Astérisque

GUY HENNIART

Les inégalités de Morse

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 617, p. 43-61
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__43_0>

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983/84, n° 617 Novembre 1983

LES INÉGALITÉS DE MORSE
[d'après E. Witten]

par Guy HENNIART

0.1. Cet exposé[1] se veut une *introduction* aux méthodes introduites par E. Witten dans ses récents articles "Supersymmetry and Morse theory" [22] et "Holomorphic Morse inequalities" [23]. Nous illustrerons ces idées nouvelles dans un cas simple mais révélateur, en donnant d'après [22] une démonstration, de nature *analytique*, des classiques inégalités de Morse pour une variété différentiable compacte munie d'une fonction numérique à points critiques non dégénérés. Le lecteur pourra se convaincre que la méthode employée est élégante et naturelle. Elle est en outre fort intéressante, puisqu'elle possède de nombreuses applications ou généralisations que nous décrirons brièvement au § 5.

0.2. Au § 1 nous rappelons les inégalités de Morse et au § 2 nous exposons la méthode de Witten, la démonstration proprement dite intervenant au § 4. Au § 3, nous décrivons comment E. Witten est poussé à raffiner les inégalités de Morse en proposant un modèle géométrique pour la cohomologie entière d'une variété différentiable compacte M , modèle construit à l'aide d'une structure riemannienne sur M et d'une fonction de Morse sur M . Au § 5, outre quelques autres applications de la méthode de Witten, nous indiquons fort brièvement comment une généralisation, pour l'instant conjecturale, au cas de variétés de dimension infinie, conduirait à résoudre certains problèmes de symétrie brisée dans des modèles supersymétriques de théorie quantique des champs ; ces problèmes constituaient d'ailleurs la motivation principale de E. Witten dans [22].

0.3. Je tiens à remercier M. Vergne de m'avoir communiqué [9], [10] et [18], et aussi L. Boutet de Monvel, T. Fack, G. Laumon, J. Sjöstrand et tout particulièrement A. Connes pour les conversations que nous avons eues au sujet de cet exposé.

1. INÉGALITÉS DE MORSE

1.1. Soient M une variété différentiable C^∞ , connexe et compacte, n sa dimension, et $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur M . Un *point critique* de h est un point de M où la différentielle dh de h s'annule. En un tel point critique p , on définit l'application hessienne Hh_p de h , qui est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace $T_p(M)$ tangent à M en p : si l'on introduit des coordonnées locales $x_1,\dots,x_n$ au voisinage de p dans M, la matrice de Hh_p dans la base de $T_p(M)$ donnée par les $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p)$. On dit qu'un point critique p de h est *non dégénéré* si Hh_p est une forme bilinéaire inversible sur $T_p(M)$ et on appelle indice du point critique p l'indice de la forme Hh_p, qu'on note $\lambda(p)$. Rappelons le célèbre "lemme de Morse" [20, p. 6].

Lemme 1.1.— *Soit* p *un point critique non dégénéré de* h ; *posons* $\lambda = \lambda(p)$. *Il existe alors un système de coordonnées locales* $x_1,\dots,x_n$ *sur un voisinage* U *de* p *tel que* $x_i(p) = 0$ *pour* $i = 1,\dots,n$, *et que sur* U *on ait* $h = h(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

En particulier, on voit qu'un point critique non dégénéré est isolé. Nous dirons que h est une fonction de Morse sur M si tout ses points critiques sont non dégénérés ; l'ensemble C de ses points critiques est alors fini. On sait que pour tout entier $k \geq 0$, si l'on munit l'espace F des fonctions de classe C^∞ de M dans $\mathbb{R}$ de la topologie C^k, alors l'ensemble des fonctions de Morse sur M est dense dans F [20, p. 37].

1.2. Supposons désormais que h *est une fonction de Morse sur* M. Fixons un corps K commutatif. Pour tout entier $i \geq 0$, notons m_i le nombre de points critiques de h dont l'indice vaut i, et notons b_i le i-ième nombre de Betti de M relativement à K : $b_i = \dim_K H_i(M,K)$, où $H_i(M,K)$ est le i-ième groupe d'homologie singulière de M à coefficients dans K. Les *inégalités de Morse* peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$m_0 \geq b_0$$
$$m_0 - m_1 \leq b_0 - b_1$$
$$m_0 - m_1 + m_2 \geq b_0 - b_1 + b_2$$
$$\dots$$
$$m_0 - m_1 + \dots + (-1)^n m_n = b_0 - b_1 + \dots + (-1)^n b_n .$$

La dernière ligne donne la caractéristique d'Euler de M, en termes des nombres de Morse m_i. Posant

$$P(t) = \sum_{i\geq 0} b_i t^i \quad \text{et} \quad M(t) = \sum_{i\geq 0} m_i t^i ,$$

ces inégalités traduisent l'existence d'un polynôme Q, à coefficients entiers positifs, tel qu'on ait

$$M(t) - P(t) = (1+t)Q(t) .$$

1.3. Ces inégalités fournissent de fortes informations sur l'homologie de M. On a en particulier le critère suivant :

Principe lacunaire de Morse : Supposons qu'on ait $m_i m_{i+1} = 0$ pour tout entier i. Alors $Q(t) = 0$ et $M(t) = P(t)$, quel que soit le corps K. En particulier, le groupe $H_i(M,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang m_i.

Une jolie application de ce principe est l'exemple suivant [12], où l'on calcule l'homologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Choisissons des nombres réels $\lambda_0 < \lambda_1 \ldots < \lambda_n$. Sur la sphère $S = \{(z_0,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1\}$ considérons la fonction $f(z_0,\ldots,z_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i |z_i|^2$. Cette fonction se factorise par le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de S et donne une fonction de Morse h qui ne possède que des points critiques d'indice pair ; en fait le point $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ avec 1 en la i-ième coordonnée est l'unique point critique d'indice $2i$. On a donc $b_i = 0$ pour i impair et $b_i = 1$ pour i pair, $i \leq 2n$.

