Astérisque

JACQUES STERN

Le problème de la mesure

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 632, p. 325-346
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__325_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983-84, n° 632 Juin 1984

LE PROBLÈME DE LA MESURE

par Jacques STERN

Le but du présent travail est de faire le point, à la lumière des résultats récents, sur le problème de l'existence des sous-ensembles non mesurables de la droite réelle. Qu'un tel problème relève de la théorie des ensembles s'explique aisément : c'est la théorie de Cantor qui - par la considération de parties de $\mathbb{R}$ échappant à l'intuition habituelle - a permis le développement ultérieur de la théorie de la mesure. Il revenait à la théorie moderne des ensembles de déterminer avec précision quels axiomes suffisent à créer ces parties de $\mathbb{R}$ "pathologiques" que sont les ensembles non mesurables.

§1. Les ensembles pathologiques du début du siècle.

1.1. Il est bien connu que la théorie des ensembles avec axiome du choix (ZFC) permet de prouver l'existence d'ensembles non mesurables. Avant de donner diverses démonstration de ce fait, il n'est pas inutile de rappeler que la considération des ordinaux dénombrables permet - sans recours aucun à l'axiome du choix - d'exhiber des ensembles qui sont déjà relativement étranges : c'est ainsi qu'on peut construire une partition de la droite en $\aleph_1$ ensembles non vides appelée décomposition de Lebesgue. Pour obtenir cette décomposition, partons de l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et considérons l'application $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \longrightarrow \aleph_1 \cup \{\infty\}$ définie par :

$\varphi(\alpha) = \xi$ si $\{(n,m) : \alpha(n,m) = 1\}$ est le graphe d'un bon ordre de type ξ sur une partie de $\mathbb{N}$.

$\varphi(\alpha) = \infty$ si $\{(n,m) : \alpha(n,m) = 1\}$ n'est pas le graphe d'un bon ordre sur une partie de $\mathbb{N}$.

On obtient la décomposition cherchée en considérant la relation d'équivalence $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Le passage de $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ à $\mathbb{R}$ est affaire de technique.

Malheureusement, le graphe d'une telle relation d'équivalence (comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$) est un ensemble analytique (ou encore souslinien) du plan c'est-à-dire l'image d'un borélien par une fonction continue ; or on a le résultat suivant dû à Lusin ([3]).

Théorème 1.1.- Toute partie analytique de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ est mesurable.

On imagine aisément que les mathématiciens du début du siècle n'ont eu recours qu'à regret à l'axiome du choix : les controverses sur cet axiome n'étaient pas éteintes et jettaient quelque discrédit sur les constructions qui suivent.

1.2. Soit $\sim_{\mathbb{Q}}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim_{\mathbb{Q}} y \quad \text{si} \quad x-y \in \mathbb{Q}.$$

D'une façon générale, convenons d'appeler sélecteur d'une relation d'équivalence un ensemble qui rencontre chaque classe en exactement un point. On peut alors énoncer :

Théorème 1.2. (Vitali [13]).- Si la relation $\sim_{\mathbb{Q}}$ admet un sélecteur, alors, il existe un ensemble non mesurable.

Avant de donner la preuve de ce résultat, précisons la règle du jeu : pour établir le théorème (c'est-à-dire déduire la conclusion de l'hypothèse), nous n'utiliserons pas l'axiome du choix. Il nous faut cependant un axiome permettant d'éviter - par exemple - que $\mathbb{R}$ ne soit réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ; nous utiliserons donc éventuellement la forme affaiblie de l'axiome du choix appelée axiome des choix dépendants et qui s'énonce :

A.C.D. : Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide E qui est telle que tout élément x de E est lié par R à au moins un élément y (i.e. $\forall x \in E\ \exists y \in E\ R(x,y)$) ; alors, pour tout élément x de E il existe une suite (x_n) telle que x_o soit précisément x et telle que x_n soit lié à x_{n+1} (i.e. $\forall n\ R(x_n,x_{n+1})$).

Revenons à la preuve du théorème 1.2. Soit X un sélecteur de $\sim_q$. A tout élément x de X on associe l'élément $\pi(x)$ de $[0,1[$ défini par :

$$\pi(x) = x-E(x)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

$X' = \{\pi(x) : x \in X\}$ est un autre sélecteur de $\sim_{\mathbb{Q}}$ contenu dans $[0,1[$. On va voir que X' est non mesurable. S'il n'en est pas ainsi, distinguons deux cas :

i) si $\mu(X') = 0$, alors, puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} X'+q$, on obtient $\mu(\mathbb{R}) = 0$, contradiction.

ii) si $\mu(X') = \alpha>0$, alors, on constate que les ensembles $X'+r$, $r \in \mathbb{Q}$ sont deux à deux disjoints ; soit n un entier tel que $n\alpha>2$ et soient $r_1,\dots,r_n$ des rationnels distincts de $[0,1]$; on a :

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} X'+r_i\Big) = n\alpha>2$$

or l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} X'+r_i$ est inclus dans $[0,2[$; contradiction.

1.3. On dit qu'un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ est non principal s'il ne contient aucun singleton.

Théorème 1.3. (Sierpinski [9]).- S'il existe un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, alors il existe un ensemble non mesurable.

Rappelons d'abord le résultat suivant :

Proposition.- Soit G un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ et X une partie mesurable de R stable par les translations correspondant aux éléments de G, alors X ou son complémentaire est de mesure nulle.

