

$$\varphi = \varphi_i : S \to \mathbb{P}^1$$

tel que $\varphi(p) = \varphi(q)$. Il y a un seul revêtement admissible de degré k,

$$\varphi' : C' \to E$$

tel que $[C'] = [C]$. Ce revêtement peut être construit, à partir de φ, par le procédé de la remarque 3.4, c'est à dire en recollant une copie P de $\mathbb{P}^1$ à $\varphi(p)$, un revêtement double Q de P, ramifié en deux points, à p et q, et des copies $P_1,\dots,P_{k-2}$ de P aux autres points de $\varphi^{-1}(\varphi))$. Soit

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

la déformation universelle de φ'. On peut choisir des coordonnées s_1, $s_2,\dots,s_{3g-4}$ sur B' de manière que $s_3,\dots,s_{3g-4}$ soient des coordonnées sur l'espace des paramètres de la déformation universelle de S, et que $\mathcal{C}'$, $\mathcal{E}'$, ψ soient de la forme

$$\mathcal{C}' : xy = s_1 \; ; \qquad \mathcal{E}' : uv = s_1 \; ; \qquad \psi : x = u,\ y = v$$

au voisinage de p ou de q. En plus, pour $s_1 = 0$ et pour toute valeur fixée de $s_3,\dots,s_{3g-4}$, faire varier s_2 correspond à faire bouger sur $\mathbb{P}^1$ le point de recollement de P. Les équations $s_2 = s_3 = \cdots = s_{3g-4} = 0$ définissent une surface lisse dans $\mathcal{C}'$. Sur cette surface, la courbe Q peut être contractée à une singularité de type A_1 et les courbes $P_1,\dots,P_{k-2}$ à des points lisses. Si on fait de même pour toutes les surfaces d'équations

$$s_2 = \text{const.},\ \dots,\ s_{3g-4} = \text{const.}$$

on obtient de $\mathcal{C}' \to B'$ une famille de courbes stables paramétrée par B', dont les singularités sont du type $xy = s_1^2$. Comme $\varphi(p)$ n'est pas un point de ramification de φ, pour un choix judicieux des coordonées, le morphisme naturel de B' dans B est donc donné par

$$t_1 = s_1^2;\quad t_2 = t_3 = s_2;\quad t_4 = s_3; \dots, t_{3g-3} = s_{3g-4}\ .$$

Il s'ensuit que l'équation de $\bar{D}$ dans B est simplement $t_2 = t_3$, et que la courbe dans B tracée par $f : X \to S$ n'est pas tangente à $\bar{D}$ en $[C]$. En tenant compte de 4.3 on obtient le

LEMME 4.4. $\deg_S[\bar{D}] = (2k-2)!/(k-2)!k!$.

Notre analyse de la famille de l'exemple 2.8 est ainsi complète. Des raisonnements semblables, que nous ne décrirons pas, s'appliquent aux autres familles envisagées par Harris et Mumford et permettent de démontrer la proposition 2.5. Remarquons seulement qu'une conséquence immédiate de 4.2 est que aucune des fibres de la deuxième famille n'est dans $\bar{D}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. JU. ARAKELOV - *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, Math. USSR Izvestija 35 (1971), 1277-1301.

[2] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Su una congettura di Petri*, Comment. Math. Helvetici 56 (1981), 1-38.

[3] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Footnotes to a paper of Beniamino Segre*, Math. Ann. 256 (1981), 314-362.

[4] G. CASTELNUOVO - *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei (4), 5 (1889), 130-133.

[5] M.-C. CHANG et Z. RAN - *Unirationality of the moduli space of curves of genus 11*, preprint.

[6] M.-C. CHANG et Z. RAN - *Unirationality of the moduli space of curves of genus 13*, preprint.

[7] F. ENRIQUES et O. CHISINI - *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna 1915, 1918, 1924, 1934.

[8] E. FREITAG - *Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

[9] E. FREITAG - *Die Kodairadimension von Körpern automorpher Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 296 (1977), 162-170.

[10] W. FULTON - *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Annals of Math. 90 (1969), 542-575.

[11] P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. 47 (1980), 233-272.

[12] J. HARER - *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 72 (1983), 221-239.

[13] J. HARRIS - *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, II: The even genus case*, à paraître aux Invent. Math.

[14] J. HARRIS et D. MUMFORD - *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. 67 (1982), 23-86.

[15] S. KLEIMAN et D. LAKSOV - *Another proof of the existence of special divisors*, Acta Math. 132 (1974), 163-176.

[16] D. MUMFORD - *Hirzebruch's proportionality principle in the non-compact case*, Invent. Math. 42 (1977), 239-272.

[17] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, L'Ens. Math. 24 (1977), 39-110.

[18] M. REID - *Canonical 3-folds*, Journées de géométrie algébrique d'Angers, 1979 (A. Beauville ed.).

[19] B. SEGRE - *Sui moduli delle curve poligonali e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann*, Math. Ann. 100 (1928), 537-551.

[20] E. SERNESI - *L'unirazionalitá della varietá dei moduli delle curve di genere dodici*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa (4), 8 (1981), 405-439.

[21] F. SEVERI - *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann I*, Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei (5), 241 (1915), 877-888.

[22] Y.-S. TAI - *On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties*, Invent. Math. 68 (1982), 425-439.

Maurizio CORNALBA

Dipartimento di Matematica
Universitá di Pavia
I-27100 Pavia
Italia