1.4. Une autre façon de formuler les inégalités de Morse est de dire qu'il existe un complexe $E^\bullet$ d'espaces vectoriels sur K

$$0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

avec $\dim_K E^k = m_k$ et $\dim_K H^k(E^\bullet) = b_k$. La démonstration de E. Witten fournit, dans le cas où l'on prend $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de tels complexes, construits à partir de h et du complexe des formes différentielles sur M . Il s'agit donc en fait de complexes qui "calculent" la cohomologie de de Rham de M plutôt que son homologie singulière. L'intérêt majeur de la méthode est qu'elle est de nature analytique par contraste avec les méthodes de démonstration classiques, de nature topologique ou géométrique [20, 12, 13] : elle pourra donc s'appliquer dans des cas où celles-ci sont inopérantes (*cf.* § 5). On se donne donc une fonction de Morse h sur M et on note $b_i = \dim H^i_{DR}(M)$ la dimension du i-ième espace de cohomologie du complexe de de Rham de M (formes différentielles à valeurs *complexes*)

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{\ d\ } A^1(M) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\ d\ } A^n(M) \longrightarrow 0 .$$

1.5. Si M est munie d'une structure riemannienne (ce qu'on peut toujours supposer), la théorie de Hodge permet de calculer les b_i . Introduisant l'adjoint d^* de d [8] et le laplacien $\Delta = dd^* + d^*d$, on sait que le sous-complexe des formes harmoniques $\operatorname{Ker}\Delta$, sur lequel la différentielle d est nulle, a la dimension b_i en degré i . En fait le laplacien Δ est un opérateur elliptique sur $A(M)$ et considéré comme un opérateur autoadjoint (non borné) sur l'espace $A_{L^2}(M)$ des sections de carré intégrable (pour la mesure riemannienne de M) du fibré des formes différentielles, c'est un opérateur positif à spectre discret : ses valeurs propres $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ tendent vers l'infini. Par suite si l'on fixe un nombre réel A , le sous-complexe de $A(M)$ engendré par les vecteurs propres de valeurs propres $\leq A$ (on sait que ces vecteurs propres appartiennent à $A(M)$), est un complexe d'espaces vectoriels de dimension finie, dont la cohomologie est isomorphe à $\operatorname{Ker}\Delta$.

1.6. L'idée fondamentale de Witten est d'utiliser h pour perturber la différentielle d de $A(M)$, donc aussi le laplacien Δ , pour obtenir un opérateur dont le spectre aura une structure simple, mais permettra aussi de calculer $H_{DR}(M)$.

Remarque.— Cette idée, commune en physique mathématique, intervient aussi chez certains mathématiciens ([28], [29]).

Soit t un paramètre réel. On pose alors

$$d_t = e^{-ht} d e^{ht} ;$$

on note d_t^* l'adjoint de d_t : $d_t^* = e^{ht} d^* e^{-ht}$, et on pose

$$\Delta_t = (d_t + d_t^*)^2 = d_t d_t^* + d_t^* d_t .$$

De même que Δ , l'opérateur Δ_t est un opérateur elliptique qui, considéré comme opérateur autoadjoint (non borné) dans $A_{L^2}(M)$ est positif à spectre discret. Comme d_t est obtenu par conjugaison de d par la fonction e^{ht} , la cohomologie de $A(M)$ muni de d est la même que celle de $A(M)$ muni de d_t , et ainsi $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\operatorname{Ker} \Delta_t$ sont isomorphes. Les inégalités de Morse sont donc entraînées par le résultat suivant.

THÉORÈME 1.6 (Witten).— *Soit* A *un nombre réel, assez grand. Alors pour* t *assez grand,* Δ_t *possède, en chaque degré* i *, exactement* m_i *vecteurs propres indépendants de valeurs propres* $\leq A$.

2. LE PRINCIPE DE LA MÉTHODE

2.1. Dans ce paragraphe, nous voulons expliquer la démarche suivie par Witten pour aboutir à ce théorème. Soit $\omega \in A(M)$. On a

$$d_t \omega = d\omega + t\, dh \wedge \omega$$

d'où l'on tire

$$\Delta_t \omega = \Delta\omega + t^2 |dh|^2 \omega + tG\omega ,$$

où G est un opérateur $A^0(M)$-linéaire donné par un endomorphisme du fibré vectoriel $\Lambda(M)$, que nous décrivons en 4.1. Ainsi on a superposé au laplacien de M un "potentiel" dont la partie importante est $t^2|dh|^2$. Quand t tend vers l'infini ce potentiel est énorme, sauf aux points critiques de h . Aussi les vecteurs propres de Δ_t ont tendance à se concentrer au voisinage de ces points critiques. En fait on a le lemme suivant, prouvé en 4.2.

Lemme 2.1.— *Soit* K *une partie fermée de* M *ne contenant pas de points critiques. Alors il existe une constante* c *dépendant de* M , K , h , *et* A *telle qu'on ait, pour* $t \geq 1$ *et* $\Phi \in A(M)$ *vérifiant* $\Delta_t \Phi = \lambda\Phi$, $\lambda \leq A$, *l'inégalité*

$$\int_K \langle\Phi,\Phi\rangle \leq \frac{c}{t} \int_M \langle\Phi,\Phi\rangle$$

(le produit scalaire est ici celui donné par la structure riemannienne de M *et l'on intègre par rapport à la mesure riemannienne).*

2.2. On est alors conduit à faire une étude de Δ_t au voisinage des points critiques, en s'intéressant aux vecteurs propres concentrés près de ces points. Soient p un point critique, ℓ son indice. Choisissons une base de $T_p(M)$ qui soit orthonormale pour la métrique riemannienne et dans laquelle Hh_p soit diagonale de valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, les ℓ premières étant négatives. Considérons au voisinage de p les coordonnées normales $x_1,\ldots,x_n$ attachées à cette base. Alors h est de la forme

$$h = h(p) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2/2 + \eta$$

où η est nulle d'ordre 3 en p, et l'opérateur Δ_t diffère peu de l'opérateur

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + t^2\lambda_i^2 x_i^2 - t\lambda_i K_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(H_i - t\lambda_i K_i) ,$$

où l'opérateur K_i commute à la multiplication par les fonctions et transforme dx_i en $-dx_i$, laissant invariant dx_k pour $k \neq i$. Notons Δ_t' l'opérateur écrit ci-dessus, considéré comme agissant dans $A_{L^2}(\mathbb{R}^n)$. Heuristiquement, les valeurs propres de Δ_t et celles des Δ_t' devraient avoir le même comportement en t. En fait la théorie de la perturbation permet [25, 27] de suivre les valeurs propres de Δ_t ou Δ_t' en fonction de t : ces valeurs propres possèdent un développement asymptotique de la forme $t(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t^2} + \ldots)$. Le premier ordre de ce développement (i.e. le coefficient α_0) pour la n-ième valeur propre de Δ_t est alors le même que pour la n-ième valeur propre de l'opérateur somme des Δ_t' pour les différents points critiques [25]. Au § 4, par une méthode dite de "conditionnement", nous justifierons cette localisation en les points critiques (passage de Δ_t aux Δ_t') et nous comparerons les valeurs propres, prouvant le théorème. Continuons l'explication heuristique de la démonstration.