Preuve de la proposition

Sans perdre de généralité, on peut supposer que 1 est élément de G. La fonction caractéristique χ_X de X est alors périodique de période 1 et ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 \chi_X(t)e^{2\pi int}dt.$$

Si r appartient à G, on a $\chi_X(t) = \chi_X(t+r)$ et par suite,

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 \chi_X(t)e^{2\pi in(t+r)}dt$$

$$= e^{2\pi inr}\ \hat{f}(n)$$

en choisissant r de façon que nr soit compris strictement entre 0 et 1, il vient dès que n est différent de 0, $\hat{f}(n) = 0$. Par suite :

$$\chi_X(t) = \hat{f}(0) \qquad \text{p.p.}$$

soit encore puisque χ_X ne prend que les valeurs 0 ou 1,

$$\chi_X(t) = 0 \qquad \text{p.p. ou}$$

$$\chi_X(t) = 1 \qquad \text{p.p.}$$

Dans le premier cas, X est de mesure nulle et dans le second, le complémentaire de X est de mesure nulle.

On peut maintenant donner la preuve du théorème : on note G le groupe des rationnels dyadiques (i.e. de la forme $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$) et on se donne un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$. Si x est un réel qui n'est pas un élément de G, $x-E(x)$ admet un développement dyadique unique (u_n) défini par :

$$x-E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}.$$

On pose $\varphi(x) = \{n : u_n = 1\}$ et on définit $X_{\mathcal{U}}$ par

$$X_{\mathcal{U}} = \{x \notin G : \varphi(x) \in \mathcal{U}\}.$$

On note que :

i) $X_{\mathcal{U}}$ est stable par les translations par les éléments de G en effet, si α et β sont deux réels non dyadiques dont la différence est dans G, les développements de α et β coïncident à partir d'un certain rang.

ii) Si x n'appartient pas à G, $x \in X_{\mathcal{U}}$ si et seulement si $-x \notin X_{\mathcal{U}}$.

D'après la proposition précédente, si $X_{\mathcal{U}}$ est mesurable, $X_{\mathcal{U}}$ ou son complémentaire $Y_{\mathcal{U}}$ est de mesure nulle. Or on a :

$$Y_{\mathcal{U}} = (-X_{\mathcal{U}}) \cup G$$

par suite $X_{\mathcal{U}}$ est de mesure nulle si et seulement si $Y_{\mathcal{U}}$ l'est ; on a ainsi obtenu une contradiction, ce qui prouve la non mesurabilité de $X_{\mathcal{U}}$.

1.4. La dernière construction que nous présentons produit un sous-ensemble non mesurable de $\mathbb{R}^2$; le passage d'un tel sous ensemble à un sous ensemble non mesurable de $\mathbb{R}$ est là encore affaire de technique.

Théorème 1.4. (Sierpinski (8)).- S'il existe un bon ordre sur une partie mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure strictement positive, alors il existe une partie non mesurable de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

On se donne un tel bon ordre $<$ et on suppose que son type d'ordre est minimal (parmi ceux dont le domaine est une partie mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure non nulle). Etant donné un élément y du domaine D de $<$, l'hypothèse de minimalité implique que :

$$\mu(\{x : x<y\}) = 0$$

par suite si l'ensemble G défini par :

$$\{(x,y) : x \in D \text{ et } y \in D \text{ et } x<y\}$$

est mesurable, sa mesure est nulle (d'après le théorème de Fubini). par ailleurs, si x est fixé, on a :

$$\mu(\{y : x<y\}) = \mu(D)$$

puisque le complémentaire de l'ensemble considéré est $\{z : z \leqslant x\}$. Par suite, une autre application du théorème de Fubini donne $\mu(G_<) = (\mu(D))^2$; on a ainsi une contradiction ; $G_<$ n'est donc pas mesurable.

Remarque : Le raisonnement ci-dessus permet en fait de construire un ensemble non mesurable dès qu'on se donne un ensemble bien ordonné de parties de mesure nulle dont la réunion est un ensemble mesurable de mesure non nulle.

A mesure que s'étreignaient les controverses sur l'axiome du choix, s'installait la conviction que ce dernier était nécessaire à la mise en évidence d'ensembles non mesurables. Les résultats de Gödel ([2]) prouvant la non contradiction de la théorie des ensembles avec axiome du choix (ZFC) à partir de la non-contradiction de celle de la théorie des ensembles seule (ZF) prouvaient par là même que l'existence d'ensembles non mesurables n'avait pas un caractère contradictoire. A côté du célèbre "problème du continu" se trouvait posé le "problème de la mesure" : l'hypothèse de la mesurabilité de toutes les parties de $\mathbb{R}$ est-elle compatible avec les axiomes de la théorie des ensembles ?

§2. La solution du problème de la mesure.

En 1963, Cohen ([1]), put établir l'indépendance de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu. Il ne fallut guère plus qu'un an après ce résultat, pour que Solovay réussisse à vaincre les problèmes techniques extrêmement délicats qui se dressaient sur la voie de la solution du problème de la mesure. Sans entrer dans une longue discussion métamathématique, nous admettrons qu'une démonstration de non-contradiction d'une hypothèse H (relativement à la théorie des ensembles ZF), se réduit à un procédé permettant de passer d'un modèle de ZF à un modèle de ZF qui satisfait H. On peut supposer que, le modèle dont on part est dénombrable. Enfin, on peut se réduire à ne considérer que des modèles standard i.e. des modèles $\mathcal{M}_0$.

i) clos pour l'appartenance (si x est élément d'un élément de $\mathcal{M}_0$, x appartient à $\mathcal{M}_0$).

ii) dont la relation d'appartenance soit la restriction de l'appartenance intuitive.

Tous les modèles qu'on considère dorénavant seront supposés standard.

2.1. La démonstration de non-contradiction de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu (due à Gödel [2]) se fonde sur la considération des modèles intérieurs ; un modèle intérieur $\mathcal{N}_0$ d'un modèle (standard) $\mathcal{M}_0$, de ZF est un sous modèle (standard) de $\mathfrak{M}$ qui contient tous les ordinaux et est aussi un modèle de ZF.

Théorème 2.1. (Gödel).- Un modèle de la théorie des ensembles admet un plus petit modèle intérieur ; ce dernier satisfait l'axiome du choix et l'hypothèse du continu généralisée.

Remarque : On note $L^{\mathfrak{M}}$ le plus petit modèle intérieur de $\mathfrak{M}$; on démontre de la même façon l'existence d'un plus petit modèle intérieur de $\mathfrak{M}$ contenant une partie $a \subseteq \mathbb{N}$ donnée dans $\mathfrak{M}$; ce modèle noté $L^{\mathfrak{M}}(a)$, vérifie l'axiome du choix.

Il existe d'autres procédés pour construire des modèles intérieurs ; si on considère les éléments de $\mathfrak{M}$ définissables (dans $\mathfrak{M}$) à partir d'ordinaux et de nombres réels, on obtient une partie $D^{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ qui n'est pas un modèle intérieur ; en revanche les éléments de $D^{\mathfrak{M}}$ dont les éléments, les éléments des éléments etc. sont aussi dans $D^{\mathfrak{M}}$ forment un modèle intérieur noté $HDO\mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$; on a de plus :

Proposition.- Si $\mathfrak{M}$ vérifie l'axiome du choix, $HDO\mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ vérifie l'axiome des choix dépendants.

2.2. La méthode de Cohen, permettant d'obtenir de nombreux résultats de non-contradiction suit une voie inverse de celle exposée à la section précédente. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de ZF et C une partie ordonnée de $\mathfrak{M}$; une partie G de $\mathfrak{M}$ (non supposée dans $\mathfrak{M}$) est un filtre si

i) deux éléments de G sont un minorant commun.

ii) tout majorant d'un élément de G appartient à G ;

C'est un filtre générique s'il rencontre toute partie dense D de C qui est dans $\mathfrak{M}$ (une partie D est dense si tout élément de C admet un minorant dans D).

Théorème 2.1. - Soit G un filtre générique sur un ensemble ordonné C de $\mathfrak{M}$: il existe un plus petit modèle standard $\mathfrak{M}(G)$ de ZF admettant G comme élément et $\mathfrak{M}$ comme modèle intérieur. De plus, si $\mathfrak{M}$ satisfait l'axiome du choix, il en est de même de $\mathfrak{M}(G)$.

La méthode de Cohen permet donc d'"ajouter" des éléments à un modèle $\mathfrak{M}$; on démontre que l'existence de filtres génériques est assurée dans le cas où $\mathfrak{M}$ est dénombrable.

Exemple 1.- Si C est l'ensemble des applications de domaine fini inclus dans $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\{0,1\}$, une partie générique est formée des restrictions finies d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$; on a ainsi une partie de $\mathbb{N}$, dont on prouve qu'elle n'est pas dans $\mathfrak{M}$.

Exemple 2.- Si C est l'ensemble des applications de domaine fini inclus dans $\mathbb{N}$ à valeurs dans le premier ordinal non dénombrable dans $\mathfrak{M}$, $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$, on ajoute cette fois une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$; on a donc $\aleph_1^{\mathfrak{M}} < \aleph_1^{\mathfrak{M}(G)}$; on dit qu'on a détruit $\aleph_1$.

On verra ultérieurement d'autres exemples.

Il existe une procédure de contrôle dans $\mathfrak{M}$ des énoncées de $\mathfrak{M}(G)$; cette procédure se fait à l'aide d'une surjection V_G de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}(G)$; à chaque formule $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ à n variables libres est associée une autre formule à $n+1$ variables $v_o \Vdash \phi(v_1,\ldots,v_n)$ de façon qu'on ait le

Lemme de vérité.- Soient $a_1,\ldots,a_n$ des éléments de $\mathfrak{M}$; $\Phi(V_G(a_1),\ldots,V_G(a_n))$ est vraie dans $\mathfrak{M}(G)$ si et seulement si il existe un élément p de G tel que, dans $\mathfrak{M}$, on ait $p \Vdash \Phi(a_1,\ldots,a_n)$.

Les éléments de $\mathfrak{M}$ sont repérés dans $\mathfrak{M}(G)$ à l'aide d'une application : $a \longrightarrow \hat{a}$ définie dans $\mathfrak{M}$ et telle que

$$V_G(\hat{a}) = a.$$

2.3. Avant d'entreprendre l'étude du modèle de Solovay ([10]), on va définir le notion de réel aléatoire. Soit $\mathfrak{N}$ un modèle de ZF dont $\mathfrak{M}$ est un modèle intérieur ; si X est une partie borélienne de la droite réelle dans $\mathfrak{M}$, X admet un code, suite (transfinie) d'instructions permettant d'obtenir X par intersections dénombrables et complémentation à partir des intervalles à extrémités rationnelles. Le code définit un borélien $\tilde{X}$ de $\mathcal{N}$ et on démontre que $\tilde{X}$ ne dépend pas du code choisi ; un réel α de $\tilde{X}$ est dit par abus de langage élément de X.

Définition.- Un réel α est aléatoire sur $\mathcal{M}$ s'il n'appartient à aucun borélien de mesure nulle de $\mathcal{M}$.

Si on considère l'ensemble ordonné C de $\mathcal{M}$ formé des fermés de mesure strictement positive de $\mathbb{R}$, on a :

Proposition.- Une partie G de C est générique si elle est précisément l'ensemble des fermés de $\mathcal{M}$ qui admettent comme élément un réel donné aléatoire sur $\mathcal{M}$.