2.3. Il est très facile de calculer le spectre de Δ_t', qui est écrit sous forme de somme d'opérateurs n'agissant chacun que sur une seule variable. Les opérateurs H_i et K_i commutent, et l'opérateur H_i se relie facilement à l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$ dans $L^2(\mathbb{R})$, qui est bien connu : c'est le hamiltonien de l'oscillateur harmonique, dont les valeurs propres sont les entiers positifs impairs, la valeur propre 1 étant donnée par la fonction $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Les valeurs propres de Δ_t' sont donc de la forme

$$t\left[\sum_{i=1}^{n}(1 + 2N_i)|\lambda_i| - \lambda_i\varepsilon_i\right]$$

avec $N_i \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. Le coefficient de t ne peut être nul que si $N_i = 0$ et $\varepsilon_i = \operatorname{signe}(\lambda_i)$ pour $i = 1,\ldots,n$. On voit alors facilement que le vecteur propre correspondant est proportionnel à

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-|\lambda_i|x_i^2/2}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_\ell .$$

En particulier, c'est une ℓ-forme. Transportant ces résultats à Δ_t, on en déduit que, sur les formes de degré ℓ, Δ_t a exactement m_ℓ vecteurs propres indépendants dont les valeurs propres ne tendent pas vers l'infini avec t. A cause du développement asymptotique, ces valeurs propres sont bornées, ce qui conduit au théorème.

Remarque 1.— Dans le cas où la fonction h est quadratique et la métrique euclidienne près des points critiques, on prouve (*cf.* 4.5) que ces valeurs propres sont à décroissance exponentielle ; en particulier leur développement asymptotique est nul à tout ordre. Il en est sans doute de même dans le cas général (ce qui implique en particulier que le théorème 1.6 est valable pour $A > 0$ quelconque) : en effet ce développement asymptotique se calcule à l'aide de données locales au voisinage des points critiques ; s'il n'était pas nul, cela signifierait que l'on peut savoir, à partir de données locales, si un point critique ne contribue pas à la cohomologie de M [2].

Remarque 2.— Notons $T_p^-(M)$ le sous-espace de $T_p(M)$ de dimension ℓ (sur lequel la forme quadratique associée à Hh_p prend des valeurs négatives), engendré par les vecteurs tangents $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_\ell}$; alors la ℓ-forme vecteur propre de Δ_t^ℓ que nous avons considérée prend une valeur non nulle sur $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_\ell}$, ce qui donne une orientation de $T_p^-(M)$.

3. RETOUR À LA GÉOMÉTRIE

3.1. Avant de justifier au § 4 les considérations précédentes, tentons, avec Witten, de les pousser plus avant, c'est-à-dire de calculer l'action de d_t sur le complexe que nous avons construit. Comme nous l'avons vu, le développement asymptotique des valeurs propres ne peut nous être utile. Witten utilise alors une démarche plus précise. On a, en considérant Δ_t , superposé à Δ un potentiel qui devient énorme sauf aux points critiques de h . En quelque sorte les vecteurs propres ("états") de basse valeur propre sont piégés par des puits de potentiels. On veut alors voir si, par une sorte d'effet tunnel, un tel vecteur propre pourrait passer d'un puits de potentiel à l'autre. Concrètement cela revient, si ω est un tel vecteur propre concentré près d'un point critique p d'indice $\ell+1$, et η un tel vecteur propre concentré près d'un point critique q d'indice ℓ , à évaluer, quant $t \to +\infty$, l'intégrale $I=\int\langle\omega,d_t\eta\rangle$. Witten esquisse dans [22] deux méthodes de traitement de cet effet tunnel, l'une semi-classique (méthode d'approximation WKB), l'autre moderne (méthode des instantons). Cela donne deux versions pour l'évaluation de l'intégrale précédente, que nous résumons ci-après.

3.2. Dans la méthode des instantons, le système formé par d_t , d_t^* et Δ_t apparaît par quantification d'un système mécanique lagrangien sur M , où la métrique riemannienne intervient dans l'expression de l'énergie cinétique, et la fonction h dans celle de l'énergie potentielle. Ne gardant du lagrangien du système que les termes asymptotiquement dominants quand $t \to +\infty$, on obtient un autre lagrangien qui en $(m,v) \in T(M)$ s'exprime par $\mathcal{L}(m,v) = \frac{1}{2}(|v|^2 + t^2|dh_m|^2)$. Les trajectoires d'effet tunnel sont celles qui minimisent l'action associée à ce lagrangien, et on voit facilement que ce sont les trajectoires intégrales du champ de vecteurs $-\operatorname{grad}(h)$ joignant p à q . Le long d'une telle trajectoire, on peut alors évaluer la contribution à l'intégrale I comme $e^{-t(h(p)-h(q))}$ (voir [22], p. 19 pour les détails).

3.3. Dans la méthode d'approximation WKB [7], on constate que si les vecteurs propres ω et η décroissent en e^{-t} près des points critiques correspondants, la contribution à $\langle\omega, d_t\eta\rangle$ sera maximale le long des trajectoires du champ de vecteurs $\xi = -\operatorname{grad}(h)$ joignant p et q, et négligeable ailleurs. On se ramène alors à un problème en dimension 1 et on retrouve l'évaluation précédente. S'il n'y a qu'une trajectoire joignant p à q on voit en particulier que $d_t\eta$ n'est pas nul. Evidemment il est difficile de rendre entièrement rigoureux ces raisonnements ; on peut néanmoins espérer que les méthodes développées pour étudier les potentiels à puits multiples s'appliqueront à ce cas [26 et surtout 27][2]. Plus grave, les contributions de différentes trajectoires peuvent être de signes différents, et la somme être négligeable devant e^{-t} sans pour autant être nulle. Néanmoins, la méthode WKB permet de suivre ces signes et ainsi E. Witten est amené à proposer un modèle pour la cohomologie de M, que nous allons décrire.

3.4. On se place dans la situation générique où pour tout point critique p d'indice $\ell+1$ et tout point critique q d'indice ℓ, la variété instable $W_u(p)$ (c'est l'union des trajectoires de ξ partant de p ; c'est un espace $\mathbb{R}^{\ell+1}$ immergé dans M et son espace tangent en p est $T_p^-(M)$) et la variété stable $W_s(q)$ (l'union des trajectoires de ξ arrivant en q) ont une intersection transverse. Alors il y a un ensemble fini Φ de trajectoires de ξ dans $W_u(p) \cap W_s(q)$. Pour tout point critique r choisissons une orientation de $W_u(r)$ (d'après la remarque 2 de 2.3, cela peut se faire en choisissant un vecteur propre réel, de basse valeur propre, de l'opérateur Δ_t' associé à r). Soient $\varphi \in \Phi$, et v le vecteur tangent à φ en p. L'orientation de $W_u(p)$ donne une orientation de l'orthogonal de v dans $T_p^-(M)$, orientation que l'on peut suivre le long de φ ; au point q cela donne une orientation d'un supplémentaire de $T_q^+(M)$ que l'on peut comparer à l'orientation de $W_u(q)$. On posera $n(\varphi) = +1$ ou -1 suivant que ces deux orientations coïncident ou non et on notera $n(p,q)$ la somme $\sum_{\varphi\in\Phi} n(\varphi)$.

Remarque.— L'entier $n(p,q)$ peut aussi s'interpréter comme le nombre d'intersections de la "sphère ascendante" et de la "sphère descendante" de h [19, p. 34].