Il existe des extensions de $\mathcal{M}$ contenant nombre de réels aléatoires sur $\mathcal{M}$:

Théorème 2.3.- Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des modèles de ZF satisfaisant l'axiome du choix et tels que $\mathcal{M}$ soit modèle intérieur de $\mathcal{N}$; on suppose que $\mathcal{M}$ satisfait l'hypothèse du continu ; si de plus $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ est détruit dans $\mathcal{N}$, alors, l'ensemble des réels aléatoires sur $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{N}$ un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle.

Preuve : Les Boréliens de mesure nulle de $\mathcal{M}$ forment un ensemble dénombrable dans $\mathcal{N}$. Le complémentaire de l'ensemble des réels aléatoires au-dessus de $\mathcal{M}$ est donc réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

2.4. Dans cette section, on fixe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$; on suppose que $\mathcal{M}$ n'a pas de modèle intérieur strictement plus petit ; d'après le théorème 2.1., l'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont vrais dans $\mathcal{M}$. On rappelle la définition suivante dans une théorie des ensembles avec axiome du choix.

Définition.- Un cardinal κ est dit inaccessible si tout produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'ensembles de cardinal $<\kappa$, indexés par un ensemble I de cardinal $<\kappa$, est lui-même de cardinal $<\kappa$.

L'existence de cardinaux inaccessibles n'est pas prouvable dans ZF ; nous y reviendrons. Malgré celà, on fait l'hypothèse suivante sur $\mathfrak{M}$.

(HI) Dans $\mathfrak{M}$, il existe un cardinal inaccessible noté Ω.

Pour chaque ordinal $\theta<\Omega$, on considère l'ensemble ordonné C_θ de $\mathfrak{M}$ formé des applications de domaine fini inclue dans $\mathbb{N}$ à valeurs dans θ. Un tel ensemble permet d'ajouter "génériquement" une surjection de $\mathbb{N}$ sur θ.

On considère maintenant dans le produit

$$\prod_{\theta \in \Omega} C_\theta$$

des éléments qui sont l'application vide sauf pour un nombre fini d'indices. On note S l'ensemble ordonné obtenu et on choisit un filtre générique G. Dans le modèle $\mathfrak{M}(G)$, tous les ordinaux $<\Omega$ sont dénombrables et Ω est le premier ordinal non dénombrable. On passe ensuite au modèle intérieur $\mathrm{HDO}\mathbb{R}^{\mathfrak{M}(G)}$, qui - d'après la proposition 2.1 - vérifie l'axiome des choix dépendants DC.

Théorème 2.4.- Dans le modèle $\mathrm{HDO}\mathbb{R}^{\mathfrak{M}(G)}$, tout ensemble de réels est Lebesgue-mesurable.

On va donner les grandes lignes de la preuve de ce résultat. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{HDO}\mathbb{R}^{\mathfrak{M}(G)}$; il existe une formule Φ, des ordinaux $\xi_1,\dots,\xi_k$, des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de $\mathfrak{M}(G)$, tels que dans $\mathfrak{M}(G)$:

$$A = \{x : \Phi(x,\xi_1,\dots,\xi_k, \alpha_1,\dots,\alpha_n)\}.$$

On veut montrer que A est mesurable dans $\mathrm{HDO}\mathbb{R}^{\mathfrak{M}(G)}$. On se place dans un modèle intérieur de la forme $L(a)^{\mathfrak{M}(G)}$ et qui contient les réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$; un tel modèle vérifie l'hypothèse du continu et on démontre que le $\aleph_1$ de ce modèle est $<\Omega$. Par suite, d'après le théorème 2.3., presque tous les réels sont aléatoires sur $L(a)^{\mathfrak{M}(G)}$. On peut donc supposer A formés de réels aléatoires sur $L(a)$; soit g un tel réel et soit $L(a)(g)$ l'extension générique correspondante (via les fermés de mesure positive de $L(a)$).

<u>Lemme 1.- On passe de</u> $L(a)(g)$ <u>à</u> $\mathfrak{M}(G)$ <u>en ajoutant un filtre générique</u> K <u>sur l'ensemble ordonné</u> S <u>considéré dans</u> $L(a)(g)$.

Nous admettons ce lemme qui utilise nettement le fait que Ω soit inaccessible dans le modèle de départ. Il résulte du lemme que $\Phi(g,\xi_1,\ldots,\xi_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est vraie dans $\mathfrak{M}(G)$ s'il existe une condition p de K telle que

$$p \Vdash \Phi(\hat{g},\hat{\xi}_1\ldots,\hat{\xi}_k,\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_n)$$

Or, l'ensemble ordonné S a une propriété d'homogénéité qui implique que pour toute formule ψ et pour toute suite d'éléments du modèle de base $a_1,\ldots,a_k$

$$\{p : p \Vdash \psi(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_k)\}$$

est vide ou égal à S. La formule $\Phi(g,\xi_1,\ldots,\xi_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ se traduit donc dans le modèle $L(a)(g)$ par la formule

$$\forall p \in S \quad p \Vdash \Phi(\hat{g},\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_k,\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_n)$$

qu'on notera $\tau_\Phi(g,\xi_1,\ldots,\xi_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

On se place, pour terminer dans l'extension générique $L(a)(g)$ de $L(a)$ et on choisit un élément canonique γ dont l'image par la surjection canonique est le réel aléatoire g. On prouve l'existence d'un Borélien B de $L(a)$ tel que pour tout fermé F de mesure positive de $L(a)$.

$$F \Vdash \tau_\Phi(\gamma,\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_k,\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_n)$$

si et seulement si

$B-F$ est de mesure nulle.

Il n'est alors plus très difficile de vérifier que A et B ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle, ce qui prouve la mesurabilité de A dans $\mathfrak{M}(G)$ et aussi dans $HDO\mathbb{R}^{\mathfrak{M}(G)}$ (car B s'interprète dans ce modèle).

2.5. Dans la section précédente, on a montré comment construire un modèle où tous les ensembles de réels sont Lebesgue-mesurables à partir d'un modèle avec un cardinal inaccessible (à vrai dire, on a supposé aussi que le modèle de départ

$\mathfrak{M}$ était de la forme $L^{\mathfrak{N}}$ mais l'inaccessibilité est préservée dans le passage de $\mathfrak{N}$ à $\mathfrak{M} = L^{\mathfrak{N}}$). On a donc prouvé :

Théorème 2.5.- Si la théorie des ensembles avec axiome du choix augmentée de l'hypothèse : "il existe un cardinal inaccessible" est non contradictoire, alors la théorie des ensembles avec axiome des choix dépendants augmentée de l'axiome : "Toute partie de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable" est également non-contradictoire.

Il reste que l'hypothèse : "il existe un cardinal inaccessible" n'est pas prouvable dans ZF ; elle ne peut même pas être reconnue indépendante : elle est plus forte que la théorie des ensembles dont elle implique la non-contradiction. Cette hypothèse est éventuellement contradictoire mais si elle ne l'est pas, il n'y a aucun moyen mathématique de s'en assurer.

Aux yeux des spécialistes, le théorème de Solovay présentait donc un défaut et allait commencer une longue recherche pour essayer d'éliminer l'utilisation d'un cardinal inaccessible.

§3. La traversée du désert.

3.1. Pour ceux qui cherchaient à éliminer le cardinal inaccessible de la preuve de Solovay, la proposition suivante jouait en général le rôle point de départ.

Proposition.- Soit $\mathfrak{N}$ un modèle de ZF+DC où tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont Lebesgue-mesurables et soit $\mathfrak{M}$ un modèle intérieur de $\mathfrak{N}$ satisfaisant l'axiome du choix, alors presque tous les réels sont aléatoires sur $\mathfrak{M}$.

Preuve : Les Boréliens de mesure nulle de $\mathfrak{M}$ forment un ensemble bien ordonné ; d'après la remarque de la section 1.3., on conclut que leur réunion est de mesure nulle.

La voie qu'il s'imposait de suivre était donc d'ajouter à un modèle de base beaucoup de réels aléatoires sans détruire de cardinaux et d'itérer ce processus.

3.2. Le premier pas de ce programme fut rapidement réalisé. Dans un modèle $\mathfrak{M}$ de la théorie des ensembles, on considère l'ensemble ordonné Am formé desfermés de mesure $> \frac{1}{2}$; on démontre que dans une extension générique $\mathfrak{M}(G)$ via Am, le cardinal $\aleph_1$ n'est pas détruit non plus qu'aucun autre cardinal, de plus.

<u>Proposition</u>.- <u>Dans</u> $\mathfrak{M}(G)$, <u>les réels aléatoires sur</u> $\mathfrak{M}$ <u>forment un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle</u>.

<u>Preuve</u> : Comme l'ensemble des réels aléatoires sur $\mathfrak{M}$ est invariant par les translations rationnelles, il suffit d'après la proposition 1.3., de prouver que cet ensemble contient un fermé de mesure strictement positive. On prouve que l'intersection F_G des éléments du générique est un tel fermé.

<u>Remarque</u> : L'intersection F_G des éléments du générique est quelquefois appelé une "<u>amibe</u>" sur $\mathfrak{M}$ (d'où la notation Am) ; en fait, ce nom fut à l'origine donné au complémentaire de F_G pour évoquer - sans doute - la façon dont cet ouvert s'étalait sur la droite réelle.

3.3. Martin et Solovay ([4]) prouvèrent que l'on pouvait, en partant d'un modèle $\mathfrak{M}$ vérifiant $L^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, itérer la construction ci-dessus de façon à obtenir un modèle $\mathfrak{N}$ ayant la propriété suivante : presque tous les réels sont aléatoires au-dessus d'un modèle de la forme $L(a)^{\mathfrak{M}}$.

Malheureusement, toutes les preuves tendant à établir que ce processus d'itération pouvait mener à un modèle $\mathfrak{N}$ où toutes les parties de $\mathbb{R}$ définissables en termes d'ordinaux et de réels étaient mesurables, se révélèrent fausses. Ainsi qu'on le comprendra plus loin, il semble aujourd'hui inutile de citer les auteurs de ces tentatives erronées.

§4. Les ensembles pathologiques de la fin du siècle.

4.1. A la fin de l'année 1979, Shelah (7) donna une solution négative au problème de l'élimination du cardinal inaccessible.

Théorème 4.1. S'il existe une suite transfinie de $\aleph_1$ réels, il existe un sous-ensemble non mesurable de $\mathbb{R}$.

Avant de faire l'historique de ce résultat et de donner une idée de la preuve, on va voir comment il se relie aux cardinaux inaccessibles.

Proposition.- Soit $\mathfrak{M}$ un modèle où toute suite transfinie de réels est dénombrable ; alors, $\aleph_1$ est un cardinal inaccessible dans $L^{\mathfrak{M}}$.

Preuve : Il suffit en fait de montrer que, pour toute partie a de $\mathbb{N}$, le cardinal $\aleph_1^{L(a)}$ est détruit dans $\mathfrak{M}$; s'il ne l'est pas, les réels de $L(a)$ forment dans $\mathfrak{M}$ une suite transfinie non dénombrable.