3.5. On introduit alors un complexe de $\mathbb{Z}$-modules libres

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\partial} E^1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial} E^n \longrightarrow 0 ,$$

où E^i a une base e_q indexée par l'ensemble des points critiques q d'indice i, et où l'on pose, si q est d'indice i,

$$\partial(e_q) = \sum_{\substack{p \text{ critique} \\ \lambda(p)=i+1}} n(p,q)e_p .$$

On peut penser que, au moins si M est orientée, la cohomologie du complexe précédent est isomorphe à la cohomologie singulière de M, autrement dit que, si M est orientée, $H^i(E^\bullet)$ et $H^i(M,\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$-modules isomorphes pour $i = 0,\dots,n$.

Remarque 1.— Cette conjecture est en tous cas vraie dans les exemples simples.

Remarque 2.— Le complexe "dual"

$$0 \longrightarrow E^n \xrightarrow{\partial'} E^{n-1} \xrightarrow{\partial'} \dots \longrightarrow E^0 \longrightarrow 0$$

où $\partial'(e_p) = \sum_{\substack{n \text{ critique} \\ \lambda(q)=i-1}} n(p,q)e_q$ si p est d'indice i, est introduit dans [16], où il est affirmé que l'homologie de ce complexe et $H^\bullet(M,\mathbb{Z})$ sont isomorphes[3].

Remarque 3.— Si M n'est pas orientée, le modèle plus haut pourrait donner la cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.6

4.1. Expression de Δ_t

Notons ∇h le gradient de h, et, pour tout champ de vecteurs ξ sur M, notons $c(\xi)$ le produit intérieur par ξ. On a

$$d_t = d + t\,dh\wedge$$

d'où

$$d_t^* = d^* + t\,c(\nabla h)$$

et

$$\Delta_t = \Delta + t^2|dh|^2 + tG$$

où l'on constate que G est $A^0(M)$-linéaire, donné par un endomorphisme du fibré des formes différentielles sur M, et admettant la description suivante :

$$G = \Delta h + 2S ,$$

où S est la dérivation de la $A^0(M)$-algèbre $A(M)$, qui, en degré 1, est donnée par l'endomorphisme du fibré cotangent à M obtenu en voyant, en tout point $x \in M$, la dérivée covariante seconde de h comme un endomorphisme de $T_x^*(M)$. En particulier, il est clair que S et G sont des opérateurs bornés dans $A_{L^2}(M)$.

4.2. Preuve du lemme 2.1

Soit g un vecteur propre pour Δ_t, de valeur propre λ, $\lambda \leq A$. On a alors

$$\Delta g + t^2|dh|^2 g = -tGg + \lambda g$$

d'où par intégration sur M

$$\int(\langle\Delta g,g\rangle + t^2|dh|^2|g|^2) \leq (t\|G\| + A)\int|g|^2 .$$

Comme $|dh|$ est borné inférieurement sur K par un nombre ε strictement positif, on obtient

$$\int_K |g|^2 \leq \varepsilon^{-1}\left(\frac{\|G\|}{t} + \frac{A}{t^2}\right)\int_M |g|^2 ,$$

d'où le résultat.

Remarque.— On obtient aussi en outre qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait $\int_M \langle\Delta g,g\rangle \leq c.t\int |g|^2$ pour $t \geq 1$.

4.3. Passons maintenant à la démonstration du théorème. Elle se découpe naturellement en deux étapes. Dans la première, on montre que en chaque degré ℓ il y a, pour t grand, au moins m_ℓ vecteurs propres indépendants de Δ_t , de valeurs propres $\leq A$. Dans la seconde, on prouve que les autres valeurs propres tendent vers l'infini avec t . Chacune de ces étapes est plus claire si l'on suppose qu'au voisinage de tout point critique p la fonction h s'écrit $h(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2/2$ en les coordonnées locales de 2.2, et que la métrique est euclidienne en ce voisinage : nous dirons que nous sommes alors dans le cas euclidien et nous détaillerons particulièrement ce cas. En fait nous prouvons en ce cas le théorème 1.6 avec $A > 0$ quelconque. Bien entendu, h étant donnée, on peut toujours trouver des coordonnées près des points critiques et une métrique riemannienne qui vérifient ces propriétés.

4.4. La première étape est basée sur le principe du minimax [21, vol. IV, p. 76 et 78]. Rappelons ce principe. Sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on se donne un opérateur (non borné) autoadjoint T vérifiant $\langle T\psi,\psi\rangle \geq -M\|\psi\|^2$ pour une certaine constante M . On lui associe la forme hermitienne fermée Q_T qui étend $\psi \mapsto \langle T\psi,\psi\rangle$ (le domaine $\mathrm{Dom}(Q_T)$ de Q_T contient celui de T , mais peut être plus grand). On suppose que T a un spectre discret et on énumère ses valeurs propres par ordre croissant

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots \quad .$$

On a alors

$$\lambda_n = \sup_F \inf_{\substack{\psi\in F^\perp\cap \mathrm{Dom}(Q_T)\\ \|\psi\|=1}} Q_T(\psi)$$

où la borne supérieure est prise sur les sous-espaces F de $\mathcal{H}$ de dimension au plus $(n-1)$.

Remarque 1.— On peut aussi remplacer $\mathrm{Dom}(Q_T)$ par $\mathrm{Dom}(T)$.

Remarque 2.— Le membre de droite de l'égalité précédente s'appelle la n-ième valeur caractéristique de Q_T .

4.5. Fixons une fonction C^∞ φ , paire, positive, nulle hors de $[-2,+2]$, égale à 1 sur $[-1,+1]$ et pour $B > 0$ posons $\varphi_B(x) = \varphi(Bx)$. Plaçons-nous dans les notations de 2.2, auprès d'un point critique p d'indice ℓ , et, prenant B assez grand, considérons la ℓ-forme $\omega_{t,p}$ à support près de p

$$\omega_{t,p} = \prod_{i=1}^{n}\left(e^{-t|\lambda_i|x_i^2/2}\varphi_B(x_i)\right)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_\ell \ .$$

Dans le cas euclidien, Δ_t s'exprime exactement comme Δ_t' sur $\omega_{t,p}$, et il est extrêmement facile de calculer $\int\langle\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle$, qui se décompose en produit d'intégrales portant sur les x_i . Typiquement on a à évaluer une intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}[-\varphi_B\varphi_B'' + 2tx\varphi_B\varphi_B' + (t^2x^2 - t)(1-\varphi_B^2)]dx$$

et, comme φ''_B , φ'_B et $1-\varphi_B^2$ sont nulles au voisinage de 0, une estimation triviale donne qu'il existe $\beta > 0$ tel qu'on ait

$$\int <\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}> \le e^{-\beta t}\int <\omega_{t,p},\omega_{t,p}> .$$