On déduit de cette proposition que la non contradiction de la théorie $ZF + DC + LM$ (où LM est l'assertion : toute partie de $\mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable) implique celle de $ZFC + HI$ (où HI est l'hypothèse : il existe un cardinal inaccessible). Contrairement à ce que l'on croyait la théorie $ZF + DC + LM$ est plus forte que la théorie des ensembles.

4.2. La preuve de Shelah se présentait comme une combinaison de plusieurs constructions extrêmement ingénieuses, les unes de nature métamathématique (construction de modèles intérieurs ou d'extensions génériques), les autres de nature combinatoire. Par ailleurs, l'existence d'un ensemble non mesurable était obtenue non à partir d'une suite quelconque de $\aleph_1$ réels mais à partir d'un sélecteur pour la décomposition de Lebesgue (cf. la section 1.1.). L'énoncé du théorème 4.1 fut suggéré par l'auteur du présent exposé à Shelah, qui répondit qu'il pouvait l'établir, aux prix de nouvelles complications dans ses constructions.

La démonstration que nous allons esquisser ci-dessus est due à Raisonnier ; elle permet d'obtenir directement le théorème 4.1., isole dans toute sa pureté, la principale idée combinatoire de Shelah et débarrasse la preuve de ses aspects métamathématiques. Le fait que Shelah ait imaginé au départ une démonstration notablement plus compliquée est lié à la démarche suivie par ce dernier : c'est en partant des obstructions rencontrées dans la recherche d'une preuve de l'élimination du cardinal inaccessible que Shelah a forgé son contre-exemple.

4.3. La simplification opérée par Raisonnier lui a permis de rattacher le théorème de Shelah à des résultats de non-mesurabilité obtenus quelques années auparavant par Talagrand(12).

<u>Définition</u> (Mokobodzki).- Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur $\mathbb{N}$; on dit que $\mathfrak{F}$ est <u>rapide</u> si toute suite (u_n) de nombres entiers est majorée par une suite (v_n) dont l'image est élément de $\mathfrak{F}$.

<u>Théorème</u> (Talagrand).- <u>S'il existe un filtre rapide, alors, il existe un ensemble non mesurable</u>.

Reportons-nous à la section 1.3. Il n'est pas difficile de voir que la méthode utilisée permet d'établir que, pour tout filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{N}$ dont tous les éléments sont infinis, l'ensemble $X_{\mathfrak{F}}$ défini par :

$$X_{\mathfrak{F}} = \{x \notin G : \varphi(x) \in \mathfrak{F}\},$$

est non mesurable ou de mesure nulle. S'il est de mesure nulle, il existe un compact K de $[0,1]$ disjoint de $X_{\mathfrak{F}} \cup G$ et dont la mesure est strictement positive. Le lemme suivant constitue alors le pas décisif de la démonstration.

<u>Lemme</u>.- <u>Il existe une suite croissante</u> (u_n) <u>de nombres entiers et un compact de mesure positive</u> K' <u>inclus dans</u> K <u>tels que pour tout rationnel dyadique de</u> $[0,1]$ <u>de la forme</u> $\frac{k}{2^{u_n}}$, <u>la mesure</u>

$$\mu(K' \cap [\frac{k}{2^{u_n}}, \frac{k+1}{2^{u_n}}[)$$

<u>soit nulle ou minorée par</u> $\frac{1-2^{-n}}{2^{u_n}}$.

Si un filtre $\mathcal{F}$ est rapide et tel que $X_{\mathcal{F}}$ soit mesurable, on peut majorer la suite (u_{n+2}) par une suite (v_n) dont l'image appartient au filtre. On construit alors une suite décroissante d'intervalles

$$I_n = [\frac{k_n}{2^{u_n}}, \frac{k_n+1}{2^{u_n}}]$$

de façon que :

i) $\mu(K' \cap I_n) \neq 0$.

ii) le développement dyadique fini de $\frac{k_n}{2^{u_n}}$ vaut 1 en chacun des entiers $v_o, \ldots, v_{n-3}$.

Ces conditions assurent que l'unique réel x appartenant à l'intersection des I_n est élément de K' et de $X_{\mathcal{F}}$, ce qui donne une contradiction.

Pour définir k_{n+1} à partir de k_n, il suffit de noter que, parmi les N choix possibles de k_{n+1} $(N = 2^{u_{n+1}-u_n})$, au moins $N(1-2^{-n})$ réalisent la condition i) (puisque $\mu(K' \cap I_n) \geqslant \frac{1-2^{-n}}{2^{u_n}}$) et au moins $N.2^{-n+1}$ réalisent la condition ii) ; il y a donc un choix au moins qui réalise les deux conditions.

Note. Il est tout à fait remarquable que le lemme de Talagrand constitue une des pièces de la construction de Shelah, qui pourtant l'ignorait.

4.4. Soit x, y deux nombres réels distincts non dyadiques ; on note $h(x,y)$ le plus petit entier n tel que l'intervalle $]x,y[$ (ou $]y,x[$) contienne un rationnel dyadique de la forme $\frac{k}{2^n}$. Si maintenant X est un ensemble de réels non dyadiques, on note $h(X)$ l'image par h de l'ensemble $\{(x,y) : x \in X, y \in X, x \neq y\}$.

Soit X un ensemble de nombres réels de $[0,1]-\mathbb{Q}$; à toute partition de X en une suite d'ensembles (X_n)

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

on peut associer une partie de $\mathbb{N}$, soit :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} h(X_n).$$

Il est immédiat qu'en considérant toutes les partitions possibles de X, on obtient une base de filtre ; on note $\mathfrak{F}(X)$ le filtre de parties de $\mathbb{N}$ engendré par cette base de filtre.

Lemme.- Si X est non dénombrable, $\mathfrak{F}(X)$ est formé de parties infinies de $\mathbb{N}$.

Avant de prouver le lemme, rappelons le théorème combinatoire de Ramsey.

Théorème 4.4.- Soit Y un ensemble dénombrable ; si on partage l'ensemble des paires d'éléments de Y en k classes, il existe une partie infinie de Y dont toutes les paires soient dans une même classe.

Preuve du lemme : S'il existe une partie finie A de $\mathbb{N}$ qui appartient à $\mathfrak{F}(X)$, on peut trouver une partition de X en une suite d'ensembles (X_n) tels que

$$\forall n \qquad h(X_n) \subseteq F \ ;$$

l'un des X_n est non dénombrable et contient donc un sous-ensemble Y dénombrable. Par application du théorème de Ramsey, on peut supposer $h(Y)$ réduit à un élément m. Soient alors x, y, z trois éléments de Y tels que $x < y < z$; il existe des entiers k et ℓ tels que

$$x < \frac{k}{2^m} < y < \frac{\ell}{2^m} < z$$

si p est un entier pair compris entre k et ℓ, $p = 2q$, on a

$$x < \frac{p}{2^{m-1}} < z$$

ce qui contredit le fait que $h(x,z) = m$.

Note. Le lecteur vérifiera que seul l'axiome des choix dépendants est utilisé ci-dessus, par exemple pour montrer qu'un ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable.

4.5. Le théorème de Shelah est conséquence du résultat suivant.

Théorème 4.5.- Soit X une partie non-dénombrable de $[0,1]-\mathbb{Q}$; alors

i) ou bien il existe une famille d'ensembles de mesure nulle indexée par X, dont la réunion n'est pas un ensemble de mesure nulle.

ii) ou bien le filtre $\mathcal{F}(X)$ est rapide.

Pour voir que ce théorème suffit à conclure, on se donne une suite de $\aleph_1$ nombres réels qu'on peut supposer irrationnels et dans $[0,1]$ (en soustrayant les parties entières). Dans le cas i), on obtient un ensemble non mesurable d'après la remarque de la fin de la section 1.4. ; dans le cas ii) on applique le théorème 4.3.

Remarque. On retrouve dans la preuve de Raisonnier la dichotomie qui apparaît dans la preuve de Shelah : l'existence d'un ensemble non mesurable résulte de l'une ou l'autre de deux situations bien distinctes. Dans l'article [11], l'auteur de cet exposé a montré qu'en un certain sens, il ne peut y avoir de procédé uniforme pour passer d'une suite de $\aleph_1$ réels à un ensemble non mesurable.

4.6.- On va maintenant esquisser la preuve du théorème 4.5. On se donne une famille

$$A(s,\ell,j)$$

indexée par les suites finies de 0 et 1, les entiers ℓ, les entiers j, de façon que

i) chaque ensemble $A(s,\ell,j)$ est une réunion d'intervalles dyadique.

ii) $\mu(A(s,\ell,j)) = 2^{-\ell-j}$.

iii) les fonctions caractéristiques des $A(s,\ell,j)$ forment un ensemble de variables aléatoires indépendantes.

Si x est un irrationnel et $U = (u_n)$ une suite croissante d'entiers, on note $s(x,u,n)$ la suite des u_n premiers termes du développement dyadique de x et on pose

$$H(x,u) = \bigcap_{j} \bigcup_{\substack{j' \geq j \\ \ell \geq j'}} A(s(x,u,\ell),\ell,j') \ ;$$

il est immédiat que $H(x,u)$ est un G_δ de mesure nulle. Si pour une suite u, la réunion des ensembles $H(x,u)$ pour x décrivant X n'est pas de mesure nulle ; la conclusion i) est alors réalisée. S'il n'en est pas ainsi, on montre que $\mathfrak{F}(X)$ est un filtre rapide. Ceci résulte du lemme suivant qui est le cœur de la construction combinatoire de Shelah.

Lemme.- *Si la réunion des* $H(x,u)$, $x \in X$ *est de mesure nulle, il existe une partition dénombrable de* X, *telle que l'élément correspondant* z *du filtre* $\mathfrak{F}(X)$ *ait la propriété suivante* :

Pour tout n, *l'ensemble*

$$\{i \in z \ : \ i < u_n\}$$

a au plus $n^2(3n+3)^2\ 2^{4n}$ *éléments*.

A partir du lemme, il est facile de voir que $\mathfrak{F}(X)$ est rapide : pour majorer v_n, on applique le lemme à la suite $v_{\varphi(n)}$ où $\varphi(n) = (n+1)^2(3n+6)^2\ 2^{4(n+1)}$.

Sans donner le détail du lemme, disons que la partition de X est définie à partir d'un compact convenable K de mesure positive disjoint de $\bigcup_{x\in X} H(x,u)$ par une application $\rho : X \longrightarrow \omega$.

L'application ρ associe à x un couple (j,I) où j est un entier, I un intervalle dyadique $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ tels que

$$K \cap I \cap \bigcup_{\substack{j' \geq j \\ \ell \geq j'}} A(s(x,u,\ell),\ell,j') = \emptyset \quad \text{et} \quad K \cap I \neq \emptyset \ ;$$

l'existence d'un tel couple (j,I) résulte du théorème de Baire. On choisit entre les divers couples possibles en prenant celui d'indice minimum dans une énumération bien choisie.

La majoration à obtenir est le fruit de calculs combinatoires analogues dans leur principe à ceux développés dans la section 4.3.