Si l'on a choisi B convenablement, les supports des $\omega_{t,p}$ pour les différents points critiques d'indice ℓ ne se rencontrent pas ; appelant F_ℓ le sous-espace de $A^\ell_{L^2}(M)$ engendré par les $\omega_{t,p}$, on voit par le principe du minimax que les m_ℓ premières valeurs propres de Δ_t sur $A^\ell_{L^2}(M)$ décroissent exponentiellement en t : en effet, pour tout sous-espace F de $A^\ell_{L^2}(M)$ de dimension $\le m_\ell - 1$, l'espace $F^\perp \cap \mathrm{Dom}(Q_T) \cap F_\ell$ est non réduit à 0 : on a donc $\lambda_{m_\ell}(t) \le e^{-\beta t}$, si $\lambda_m(t)$ désigne la m-ième valeur propre de Δ_t sur $A^\ell_{L^2}(M)$. Dans le cas non euclidien, Δ_t s'exprime comme somme de Δ'_t et de termes complémentaires de la forme

$$a(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \quad , \quad b(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad t^2|\lambda_i|^2c(x) \quad , \quad t|\lambda_i|d(x)$$

où $a(x)$, $d(x)$ sont nuls en p et $c(x)$ d'ordre au moins 3 en p . Utilisant alors le changement de variable $X = x\sqrt{t}$ et le fait que φ est paire, on trouve que l'on a

$$\int <\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}> \le A'\int <\omega_{t,p},\omega_{t,p}>$$

pour une certaine constante $A' > 0$. Appliquant le principe du minimax comme plus haut, on en tire l'inégalité $\lambda_{m_\ell}(t) \le A'$, ce qui termine la première étape.

Remarque.— Un meilleur choix des $\omega_{t,p}$ permettrait sans doute de remplacer A' par $A'/\sqrt{t}$, ce qui donnerait le théorème 1.3 pour $A > 0$ quelconque.

4.6. La seconde étape est plus délicate : si l'on utilise le principe du minimax, il s'agit de prouver, pour tout entier $r \ge 0$, que la (m_r+1)-ième valeur caractéristique de Q_t sur $A^r_{L^2}(M)$ est supérieure à γt pour une constante $\gamma > 0$. Il faut alors ramener le calcul de Q_t à un calcul au voisinage de chacun des points critiques. On utilisera ici une approche qui m'a été communiquée par A. Connes. Le domaine de Q_t est l'espace $H^1(\Lambda M)$ des formes $\psi \in A_{L^2}(M)$ telles que les courants $d\psi$ et $d^*\psi$ soient aussi dans $A_{L^2}(M)$. Sur ce domaine, on a

$$(*) \qquad Q_t(\psi) = \int_M (|d\psi|^2 + |d^*\psi|^2 + t^2|dh|^2|\psi|^2 + t<G\psi,\psi>) .$$

Pour chaque point critique p , choisissons un voisinage V_p défini, avec les notations de 2.2, par des conditions $|x_i| < \alpha$ pour une constante $\alpha > 0$ que nous pouvons choisir aussi petite que nous voulons ; en particulier nous supposerons les V_p disjoints. Posons

$$V_0 = M \setminus \overline{\bigcup_{p\in C} V_p} .$$

La stratégie est alors de découper l'intégrale (*) sur M en sommes d'intégrales sur V_0 et les V_p et à évaluer ces intégrales.

Plus précisément, fixons *désormais* l'entier $r \ge 0$ et restreignons-nous à l'étude de Q_t sur $A^r_{L^2}(M)$. L'intégrale correspondante sur $V = V_0$ ou $V = V_p$

définit une forme quadratique $Q_{t,V}$ sur $A^r_{L^2}(V)$, de domaine $H^1(\Lambda^r V)$. Nous allons prouver que si $V = V_0$ ou $V = V_p$ avec p d'indice distinct de r, alors la première valeur caractéristique de $Q_{t,V}$ est supérieure, pour t grand, à γt pour une constante $\gamma > 0$, et que si $V = V_p$ avec p d'indice r, il en est de même de la seconde valeur caractéristique. On en déduit que la (m_r+1)-ième valeur caractéristique de Q_t sur $A^r_{L^2}(M)$ vérifie la même propriété, ce qui achève la seconde étape.

4.7. Le même raisonnement qu'en 4.2 prouve le résultat pour Q_{t,V_0}. Soit p un point critique d'indice ℓ. Pour l'étude de Q_{t,V_p} sur $A^r_{L^2}(V_p)$, nous nous placerons dans le cas euclidien (voir 4.10 pour des indications dans le cas général), avec les notations de 2.2. Soit $\psi \in H^1(\Lambda^r V_p)$; on peut écrire

$$\psi = \sum_I f_I(x)dx_I ,$$

la somme portant sur les sous-ensembles I de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal r et dx_I désignant $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ si $I = \{i_1,\ldots,i_r\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. L'intégrale $Q_{t,V_p}(\psi)$ s'exprime alors comme somme (sur I) des intégrales F_I :

$$F_I = \int_{V_p} \sum_{i=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial f_I}{\partial x_i}\right|^2 + (t^2\lambda_i^2 x_i^2 - t\lambda_i \varepsilon_i^I)|f_I|^2 \right] dx_1 \ldots dx_n$$

avec $\varepsilon_i^I = -1$ si $i \in I$ et $\varepsilon_i^I = +1$ si $i \notin I$.

4.8. Faisons d'abord une étude en dimension 1. Notons I_α l'intervalle $]-\alpha,+\alpha[$ de $\mathbb{R}$, et considérons sur $L^2(I_\alpha)$ la forme quadratique

$$K_t(f) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (|f'|^2 + (t^2x^2 - t)|f|^2)dx ,$$

de domaine $H^1(I_\alpha)$. Notons $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$ les première et deuxième valeurs caractéristiques de K_t.

Lemme.— Il existe des constantes $\rho, \sigma > 0$ *telles qu'on ait*

$$\mu_1(t) \geq -\rho$$
$$\mu_2(t) \geq \sigma t$$

pour t *assez grand.*

Démonstration.— Prouvons d'abord la seconde inégalité. Pour $f \in L^2(I_\alpha)$, posons $U_t f(X) = t^{-1/4} f(X/\sqrt{t})$; on obtient ainsi un isomorphisme isométrique de $L^2(I_\alpha)$ sur $L^2(I_{\alpha\sqrt{t}})$. Posant $g = U_t f$, on a

$$K_t(f) = t\int_{-\alpha\sqrt{t}}^{+\alpha\sqrt{t}} (|g'|^2 + (X^2-1)|g|^2)dX . \tag{1}$$

Posons $\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On a

$$\int_{\beta\leq|X|\leq\alpha\sqrt{t}} (|g'|^2 + (X^2-1)|g|^2)dX \geq (\beta^2-1)\int_{\beta\leq|X|\leq\alpha\sqrt{t}} |g|^2dX , \tag{2}$$

et d'autre part

$$\int_{|X|\leq\beta} (|g'|^2 + (X^2-1)|g|^2)dX \geq \int_{|X|\leq\beta} (|g'|^2 - |g|^2)dX . \tag{3}$$

Mais la forme quadratique $g \mapsto \int_{-\beta}^{+\beta} |g'|^2dX$ est attachée au problème de Neumann sur

I_β . On sait que la première valeur propre de l'opérateur correspondant est nulle, les vecteurs propres étant les fonctions constantes, et que la seconde valeur propre est $\frac{\pi^2}{4\beta^2}$. Si g est orthogonale aux constantes sur I_β , on a donc

$$\int_{-\beta}^{+\beta}(|g'|^2 - |g|^2)dX \geq \left(\frac{\pi^2}{4\beta^2} - 1\right)\int_{-\beta}^{+\beta}|g|^2 dX \; . \tag{4}$$

De (2), (3) et (4), on tire qu'on a

$$K_t(f) \geq t(\beta^2 - 1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}|U_t f|^2 dx \tag{5}$$

si $U_t f$ est orthogonale aux constantes, et par suite on a

$$\mu_2(t) \geq t(\beta^2 - 1) \; .$$

La borne inférieure pour $\mu_1(t)$ découle alors de l'inégalité de Temple [21, vol.IV, p. 84] appliquée par exemple à une fonction de la forme $\varphi_B(x)e^{-tx^2/2}$ pour B convenable.

4.9. Retournons à l'étude des intégrales F_I . L'opérateur autoadjoint associé à la forme quadratique sur $L^2(V_p)$ définie par F_I est clairement la fermeture de l'opérateur essentiellement autoadjoint

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{(i-1)\text{ termes}} \otimes D_{i,t} \otimes 1 \ldots \otimes 1$$

où $D_{i,t}$ agit seulement sur la variable x_i , et se relie de manière immédiate à la forme quadratique K_t de 4.8. On applique alors les résultats de 4.8. Deux cas se présentent :

a) ou bien il existe un entier i tel que $\varepsilon_i^I\lambda_i < 0$, ce qui arrive précisément si p n'est pas d'indice r ou si p est d'indice r et $I \neq \{1,\ldots,r\}$. Alors il est clair, en utilisant la première inégalité du lemme de 4.8, qu'on a

$$F_I \geq (\sigma' t - \rho')\int_{V_p}|f_I|^2 dx_1\ldots dx_n \; , \tag{6}$$

pour des constantes ρ' et $\sigma' > 0$;

b) ou bien on a $\varepsilon_i^I\lambda_i > 0$ pour tout entier i , ce qui est précisément le cas si p est d'indice r et $I = \{1,\ldots,r\}$, et on a l'inégalité précédente (6) pourvu que f_I soit orthogonale à un sous-espace de dimension 1 de $L^2(V_p)$.

Les cas a) et b) donnent bien les renseignements voulus sur les valeurs caractéristiques de Q_{t,V_p} .

4.10. Remarques

1. On peut suivre la même démarche dans le cas non euclidien ; il faut alors tenir compte de termes supplémentaires dans le calcul de $Q_{t,V_p}(\psi)$ de 4.7, dus au fait que la métrique n'est pas plate au voisinage de p . Mais ces termes supplémentaires ne causent pas de problèmes puisqu'ils sont en $o(t)$.

2. On trouvera dans [18] une approche, dans le cas euclidien, qui donne de manière directe l'inégalité $b_\ell \leq m_\ell$. Dans [25], il est prouvé que les développements asymptotiques de la n-ième valeur propre de Δ_t et de la n-ième valeur propre de

$\bigoplus_{p\in C} \Delta'_t$ (où Δ'_t est un opérateur sur $A_{L^2}(\mathbb{R}^n)$) sont effectivement les mêmes au premier ordre. Ces deux approches sont plus proches de la démarche de Witten que la nôtre. Une approche intermédiaire entre [18] et [25], utilisant l'opérateur $d_t + d_t^*$, m'a aussi été suggérée par L. Boutet de Monvel.

5. AUTRES APPLICATIONS[4]

5.1. Inégalités de Morse généralisées [22, II]

On se donne une variété différentiable compacte M et une fonction h sur M, de classe C^∞, mais on ne suppose plus que h est une fonction de Morse, mais seulement que les points critiques de h forment une sous-variété N de M (pas forcément connexe), non dégénérée au sens où en chaque point de N la matrice hessienne de h a pour rang le rang du fibré normal à N ; alors on obtient des inégalités[5] reliant les b_i aux $m_i = \dim H^i(N,\vartheta)$, ϑ étant le fibré d'orientation de la partie négative du fibré normal à N. L'interprétation se fait en perturbant d par e^{-th} comme en 1.6, et en montrant que pour t grand, le spectre bas de Δ_t correspond à des valeurs propres qui se concentrent au voisinage de N, et ressemble alors au spectre du laplacien de N.

5.2. Champs de vecteurs [22, III]

Soient M une variété différentiable et X un champ de vecteurs sur M. Notons $c(X)$ le produit intérieur par X et $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie, agissant sur le complexe $A(M)$ des formes différentielles sur M. Posons $d_X = d + c(X)$; on a $d_X^2 = \mathcal{L}_X$. Munissant le sous-espace vectoriel $A_X(M)$ de $A(M)$, formé des formes annulées par $\mathcal{L}_X$, de la différentielle d_X, on forme un complexe dont on note $H_X(M)$ la cohomologie. Pour $s \neq 0$ les cohomologies $H_X(M)$ et $H_{sX}(M)$ sont isomorphes. Supposons M compacte, munissons-la d'une structure riemannienne et introduisons $D_X = d_X + d_X^*$, $H_X = D_X^2$. En étudiant par des méthodes analogues aux précédentes, le spectre de H_{sX} quand $s \to \infty$ (le "potentiel" est cette fois $s^2|X|^2$ et les vecteurs propres tendent à se concentrer au voisinage des zéros de X), Witten exprime la caractéristique d'Euler de M (qui est $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim H_{sX}^i(M)$ quel que soit s) en termes d'entiers attachés aux composantes connexes de la variété des zéros de X ; dans le cas où X n'a que des zéros isolés, on retrouve le classique théorème de Hopf.

5.3. Champs de vecteurs : cas riemannien [22, III]

Supposons maintenant que X engendre un groupe d'isométries de la structure riemannienne de M : on dit que X est un champ de vecteurs de Killing. On a alors $H_X = d_X d_X^* + d_X^* d_X$. Notons N l'espace des points où X s'annule, et notons b_N^+ la somme des nombres de Betti d'indice pair de N, b_N^- celle des nombres de Betti d'indice impair. De même posons $b_X^+ = \sum_{i \text{ pair}} \dim H_X^i(M)$ et

$b_X^- = \sum_{i \text{ impair}} \dim H_X^i(M)$. Alors on a

$$b_N^+ = b_X^+ \quad , \quad b_N^- = b_X^- \; .$$

Supposons maintenant qu'en outre M soit de dimension paire et orientée. Alors le complexe de de Rham se divise en parties paire et impaire $A^+(M)$ et $A^-(M)$ sous l'action de l'opérateur $*$, et l'opérateur hermitien

$$Q_X = e^{i\pi/4} d_X + e^{-i\pi/4} d_X^*$$

est impair et s'écrit $Q_X^+ + Q_X^-$ où Q_X^+ applique $A^+(M)$ dans $A^-(M)$ et Q_X^- applique $A^-(M)$ dans $A^+(M)$. L'indice de Q_{sX}^+ est indépendant de s et est égal à la *signature* de M . On a $Q_X^2 = H_X + 2i\mathcal{L}_X$. On retrouve alors le théorème du point fixe ([2], II § 6 ou [6], III § 6) évaluant la signature de M en termes de N .