4.7. Nous terminons ce paragraphe par une version plus précise du résultat de Shelah qui concerne la mesurabilité des ensembles projectifs. Rappelons que les ensembles analytiques sont les images continues des Boréliens et que ce sont des ensembles mesurables (cf. section 1.1.). On les note également $\mathbf{\Sigma}^1_1$ et on note la famille de leurs complémentaires $\mathbf{\Pi}^1_1$; par image continue, on obtient les $\mathbf{\Sigma}^1_2$ à partir des $\mathbf{\Pi}^1_1$ puis par complémentation les $\mathbf{\Pi}^1_2$ à partir des $\mathbf{\Sigma}^1_2$ etc. Les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_n$ ou $\mathbf{\Pi}^1_n$ sont appelés projectifs. Dans un modèle de la forme $L^{\mathfrak{M}}$ il existe un ensemble non mesurable qui est à la fois $\mathbf{\Sigma}^1_2$ et $\mathbf{\Pi}^1_2$ ce résultat est dû à Godel ([2]) ; en revanche dans le modèle de Martin et Solovay ([4]) évoqué dans la section 3.3., tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_2$ est mesurable.

En modifiant très légèrement la preuve esquissée ci-dessus, on constate qu'en partant d'un ensemble X qui est coanalytique et admet $\aleph_1$ éléments, on aboutit à des ensembles non-mesurables qui sont $\mathbf{\Sigma}^1_3$. Ceci permet de prouver le résultat suivant :

Théorème 4.7. (Shelah).- Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de ZF + DC où tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_3$ est Lebesgue mesurable, alors le cardinal $\aleph_1$ est inaccessible dans $L^{\mathfrak{M}}$.

La théorie ZF + DC augmentée de l'axiome : "tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_3$ est mesurable" est donc plus forte que la théorie des ensembles.

§5. L'ultime surprise ; le cas de la catégorie.

5.1. Soit Z un espace métrique complet séparable ; une partie A de Z a la propriété de Baire si elle diffère d'un ouvert U par une partie maigre M c'est-à-dire d'une partie M contenue dans la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide.

Il existe une analogie certaine entre la théorie de la mesure et la théorie de la catégorie ; ainsi, dans le modèle de Solovay, toute partie d'un espace métrique complet séparable a la propriété de Baire. C'est pourquoi, tous les spécialistes considéraient le problème de l'élimination du cardinal inaccessible comme un seul et même problème pour la mesure et la catégorie. C'est pourquoi aussi, Shelah annonça-t-il simultanément son résultat pour la mesure et la catégorie alors qu'il n'avait vérifié que le cas de la mesure.

Par la suite Shelah constata que se preuve ne s'étendait pas au cas de la catégorie et ce qui est tout à fait étonnant, il prouva le résultat inverse :

Théorème 5.1. (Shelah).- Si la théorie des ensembles est non contradictoire, alors, la théorie des ensembles, augmentée de l'axiome : "toute partie d'un espace métrique complet séparable a la propriété de Baire" est également non contradictoire.

5.2. La preuve de Shelah réalise - pour la catégorie - le programme d'itération décrit dans le paragraphe 3. Une fois de plus, les détails combinatoires sont assez délicats. La preuve a été simplifiée par l'auteur de cet exposé dans [11] ; dans la version présentée dans l'article [11], on réalise l'itération pour des ensembles de conditions de forcing munis de structures topologiques adéquates. Il est malheureusement difficile d'en dire plus sans être trop technique.

5.3. Le résultat évoqué plus haut semble indiquer que les hypothèses de mesurabilité de parties de $\mathbb{R}$ sont plus fortes que les hypothèses analogues concernant la propriété de Baire. Le résultat suivant dû à Raisonnier et à l'auteur de cet exposé ([6]) va exactement dans le même sens :

Théorème 5.3. (Raisonnier, Stern).- Si toute partie $\underset{\sim}{\Sigma}_2^1$ de la droite réelle est mesurable Lebesgue alors, toute partie $\underset{\sim}{\Sigma}_2^1$ d'un espace métrique complet séparable a la propriété de Baire.

La preuve utilise une idée assez semblable à celle du théorème 4.1. de Shelah.

BIBLIOGRAPHIE

(1) P.J. COHEN, The independance of the continuum hypothesis, parts I, II, Proc. nat. Acad. Sci. 50 (1963) 1143-1148 ; 51 (1964) 105-110.

(2) K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, Annals of Mathematics Studies n° 3, Princeton University Press, Princeton N.J. (1940).

(3) N. LUSIN, Sur la classification de M. Baire. C.R. Acad. Sci. Paris 164 (1917) 91-94.

(4) D.A. MARTIN and R.M. SOLOVAY, Internal Cohen extensions, Annals of Math. Logic 2 (1970) 143-178.

(5) J. RAISONNIER, A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results, Israël J. Math. à paraître.

(6) J. RAISONNIER et J. STERN, Mesurabilité et propriété de Baire, C.R.A.S. Paris t. 296 (1983) 323-326.

(7) S. SHELAH, The measure case, notes manuscrites (1980).

(8) W. SIERPINSKI, Sur les rapports entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dy$, $\int_0^1 f(x,y)dy$, $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, Fund Math. 1 (1920) 142-147.

(9) W. SIERPINSKI, Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables, Fund. Math. 30 (1938) 96-99.

(10) R.M. SOLOVAY, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Math, 92 (1970) 1-56.

(11) J. STERN, Regularity properties of definable sets of reals, Annals of Math. Logic, à paraître.

(12) M. TALAGRAND, Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables, Studia. Math. LXVII (1980) 13-43.

(13) G. VITALI, Sul problema della mesura dei gruppi di punti di una retta, Bologna (1905).

Jacques STERN

Département de Mathématiques et Mécanique
Université de Caen
F-14032 CAEN CEDEX