5.4. Quelques remarques

1. Sans doute les applications 5.1 à 5.3 admettent des démonstrations analogues à celle du § 4. L'auteur du présent exposé *n'a pas* écrit les démonstrations.
2. Witten signale que les preuves qu'il esquisse de ces résultats sont des variantes des démonstrations basées sur le théorème de l'indice[6] [5], [6]. Il serait intéressant de comparer sa démarche avec celle de [3] (voir en particulier le commentaire de [1])[7].

3. Dans [9], [10], on se place dans la situation où un groupe de Lie compact T agit sur une variété différentiable compacte M . Si X est un vecteur de l'algèbre de Lie de T , on note X^* le champ de vecteurs déduit de l'action de T sur M . Alors $H_{-2\pi i X^*}(M)$ est vu comme un anneau de cohomologie équivariante attaché à X . Des classes caractéristiques équivariantes sont construites, menant à une formule de point fixe et une formule de l'indice [*cf.* 11][8].

5.5. Supersymétrie [22, § I et IV, 24]

Dans le cadre des inégalités de Morse, posons

$$Q_1 = d + d^*$$
$$Q_2 = i(d - d^*)$$
$$H = \Delta \qquad ;$$

on a alors

$$\text{(I)} \qquad Q_1^2 = Q_2^2 = H \quad \text{et} \quad Q_1Q_2 + Q_2Q_1 = 0 \; .$$

Dans le cadre de 5.3, posons

$$Q_1 = Q_X$$
$$Q_2 = e^{-i\pi/4} d_X + e^{i\pi/4} d_X^*$$
$$H = H_X$$
$$P = 2i\mathcal{L}_X \qquad ;$$

on a alors

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} Q_1^2 &= H + P \\ Q_2^2 &= H - P \\ Q_1Q_2 + Q_2Q_1 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Dans chacun de ces deux cas, on est en présence d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ décomposé en parties paires et impaires $\mathcal{H}^{\pm}$ et muni d'opérateurs de symétrie hermitiens $Q_1 , Q_2 : \mathcal{H}^{\pm} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mp}$, et d'un opérateur hamiltonien H . En simplifiant extrêmement, la mécanique quantique supersymétrique est l'étude des situations I et II (le fait qu'on n'ait que deux opérateurs de symétrie Q_1 et Q_2 correspond à un monde à une dimension de temps, une dimension d'espace. La situation I correspond à une mécanique non relativiste, la situation II à une mécanique relativiste).

Le point important dans les problèmes de symétrie brisée est de savoir s'il existe des vecteurs $h \in \mathcal{H}$ vérifiant $Q_1h = Q_2h = 0$. Si oui, alors il existe dans la théorie des fermions et des bosons de masse égale. Sinon, la symétrie est "spontanément brisée". On peut chercher s'il existe de tels vecteurs h en étudiant l'indice de $H = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2)$. Mais les modèles auxquels Witten s'intéresse sont des analogues des espaces $A^k(M)$, mais pour des variétés riemanniennes M de dimension infinie, typiquement l'espace des lacets d'une variété riemannienne B (de dimension finie, celle-ci). Extrapolant ses méthodes au cas de dimension infinie, Witten conclut que dans certains modèles supersymétriques, la symétrie n'est pas spontanément brisée[9].

5.6. Inégalités de Morse holomorphes [23]

Si X est un champ de vecteurs holomorphe sur une variété complexe compacte M , la formule de Lefschetz holomorphe d'Atiyah et Bott exprime les nombres de Chern de M en termes des zéros de X [2]. Si M est une variété kählérienne, si X engendre une action du cercle S^1 sur M et si X possède au moins un zéro, Witten généralise la formule de Lefschetz en un système d'inégalités analogue aux inégalités de Morse.

5.7. Inégalités de Morse pour un feuilletage [14]

C'est un résultat, dû à A. Connes, où la méthode analytique inaugurée par Witten s'applique, alors que les méthodes classiques sont inopérantes.

Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage avec une mesure transverse Λ invariante par holonomie. Choisissant une métrique riemannienne le long des feuilles, on obtient un champ d'espaces de Hilbert formé des k-formes harmoniques de carré intégrable. On prouve qu'il existe une transversale T aux feuilles, mesurable, de mesure transverse finie, telle que le champ $L^2(T \cap F)$ (pour F une feuille de M) soit mesurablement isomorphe au champ des k-formes harmoniques. La mesure transverse de T ne dépend pas du choix de T ni de la métrique riemannienne choisie ; c'est un nombre réel positif appelé le k-ième nombre de Betti du feuilletage, et noté b_k .

Soit h une fonction de classe C^∞ sur M, $h : M \to \mathbb{R}$. On veut obtenir une théorie de Morse le *long des feuilles*. Pour h générique, les points critiques de h le long des feuilles forment une sous-variété fermée qui *en général* n'est pas transverse. On ne peut donc éviter les points critiques dégénérés. Mais sur chacune des composantes connexes de l'ensemble des points où cette sous-variété est transverse, l'indice est constant. Regroupant les composantes connexes d'indice k fixé et prenant la mesure transverse on obtient le k-ième nombre de Morse m_k du feuilletage qui est un nombre réel positif. Le résultat [14] est (au moins en codimension ≤ 5) qu'il existe un polynôme à coefficients réels positifs $Q(t)$ tel qu'on ait

$$\Sigma\, m_i t^i = \Sigma\, b_i t^i + (1+t)Q(t) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH - *Circular Symmetry and Stationary-Phase Approximation*, Conférence en l'honneur de L. Schwartz, Ecole Polytechnique, mai 1983.

[2] M.F. ATIYAH et R. BOTT - *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I*, Ann. Math. 86(1967); 374-407, *II*, Ann. Math. 88(1968), 451-491.

[3] M.F. ATIYAH, R. BOTT and V.K. PATODI - *On the heat equation and the index theorem*, Inv. Math. 19(1973), 279-330.

[4] M.F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH - *Spin Manifolds and group actions*, in Essays on topology and related topics, Ed. A. Haefliger, R. Narashiman, Springer-Verlag, 1970.

[5] M.F. ATIYAH and G.B. SEGAL - *Index of elliptic operators II*, Ann. Math. 87 (1968), 531-541.

[6] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER - *Index of elliptic operators I*, Ann. Math. 87 (1968), 484-530; *III*, Ann. Math. 87(1968), 546-604.

[7] T. BANKS, C. BENDER and T.T. WU - *Coupled Anharmonic Oscillators I and II*, Phys. Rev. D8(1973), 3346-3365 et 3366-3378.

[8] M. BERGER, P. GAUDUCHON and E. MAZET - *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes in Math. n° 194 (1971).

[9] N. BERLINE et M. VERGNE - *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. Journal 50(1983), 539-549.

[10] N. BERLINE et M. VERGNE - *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 295, 15 nov. 1982, 539-541.

[11] R. BOTT - *Vector fields and characteristic numbers*, Mich. Math. Journal 14 (1967), 231-244.

[12] R. BOTT - *Lectures on Morse theory, old and new*, B.A.M.S. vol. 7 n° 2, septembre 1982, 331-358.

[13] R. BOTT - *Marston Morse and his mathematical works*, in Selected papers of Marston Morse, Ed. R. Bott, Springer-Verlag, 1981.

[14] A. CONNES - *Inégalités de Morse pour les feuilletages*, en préparation.

[15] W. KLINGENBERG - *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag, 1978.

[16] W. KLINGENBERG - *The Morse complex*, in Symposia di Alta Matematica XXVI, Roma, 1982, 117-122.

[17] G. LAUMON - *Théorie de Morse à la Witten en caractéristique* p , Notes manuscrites de l'auteur, juin 1983.

[18] R. MELROSE - *Elliptic operators on manifolds*, Notes d'un cours au M.I.T., 1983.

[19] J. MILNOR - *Lectures on the* h-*cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, 1966.

[20] J. MILNOR - *Morse theory*, Annals of Mathematics studies n° 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[21] M. REED and B. SIMON - *Methods of modern mathematical Physics, vol. I à IV*, Academic Press, New York, 1978.

[22] E. WITTEN - *Supersymmetry and Morse theory*, Journal of Differential Geometry 17(1982), 661-692.

[23] E. WITTEN - *Holomorphic Morse inqualities*, prépublication, Princeton Univ. (1983).

[24] E. WITTEN - *Fermion Quantum Numbers in Kazula-Klein theory*, en préparation.

[25] B. SIMON - *Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I*, Ann. I.H.P. 38 n° 3(1983), 295-308.

[26] B. SIMON - *Instantons, double-wells and large deviations*, B.A.M.S. vol. 8 n° 3 (1983), 323-326.

[27] B. HELFFER and J. SJÖSTRAND - *Multiple wells in the semi-classical limit I*, prépublications Univ. Paris-Sud 83 T25(1983).

[28] L. HÖRMANDER - *On the Index of Pseudodifferential Operators*, Differentialgleichungen 10 Bd 1(1970), 127-146.

[29] G.G. KASPAROV - K-*theory, group* C*-*algebras and Higher signatures (Conspectus) Part 1*, prépublication, the Institute of Chemical Physics, the Academy of Sciences of the USSR, Chernogolovka, 1981.

[30] L. ALVAREZ-GAUMÉ - *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Commun. Math. Phys. 90(1983), 161-173.

[31] M.F. ATIYAH and R. BOTT - *The moment map and equivariant cohomology*, Topology 23(1983), 1-28.

[32] J.-M. BISMUT - *The Atiyah-Singer theorems for classical elliptic operators : a probabilistic approach*, prépublication Université Paris-Sud 83T34(1983).

[33] J.J. DUISTERMAAT and G.J. HECKMAN - *On the variation of the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Inv. Math. 69(1982), 219-268. Addendum : Inv. Math. 72(1983), 153-158.

[34] E. GETZLER - *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Commun. Math. Phys. 92(1983), 163-179.

[35] B. HELFFER and J. SJÖSTRAND - *Multiple wells in the semi-classical limit, II & III*, manuscrits.

[36] W. KLINGENBERG - *Closed geodesics on riemannian manifolds*, Regional conference series in Mathematics n° 53, A.M.S. (1983).

[37] G. LAUMON - *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* L *sur un corps global de caractéristique positive*, note aux C.R.A.S. Paris, à paraître.

[38] J. SJÖSTRAND - Lettre à l'auteur, novembre 1983.

NOTES

[1] Les notes datent de janvier 1984

[2] Les techniques de [27] et [35] permettent, comme l'a montré J. Sjöstrand, d'étudier les développements asymptotiques des valeurs propres et vecteurs propres de Δ_t ; mais cela ne lève pas la dernière difficulté signalée en 3.3.

[3] Les brèves indications de preuve données en [16] sont entièrement développées, dans un cadre plus général, en [36]. En fait, comme me l'a signalé L. Siebenmann, cette description de l'homologie de M est essentiellement connue depuis longtemps et on en trouve une preuve dans [19], quand h est une fonction de Morse auto-indexante.

[4] Une application inattendue est due à G. Laumon : par une transposition de l'argument de Witten dans le cadre de la géométrie algébrique sur un corps fini [17], il démontre brillamment la formule du produit, jusqu'alors conjecturale, pour la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L attachée à une représentation ℓ-adique d'un corps global de caractéristique positive.

[5] Plus précisément, on obtient, pour chaque entier i , une inégalité

$$m_i \geq \Sigma \dim H^{i-\lambda(C)}(C,\vartheta) ,$$

où la somme porte sur les composantes connexes C de N , l'entier $\lambda(C)$ étant le rang du fibré normal à C .

[6] Dans [24] (prépublication, Princeton University, 1983), Witten montre comment une variante des idées utilisées pour démontrer les inégalités de Morse permet en particulier de retrouver le résultat d'Atiyah et Hirzebruch [4].

[7] J.-M. Bismut me signale qu'il sait démontrer les inégalités de Morse en utilisant, comme dans [32], les méthodes stochastiques.

[8] Voir aussi [31], où l'on trouvera une version à la De Rham des théorèmes de loca-

lisation en cohomologie équivariante, et des commentaires sur leur relation avec [22] et [33].

[9] En fait, ces considérations "supersymétriques" sur des variétés de dimension infinie permettent, comme l'a suggéré Witten, de retrouver les théorèmes de l'indice d'Atiyah-Singer [6]. Plus précisément, suivant ces idées, Atiyah [1] (voir aussi Alvarez-Gaumé [30]) montre comment la formule d'intégration de Duistermaat-Heckman [33], si elle était transposable en dimension infinie (il faut remplacer l'intégration sur une variété par une intégrale de Wiener), donnerait le théorème de l'indice pour les variétés spinorielles. Mais la formule de [33] ne semble pas se généraliser ainsi (cf. [32], p. 4). Néanmoins les idées de Witten ont suggéré les deux nouvelles démonstrations du théorème de l'indice récemment apparues : celle de Getzler [34] utilise un calcul pseudodifférentiel généralisé et s'interprète en termes de supervariétés et celle de Bismut [32] incorpore les techniques stochastiques à la méthode de l'équation de la chaleur [3]. On peut consulter l'introduction de [32] pour un historique du théorème de l'indice.

Guy HENNIART

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX