JOSEPH OESTERLÉ

Nombres de classes des corps quadratiques imaginaires

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 631, p. 309-323
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__309_0>

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983-84, n° 631 Juin 1984

NOMBRES DE CLASSES DES CORPS QUADRATIQUES IMAGINAIRES

par Joseph OESTERLÉ[1]

En 1934, Heilbronn démontre que pour tout entier $h \geq 1$ il n'existe qu'un nombre fini de corps quadratiques imaginaires de nombres de classes h ([Hei]). Cet énoncé est précisé en 1936 par Siegel, qui montre que, si $h(-d)$ désigne le nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire de discriminant $-d$, $\log(h(-d))$ est équivalent à $\log\sqrt{d}$ lorsque d tend vers $+\infty$ ([Si]). Ces résultats répondent à des questions explicitement posées par Gauss dans le langage des formes quadratiques ([Ga], 302 et 303).

Le théorème de Siegel n'est malheureusement pas effectif : il ne permet pas, pour un entier $h \geq 1$ donné, de résoudre "le problème du nombre de classes h", i.e. de déterminer la liste des discriminants pour lesquels $h(-d) = h$. On sait cependant (cf. [Ta]) que ces discriminants, sauf au plus l'un d'eux, sont majorés par $2100\, h^2 \log^2(13h)$. (On pense qu'il n'y a en fait pas d'exception ; ce serait une conséquence de l'hypothèse de Riemann généralisée.)

Des tables donnant les nombres de classes des corps quadratiques imaginaires de discriminant $-d$, pour $d < 4.10^6$, ont été construites par Buell ([Bu]). Dans la limite de ces tables, le nombre de corps, dont le nombre de classes est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, est respectivement 9, 18, 16, 54, 25, 51, 31, 131, 34, 87, et le plus grand d correspondant est respectivement égal à 163, 427, 907, 1555, 2683, 3763, 5923, 6307, 10627, 13843 (ce qui semble suggérer que tous les corps quadratiques imaginaires de nombre de classes ≤ 10 se trouvent dans cette table).

Le problème du nombre de classes 1 a été résolu indépendamment par Heegner, Stark et Baker (cf. [He], [St 1], [St 2] et [Ba]) ; ces deux derniers ont ensuite donné une borne effective très grosse, $d < 10^{1030}$, pour les d tels que $h(-d) = 2$; finalement, le fait qu'il n'y a pas de d pour lesquels $h(-d) = 2$ et $427 < d < 10^{1030}$ a été démontré indépendamment par Stark d'une part ([St 3]), Montgomery et Weinberger de l'autre ([M,W]).

En 1977, Goldfeld démontre que si l'on dispose d'une forme modulaire parabolique f, propre pour les opérateurs de Hecke, dont la série de Dirichlet associée $L(f,s)$ admet au centre de la bande critique un zéro d'ordre assez grand (supérieur

(1) Le texte écrit a été revu et complété depuis l'exposé oral.

ou égal à 3 ou 4 suivant les cas), on peut, pour tout $h \geq 1$, fournir une majoration effective des d tels que $h(-d) = h$ (cf. [Go]).

Le problème était alors de montrer qu'au moins une forme modulaire possède les propriétés requises pour appliquer le théorème de Goldfeld. En poids 2, on connaissait de bonnes candidates : en effet, étant donnée une newform f normalisée de poids 2, fonction propre des opérateurs de Hecke, et à coefficients rationnels, il existe une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$ (unique à $\mathbb{Q}$-isogénie près d'après un théorème de Faltings (cf. [De])) dont la fonction L, notée $L(E,s)$, est égale à $L(f,s)$ (y compris aux mauvaises places d'après [Ca]). La conjecture de Weil affirme que toute courbe E définie sur $\mathbb{Q}$ s'obtient de cette façon, et, pour une courbe E donnée, ceci peut en principe se tester par un calcul algorithmique sur ordinateur (cf. [C 11]). D'autre part la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer affirme que $L(E,s)$ a en $s = 1$ un zéro d'ordre ρ égal au rang r de $E(\mathbb{Q})$ et l'on connait des courbes E pour lesquelles ce rang est assez grand (le record actuel étant une courbe, obtenue par Mestre, dont le rang r est ≥ 14). Compte tenu de ces remarques, on est capable de construire des formes f de poids 2 dont on a tout lieu de penser que $L(f,s)$ a en $s = 1$ un zéro d'ordre assez grand ; malheureusement si la non nullité d'une dérivée d'ordre supérieur de $L(f,s)$ en $s = 1$ peut en principe se prouver par un calcul sur ordinateur, il n'en est pas de même de la nullité de cette dérivée.

En 1983, Gross et Zagier obtiennent une très jolie formule permettant pour certains caractères quadratiques χ d'exprimer la valeur en $s = 1$ de la dérivée de $L(f,s)L(f \otimes \chi,s)$ comme produit d'une expression non nulle (essentiellement un produit de périodes) par la hauteur de Néron-Tate d'un point, déduit des points de Heegner, sur une variété abélienne (cf. [G,Z]). Lorsque ce point est de torsion et que $L(f \otimes \chi,1)$ est non nul, on a $L'(f,1) = 0$. Si de plus la fonction $\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)N^{s/2}L(f,s)$ vérifie l'équation fonctionnelle $\Lambda(f,1-s) = -\Lambda(f,s)$, on en déduit que $L(f,s)$ admet en $s = 1$ un zéro d'ordre $\rho \geq 3$.

Ce résultat a permis à Gross et Zagier d'exhiber une forme modulaire satisfaisant les hypothèses du théorème de Goldfeld. Les majorations de d en fonction de $h(-d)$ qu'on en déduit s'énoncent alors de la façon suivante, en notant $P(d)$ l'ensemble des nombres premiers divisant d, à l'exception du plus grand d'entre eux, et en posant $\vartheta(d) = \prod_{p \in P(d)} \left(1 - \frac{[2\sqrt{p}]}{p+1}\right)$:

THÉORÈME 1.— *Il existe une constante* $C > 0$, *effectivement calculable, telle que l'on ait*

$$\vartheta(d) \log d \leq C\, h(-d)$$

pour tout discriminant $-d$ *d'un corps quadratique imaginaire.*

D'après la théorie des genres (cf. [B,Š]), le cardinal de $P(d)$ est inférieur à la valuation 2-adique de h. Compte tenu du fait que $1 - \frac{[2\sqrt{p}]}{p+1}$ est respectivement égal à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$ pour $p = 2, 3, 5, 7$ et que l'on a $1 - \frac{[2\sqrt{p}]}{p+1} \geq \frac{1}{2}$ pour $p \geq 11$, on déduit du théorème 1 que l'on a, avec la même constante C,

$$\begin{aligned} h(-d) \quad \text{impair} &\Rightarrow \log d \leq C\, h(-d)\ , \\ h(-d) \equiv 2 \bmod. 4 &\Rightarrow \log d \leq 4C\, h(-d)\ , \\ h(-d) \equiv 4 \bmod. 8 &\Rightarrow \log d \leq 12C\, h(-d)\ , \\ h(-d) \equiv 8 \bmod. 16 &\Rightarrow \log d \leq 36C\, h(-d)\ , \text{ etc...} \end{aligned}$$

Les numéros 1 et 2 sont consacrés à des rappels sur les corps quadratiques imaginaires et les formes modulaires. Au numéro 3, on trouvera une démonstration très simplifiée du théorème de Goldfeld. La construction d'une bonne forme modulaire f est exposée au numéro 4. Enfin, au numéro 5, on signale divers compléments et on indique l'ordre de grandeur de la constante C intervenant dans le théorème 1.

1. Corps quadratiques imaginaires et formes quadratiques binaires (cf.[B,Š])

1.1. Soit $K \subset \mathbb{C}$ *un corps quadratique imaginaire.* Notons $-d$ son *discriminant,* $\mathcal{O}$ l'*anneau de ses entiers,* $\chi = \left(\frac{-d}{\cdot}\right)$ le *caractère quadratique* associé (on pose par convention $\chi(n) = 0$ lorsque n n'est pas premier à d). Un nombre premier p est *décomposé, ramifié* ou *inerte* dans $\mathcal{O}$ suivant que $\chi(p)$ vaut 1, 0 ou -1. La *fonction zêta* du corps K est $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$ où ζ est la fonction zêta de Riemann et $L(s,\chi)$ la série L de Dirichlet associée au caractère χ. Le *groupe des classes d'idéaux* de $\mathcal{O}$ est un groupe fini dont l'ordre, noté h (ou $h(-d)$), est le *nombre de classes* de K.

1.2. Notons Q_d l'ensemble des formes quadratiques binaires $ax^2 + bxy + cy^2$ à coefficients entiers rationnels, définies positives, de discriminant $4ac - b^2$ égal à d. On construit une *bijection* du groupe des classes d'idéaux de $\mathcal{O}$ sur l'ensemble des *classes* (modulo changements linéaires de coordonnées, à coefficients entiers, et de déterminant 1) *de formes quadratiques* de Q_d, de la façon suivante : étant donnés une classe d'idéaux $\mathcal{C}$, un idéal $\mathfrak{a} \in \mathcal{C}$, une base directe (ω_1, ω_2) de $\mathfrak{a}$ sur $\mathbb{Z}$, la forme quadratique $q(x,y) = \frac{N(x\omega_1 + y\omega_2)}{N\mathfrak{a}}$ appartient à Q_d ; sa classe, qui ne dépend que de $\mathcal{C}$, est l'image de $\mathcal{C}$ par la bijection précédente.

Avec ces notations, *la fonction zêta partielle* $\zeta(\mathcal{C},s) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathcal{C}} N\mathfrak{c}^{-s}$ est égale à $w^{-1} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} q(m,n)^{-s}$, où w désigne *l'ordre du groupe des unités* de $\mathcal{O}$ (égal à 6, 4 ou 2 suivant que l'on a $d = 3$, $d = 4$ ou $d > 4$). *La fonction* ζ_K *est somme des fonctions zêta partielles* associées aux différentes classes d'idéaux de $\mathcal{O}$.

1.3. Chaque classe de formes quadratiques de Q_d contient une unique forme $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ qui est *réduite,* c'est-à-dire telle que l'on ait simultanément

(i) $|b| \leq a \leq c$;

(ii) $b \geq 0$ si a est égal à $|b|$ ou à c .

Pour une telle forme, on a $a \leq \sqrt{\frac{d}{3}}$, $\frac{d}{3a} \geq c \geq \frac{\sqrt{d}}{2}$ (et même $c > \frac{\sqrt{d}}{2}$ si $d \neq 4$). Le nombre $N_q(t)$ des couples $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $q(m,n) \leq t$ est nul pour $t < c$ (et *a fortiori* pour $t < \frac{\sqrt{d}}{2}$) ; il est équivalent à $\frac{\pi t}{\sqrt{d}}$ lorsque t tend vers $+\infty$. On peut montrer (cf. [Oe]) que l'on a $\int_0^A N_q(t)\,dt \leq \int_{\sqrt{d}/2}^A \frac{\pi t}{\sqrt{d}}\,dt$ pour tout $A \geq \frac{\sqrt{d}}{2}$.

Compte tenu de ce qui précède, l'ensemble $Q_d^{\text{réd}}$ des formes quadratiques $q \in Q_d$ qui sont réduites a un cardinal égal à h ; si l'on note $a(q)$ le premier coefficient d'une telle forme q , la fonction zêta du corps K s'écrit, lorsque $d > 4$,

$$(1.3.1) \qquad \zeta_K(s) = \sum_{q \in Q_d^{\text{réd}}} \Big(a(q)^{-s}\zeta(2s) + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} q(m,n)^{-s} \Big)$$

d'où l'on déduit l'identité

$$(1.3.2) \qquad \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} = \sum_{q \in Q_d^{\text{réd}}} \Big(a(q)^{-s} + \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \\ \operatorname{pgcd}(m,n)=1}} q(m,n)^{-s} \Big) .$$

1.4. Le fait que le nombre de classes h soit petit pour un corps K de grand discriminant se traduit par le fait que "beaucoup de petits nombres premiers sont inertes dans $\mathcal{O}$ ", ou encore, en introduisant la fonction multiplicative $\lambda : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{-1,1\}$ telle que $\lambda(p) = -1$ pour tout nombre premier p , par le fait que "pour beaucoup de petits entiers n , on a $\lambda(n) = \chi(n)$ " . Voici deux expressions quantitatives de l'assertion qualitative précédente :

a) *Si un nombre premier* p *est décomposé dans* K , *on a* $p^h \geq \frac{d}{4}$: en effet il existe alors un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$ de norme p ; l'idéal $\mathfrak{p}^h$ est principal, engendré par un élément de la forme $\frac{a+b\sqrt{d}}{2}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et on a $p^h = \frac{a^2+db^2}{4} \geq \frac{d}{4}$.

b) Posons $\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n n^{-s}$. *On a* $\sum_{n \leq (\sqrt{d}/2)} \nu_n \leq h$: ceci résulte de l'égalité (1.3.2) et des propriétés élémentaires des formes quadratiques réduites rappelées en 1.3.

2. Formes modulaires de poids 2

2.1. Série de Dirichlet associée (cf. [S-D,B])

Pour abréger, nous appellerons *newform normalisée de poids* 2 *et de niveau* N une newform (au sens de *loc. cit.*) $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ (avec $q = e^{2\pi i\tau}$) de poids 2 pour le groupe $\Gamma_0(N)$, fonction propre des opérateurs de Hecke T_p $(p \nmid N)$, dont le premier coefficient a_1 est égal à 1 . La *série de Dirichlet associée* $L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ a alors une décomposition en produit eulérien :

(2.1.1) $$L(f,s) = \prod_{p|N}(1-a_p p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s})^{-1} .$$

On a $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ pour tout nombre premier p. Lorsque p^2 divise N, a_p est nul ; lorsque N est multiple de p mais pas de p^2, a_p est égal à 1 ou à -1.

Il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $f\left(\frac{-1}{N\tau}\right) = -\varepsilon N\tau^2 f(\tau)$. La fonction $s \longmapsto N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$ se prolonge en une fonction *entière* $\Lambda(f,s)$ sur $\mathbb{C}$, *à décroissance rapide à l'infini* dans toute bande verticale, vérifiant l'*équation fonctionnelle* $\Lambda(f,1-s) = \varepsilon\Lambda(f,s)$. Lorsque N est sans facteurs carrés, on a $\varepsilon = -\prod_{p|N}(-a_p)$.

2.2. Torsion par un caractère quadratique (cf. [Vi])

Soient f une newform normalisée de poids 2 et de niveau N (cf. 2.1) et χ un caractère de Dirichlet (primitif) quadratique de conducteur d. Il existe alors un entier $N_\chi \geq 1$ et une newform normalisée $f \otimes \chi$ de poids 2 et de niveau N_χ telle que $a_p(f \otimes \chi)$ soit égal à $a_p(f)\chi(p)$ pour presque tout nombre premier p (en notant $a_n(f)$ le n-ième coefficient de Fourier de f). Ces conditions déterminent d'ailleurs N_χ et $f \otimes \chi$ de façon unique ; $f \otimes \chi$ s'appelle la forme tordue de f par χ.

Lorsque $\mathrm{pgcd}(N,d^2)$ est sans facteurs carrés, N_χ est le plus petit commun multiple de N et d^2, on a $a_n(f \otimes \chi) = a_n(f)\chi(n)$ *pour tout entier* $n \geq 1$ et la constante $\varepsilon(f \otimes \chi)$ intervenant dans l'équation fonctionnelle de $\Lambda(f \otimes \chi,s)$ est donnée par la formule

$$\varepsilon(f \otimes \chi) = \chi(-N_1).\prod_{p|N_2}(-a_p(f)).\varepsilon(f)$$

où l'on a écrit $N = N_1N_2$ avec N_1 premier à d et N_2 diviseur (sans facteurs carrés) de d ; cette formule s'écrit plus simplement $\varepsilon(f \otimes \chi) = \chi(-N)\varepsilon(f)$ lorsque d est premier à N.

2.3. La série de Dirichlet $L(\mathrm{Sym}^2 f,s)$

Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ une newform normalisée de poids 2 et de niveau N (cf. 2.1). Par analogie avec 2.2, on note $L(f \otimes \lambda,s)$ la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda(n)n^{-s}$, où $\lambda : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{-1,1\}$ est la fonction multiplicative introduite en 1.4. Posons

(2.3.1) $$L(\mathrm{Sym}^2 f,s) = \prod_{p\nmid N}(1-p^{1-s})^{-1}L(f,\tfrac{s}{2})L(f \otimes \lambda,\tfrac{s}{2}) .$$

On a (cf. [Sh])

(2.3.2) $$L(\mathrm{Sym}^2 f,s) = \prod_{p\nmid N}(1+p^{1-s})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^{-s} .$$

La fonction $\Lambda(\mathrm{Sym}^2 f,s) = N^s(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})L(\mathrm{Sym}^2 f,s)$ se prolonge en une fonction entière (cf. [Sh] et [G,J]). D'après un résultat d'Ogg ([Ogg], p. 304), on a

(2.3.3) $$\Lambda(\mathrm{Sym}^2 f,2) = N\iint_{D_0(N)} f(\tau)\overline{f(\tau)}\,|d\tau \wedge d\bar{\tau}|$$

en notant $D_0(N)$ un domaine fondamental du demi-plan de Poincaré pour l'action de

$\Gamma_0(N)$.

Lorsque N est sans facteurs carrés, la fonction $\Lambda(\mathrm{Sym}^2 f,s)$ vérifie l'équation fonctionnelle (*loc. cit.*, th. 6)

(2.3.4) $$\Lambda(\mathrm{Sym}^2 f\,,\,3-s) = \Lambda(\mathrm{Sym}^2 f,s)\ .$$

(Ceci s'étend au cas où N a des facteurs carrés, à condition de modifier convenablement les facteurs eulériens aux places divisant N ; cf. [G,J]).

3. Le principe de la démonstration

Dans ce numéro, K désigne un corps quadratique imaginaire, $-d$ son discriminant, $\chi = \left(\frac{-d}{\cdot}\right)$ le caractère quadratique associé. On suppose $d > 4$. Si $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ et $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ sont deux séries de Dirichlet, la notation $A \ll B$ signifie que l'on a $|a_n| \le b_n$ pour tout $n \ge 1$.

Supposons connues des séries de Dirichlet Ψ et G et un nombre réel $M > 0$ vérifiant les conditions suivantes :

(C1) On a $\Psi(s) \ll \zeta(2s-1)^2$ et $G(s) \ll \left(\frac{\zeta_K(s-(1/2))}{\zeta(2s-1)}\right)^2$; en particulier Ψ (resp. G) est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ (resp. pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$).

(C2) La série de Dirichlet G admet un produit eulérien $\prod_p G_p$ où, pour chaque nombre premier p , $G_p(s)$ est de la forme $\dfrac{(1+\alpha p^{-s})(1+\beta p^{-s})}{(1+\alpha' p^{-s})(1+\beta' p^{-s})}$, avec α , α' , β , β' nombres complexes de valeur absolue $\le \sqrt{p}$.

(C3) La fonction $d^s\gamma(s)\Psi(s)G(s)$, où $\gamma(s) = M^s\Gamma(s)^2$, se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$, à décroissance rapide à l'infini dans chaque bande verticale, invariante par la substitution $s \to 2-s$ et admet en $s = 1$ un zéro d'ordre ≥ 3 (donc d'ordre ≥ 4 vu l'équation fonctionnelle).

(C4) La fonction Ψ admet un prolongement holomorphe sur un voisinage du demi-plan $\{s/\mathrm{Re}(s) \ge 1\}$, a un zéro simple en $s = 1$, et la fonction $\gamma\Psi$ est à décroissance rapide à l'infini dans toute bande verticale du demi-plan précédent.

Nous allons montrer dans ce numéro qu'alors on peut majorer de façon effective d en fonction de $h = h(-d)$, Ψ et M. Nous verrons au numéro 4 comment les formes modulaires de poids 2 permettent de construire Ψ , G et M comme ci-dessus et nous déduirons le théorème de Goldfeld des majorations obtenues dans ce numéro.

3.1. L'égalité fondamentale

Le point de départ consiste à remarquer que l'on a, pour $\sigma > \frac{3}{2}$,

(3.1.1) $$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-1}\gamma(s)\Psi(s)G(s)\,(s-1)^{-3}\,\frac{ds}{2\pi i} = 0\ .$$

En effet si ω désigne la forme différentielle à intégrer, on a $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\omega = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\omega$ d'après le théorème des résidus, et cette dernière intégrale est nulle vu l'équation fonctionnelle satisfaite par ω (condition (C3)).

Pour tout nombre réel $U \geq 1$, posons

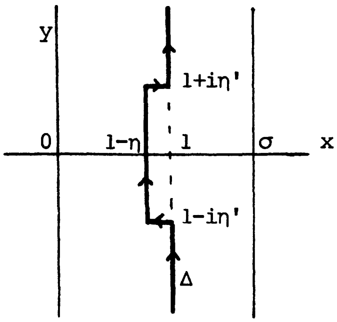
$$G(U,s) = \prod_{p<U} G_p(s) \tag{3.1.2}$$

$$G(U^*,s) = G(s) - G(U,s) = G(U,s)\left(\left(\prod_{p\geq U} G_p(s)\right) - 1\right). \tag{3.1.3}$$

Notons $J(U)$ l'ingégrale $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-1}\gamma(s)\Psi(s)G(U,s)(s-1)^{-3}\frac{ds}{2\pi i}$ et définissons de façon analogue $J(U^*)$, de sorte que (3.1.1) s'écrit

$$J(U) = -J(U^*). \tag{3.1.4}$$

3.2. Étude de $J(U)$



Considérons le chemin orienté Δ représenté ci-contre, où $\eta \leq \frac{1}{4}$ et η' sont choisis assez petits pour que Ψ soit holomorphe dans la région comprise entre Δ et la droite $\{s \mid \mathrm{Re}(s) = \sigma\}$.

Compte tenu du théorème des résidus, on a (cf. (C4))

$$J(U) = c_1 G(U,1)\left(\log d + \frac{G'(U,1)}{G(U,1)} + c_2\right) + J_1(U) \tag{3.2.1}$$

où c_1 (resp. c_2) désigne la valeur en $s = 1$ de la fonction (resp. de la dérivée logarithmique de la fonction) $s \longmapsto \frac{\gamma(s)\Psi(s)}{s-1}$ et où $J_1(U)$ est l'intégrale analogue à celle définissant $J(U)$, mais évaluée sur le chemin Δ. Il existe une constante $c_3 > 0$, ne dépendant que de Ψ et de M, par exemple $c_3 = \int_\Delta |\gamma(s)\Psi(s)(s-1)^{-3}|\frac{|ds|}{2\pi}$ telle que l'on ait

$$|J_1(U)| \leq c_3 \sup_{s\in\Delta}|G(U,s)|. \tag{3.2.2}$$

3.3. Sur certaines intégrales

Lemme 1.– *Soient* m *un entier* ≥ 2, a *et* σ *des nombres réels tels que* $a<\sigma$. *Alors* $x \longmapsto I(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}(s-a)^{-m}\frac{ds}{2\pi i}$ *est une fonction positive sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Elle est décroissante et convexe si* $a \geq 0$.

En effet $I(x)$ est égal à $x^{-a}\frac{|\log x|^{m-1}}{(m-1)!}$ pour $x \leq 1$ et à 0 pour $x \geq 1$.

Les hypothèses étant celles du lemme 1, soient $\mu_1,\ldots,\mu_r$ des mesures positives sur $\mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles la fonction $t \mapsto t^\sigma$ est intégrable. Posons $\hat{\mu}_j(s) = \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{-s}\mu_j$ $(1 \leq j \leq r, \mathrm{Re}(s) = \sigma)$ et $J(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{\mu}_1(s)\ldots\hat{\mu}_r(s)x^{-s}(s-a)^{-m}\frac{ds}{2\pi i}$.

Grâce au théorème de Fubini on déduit du lemme 1 que l'on a

Lemme 2.– J *est une fonction positive sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Elle est convexe et décroissante si* $a \geq 0$.

Dans les applications que nous avons en vue, les mesures μ_j sont soit les images par l'homéomorphisme $t \mapsto t^{-1}$ de mesures de la forme $e^{-t}t^{-u-1}dt$, avec $u < \sigma$, auquel cas on a $\hat{\mu}_j(s) = \Gamma(s-u)$, soit de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_n$, où δ_n est la mesure de Dirac au point n et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de nombres réels positifs telle que la famille $(a_n n^{-\sigma})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable, auquel cas $\hat{\mu}_j(s)$ est égal à $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$.

Lemme 3.— *Soient* μ'_j $(1 \le j \le r)$ *des mesures positives sur* $\mathbb{R}_+^*$ *vérifiant les mêmes hypothèses que les* μ_j *et définissons* J' *de façon analogue à* J. *Supposons que l'on ait* $\int_0^x \mu_j([0,t])dt \le \int_0^x \mu'_j([0,t])dt$ *pour tout* $x \ge 0$ *et que* a *soit* ≥ 0. *Alors* J *est majorée par* J'.

Il suffit de traiter le cas où μ_j est différente de μ'_j pour un seul indice j. Grâce au théorème de Fubini on se ramène alors au cas où r est égal à 1. Mais dans ce cas on a $J(x) = \int I(xt)\mu_1$, $J'(x) = \int I(xt)\mu'_1$, et la fonction $t \mapsto I(xt)$ est positive décroissante et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (lemme 1). Le lemme en résulte, compte tenu des hypothèses faites sur μ_1 et μ'_1.

Exemples.— 1) Soit q une forme quadratique réduite de discriminant d (cf. 1.3). Si μ est la somme des mesures de Dirac $\delta_{q(m,n)}$ ($(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$) et μ' la mesure somme de la mesure $\frac{\pi}{2}\delta_{\sqrt{d}/2}$ et de la mesure de densité $\frac{\pi}{\sqrt{d}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[\frac{\sqrt{d}}{2}, +\infty]$, on a $\int_0^x \mu([0,t])dt \le \int_0^x \mu'([0,t])dt$ pour tout $x > 0$ (*loc. cit.*). Pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$, on a $\hat{\mu}(s) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} q(m,n)^{-s}$ et $\hat{\mu}'(s) = \frac{\pi}{2}\frac{s}{s-1}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{-s}$.

2) Soient ν la mesure $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n$ et ν' la somme de la mesure de Dirac δ_1 au point 1 et de la mesure de Lebesgue sur $[1,+\infty[$, et soient μ et μ' les images de ν et ν' par l'application $t \mapsto t^2$. On a $\nu([0,t]) \le \nu'([0,t])$ pour tout $t > 0$, d'où $\mu([0,t]) \le \mu'([0,t])$ pour tout $t > 0$. Pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$, on a $\hat{\mu}(s) = \zeta(2s)$ et $\hat{\mu}'(s) = \frac{s}{s-(1/2)}$.

3.4. <u>Majoration de</u> $|J(U^*)|$

Pour majorer $|J(U^*)|$, nous partirons de l'expression suivante de $J(U^*)$ (déduite de la définition par le changement de variables $s \longmapsto (s+\frac{1}{2})$) : pour tout $\sigma > 1$

$$(3.4.1)\qquad J(U^*) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-(1/2)}\,\gamma(s+\tfrac{1}{2})\Psi(s+\tfrac{1}{2})G(U^*,s+\tfrac{1}{2})\,(s-\tfrac{1}{2})^{-3}\,\frac{ds}{2\pi i}.$$

D'après le lemme 2 de 3.3, $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-(1/2)}\,\gamma(s+\frac{1}{2})x^{-s}(s-\frac{1}{2})^{-3}\frac{ds}{2\pi i}$ est positif pour tout $x > 0$, de sorte que l'on a

$$(3.4.2)\qquad |J(U^*)| \le \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-(1/2)}\,\gamma(s+\tfrac{1}{2})\varphi(s)\,(s-\tfrac{1}{2})^{-3}\,\frac{ds}{2\pi i}$$

pour toute série de Dirichlet φ absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ telle que $\Psi(s+\frac{1}{2})G(U^*,s+\frac{1}{2}) \ll \varphi(s)$. D'après la condition (C1) et les formules (3.1.3) et

(1.3.2), ceci s'applique en particulier lorsqu'on prend pour φ la série de Dirichlet obtenue en élevant $\sum_{q\in Q_d^{\text{réd}}}\Big(a(q)^{-s}\zeta(2s) + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} q(m,n)^{-s}\Big)$ au carré et en supprimant dans le résultat les termes de la forme $a(q)^{-s}a(q')^{-s}\zeta(2s)^2$ lorsque $a(q)a(q') < U$.

Compte tenu du lemme 3 et des exemples 1 et 2 de 3.3, on augmente le membre de gauche de (3.4.2) lorsque dans l'expression de φ l'on remplace

$$\zeta(2s)^2 \quad \text{par} \quad s^2\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-2}$$

$$a(q)^{-s}a(q')^{-s} \quad \text{par} \quad U^{-s} \qquad\qquad (\text{pour } a(q)a(q')\geq U)$$

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} q(m,n)^{-s} \quad \text{par} \quad \frac{\pi}{2}\,\frac{s}{s-1}\,2^s d^{-s/2} \qquad (\text{pour chaque } q\in Q_d^{\text{réd}}).$$

On obtient ainsi la majoration

$$|J(U^*)| \leq J_1 + J_2 + J_3 \tag{3.4.3}$$

où l'on a posé, en notant h le nombre de classes de K ,

$$J_1 = h^2\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d^{s-(1/2)}\,\gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)U^{-s}s^2\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-5}\frac{ds}{2\pi i} \tag{3.4.4}$$

$$J_2 = \pi h\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^s d^{(s-1)/2}\gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\frac{s}{s-1}\Big(\sum_{q\in Q_d^{\text{réd}}} a(q)^{-s}\Big)\zeta(2s)\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-3}\frac{ds}{2\pi i} \tag{3.4.5}$$

$$J_3 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{h^2}{\sqrt{d}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2s}\gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{s}{s-1}\Big)^2\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-3}\frac{ds}{2\pi i}\,. \tag{3.4.6}$$

PROPOSITION 1.— a) *On a* $J_1 \leq c_4\,\dfrac{h^2}{\sqrt{U}}\Big(\Big|\log\dfrac{dM}{U}\Big|+3\Big)^4$ *avec* $c_4 = \dfrac{M}{96}$.

b) *On a* $J_2 \leq c_5 h \sum_{q\in Q_d^{\text{réd}}} a(q)^{-1}$ *avec* $c_5 = \dfrac{2\pi^4}{3}M^{3/2}$.

c) *On a* $J_3 \leq c_6\,\dfrac{h^2}{\sqrt{d}}$ *avec* $c_6 = 4\pi^2 e M^{3/2}\sup(2,\log(4M))$.

On vérifie aisément (cf. [Oe]), en utilisant le théorème des résidus, que l'on a, pour tout $x > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ (avec $\sigma > 1$),

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^s s^2\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-5}\frac{ds}{2\pi i} \leq \Big[\frac{1}{4!}\,\frac{d^4}{ds^4}(x^s s^2) + \frac{1}{3!}\,\frac{d^2}{ds^2}(x^s)\Big]_{s=\frac{1}{2}} \tag{3.4.7}$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^s\,\frac{s}{s-1}\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-3}\frac{ds}{2\pi i} \leq 8x \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^s\Big(\frac{s}{s-1}\Big)^2\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-3}\frac{ds}{2\pi i} &\leq \int_{\sigma+\varepsilon-i\infty}^{\sigma+\varepsilon+i\infty} x^s\,\frac{s^2}{(s-1-\varepsilon)(s-1+\varepsilon)}\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{-3}\frac{ds}{2\pi i}\\ &\leq x^{1+\varepsilon}\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big)^{-3} \leq \frac{4x^{1+\varepsilon}}{\varepsilon}\,.\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Utilisant le théorème de Fubini :

a) on déduit de (3.4.7) que J_1 est majoré par le produit de $\dfrac{h^2M}{\sqrt{U}}$ par la valeur en $s = \dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{1}{4!}\,\dfrac{d^4}{ds^4}\Big(\Gamma\Big(s+\dfrac{1}{2}\Big)^2\Big(\dfrac{dM}{U}\Big)^{s-(1/2)}s^2\Big) + \dfrac{1}{3!}\,\dfrac{d^2}{ds^2}\Big(\Gamma\Big(s+\dfrac{1}{2}\Big)^2\Big(\dfrac{dM}{U}\Big)^{s-(1/2)}\Big)$ et un calcul élémentaire (cf. [Oe]) montre que cette valeur est égale à $\dfrac{1}{96}P\Big(\log\Big(\dfrac{dM}{U}\Big)\Big)$ où P est un polynôme unitaire de degré 4 , et que le coefficient du monôme de degré ℓ de P $(0\leq\ell\leq 3)$ est majoré par $C_4^{\ell}3^{4-\ell}$, d'où a) ;

b) on déduit de (3.4.8) que J_2 est majoré par $c_5 h \sum_{q \in Q_d^{réd}} a(q)^{-1}$ avec $c_5 = 16\pi\,\gamma(\frac{3}{2})\zeta(2) = \frac{2\pi^4}{3} M^{3/2}$;

c) on déduit de (3.4.9) que J_3 est majoré, pour tout $\varepsilon > 0$, par $4\,\frac{\pi^2 h^2}{\sqrt{d}} M^{3/2}\Gamma(\frac{3}{2}+\varepsilon)^2 \frac{(4M)^\varepsilon}{\varepsilon}$. En prenant pour ε l'inverse de $\sup(2, \log(4M))$, on a $\Gamma(\frac{3}{2}+\varepsilon)^2 \leq 1$ et $(4M)^\varepsilon \leq e$, d'où c).

3.5. Choix de U et théorème technique

Nous prendrons pour U le nombre $\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{1/m}$ où m est le plus petit entier tel que $m^2 + m \geq \frac{h}{2}$ si $h \neq 4$ et $m = \frac{3}{2}$ si $h = 4$. Avec ce choix, on a :

Lemme 1.— Il existe au plus un nombre premier $p \leq U$ *décomposé dans* K *; si un tel* p *existe, on a* $p \geq (\frac{d}{4})^{1/h}$. *Le plus grand diviseur premier de* d *est supérieur à* U.

Si p et p' sont inférieurs à U et décomposés dans K, on a $\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\,\frac{1+p'^{-s}}{1-p'^{-s}} \ll \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(2s)}$ (cf. 1.4) et $p^\ell p'^{\ell'} \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$ pour tout couple $(\ell,\ell') \in \mathbb{N}^2$ tel que $\ell + \ell' \leq m' = [m]$. D'après 1.4, b), on en déduit l'inégalité $1 + 2m' + 2m' + 4\,\frac{m'(m'-1)}{2} \leq h$ qui contredit la définition de m. La deuxième assertion a été prouvée en 1.4, a). Enfin si T est le nombre de diviseurs premiers de d, on sait (cf. [B,Š], III, § 8) que 2^{T-1} divise h, d'où l'on déduit $T \leq 2m$. Comme soit d, soit $\frac{d}{4}$, est sans facteurs carrés, l'un au moins des diviseurs premiers de d est supérieur à $(\frac{d}{4})^{1/T}$ et donc à U.

Notons $P(d)$ l'ensemble des nombres premiers divisant d, à l'exception du plus grand d'entre eux et posons $V = (\frac{d}{4})^{1/h}$. Compte tenu du lemme 1, de (1.3.2), et des conditions (C1) et (C2) du début du numéro 3, on a

$$1 \leq \sum_{q \in Q_d^{réd}} a(q)^{-1} \leq \alpha_1 \prod_{p \in P(d)} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \left(1 + \frac{h}{U}\right)\left(\frac{1+V^{-1}}{1-V^{-1}}\right) \tag{3.5.1}$$

$$|G(U,1)| \geq \alpha_2 \prod_{p \in P(d)} |G_p(1)| \quad \text{avec} \quad \alpha_2 = \left(\frac{1-V^{-1/2}}{1+V^{-1/2}}\right)^2 \tag{3.5.2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{G'(U,1)}{G(U,1)}\right) \geq \sum_{p \in P(d)} \mathrm{Re}\left(\frac{G'_p(1)}{G_p(1)}\right) - \alpha_3 \quad \text{avec} \quad \alpha_3 = \frac{4V^{-1/2}}{1-V^{-1}} \log V \tag{3.5.3}$$

et avec les notations de 3.2

$$\sup_{s \in \Delta} \frac{|G(U,s)|}{|G(U,1)|} \leq \alpha_4 \prod_{p \in P(d)} (1 - p^{-1/4})^{-2} \quad \text{avec} \quad \alpha_4 = \frac{(1+V^{-1/2})^2}{(1-V^{-1/4})^4}\,. \tag{3.5.4}$$

THÉORÈME 2.— *Il existe une constante* $c_6 > 0$ *dépendant de* M *et* Ψ *(mais pas de* G, K, h *et* d*) telle que l'on ait*

$$c_6 h \geq \inf\left(1, \prod_{p \in P(d)} \left|\frac{G_p(1)}{1+p^{-1}}\right|\right) \log d\,.$$

On déduit de la proposition 1 et des inégalités (3.4.3) et (3.5.1) que l'on a

$$|J(U^*)| \leq c_5 \alpha_5 h \prod_{p \in P(d)} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \tag{3.5.5}$$

avec

$$\alpha_5 = \alpha_1 + \frac{c_4}{c_5}\frac{h}{\sqrt{U}}\left(\left|\log \frac{dM}{U}\right| + 3\right)^4 + \frac{c_6}{c_5}\frac{h}{\sqrt{d}} \quad .$$

On déduit de 3.2 et des inégalités (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4) que l'on a

(3.5.6) $$|J(U)| \geq |c_1|\alpha_6 \log d \prod_{p\in P(d)} |G_p(1)|$$

avec

$$\alpha_6 = \alpha_2\left(1 + \left(\sum_{p\in P(d)} \mathrm{Re}\left(\frac{G_p'(1)}{G_p(1)}\right) - \alpha_3 + c_2 - \frac{c_3\alpha_4}{|c_1|}\prod_{p\in P(d)}(1-p^{-1/4})^{-2}\right)(\log d)^{-1}\right) .$$

Compte tenu du fait que le cardinal de $P(d)$ est majoré par la valuation 2-adique de h, on vérifie aisément que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est suffisamment grand (disons $\geq \lambda_0$) et si $d \geq e^{\lambda h}$, les expressions α_5 et α_6 ci-dessus satisfont

$$\alpha_6 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_5}{\alpha_6} \leq 1 + c_7(\lambda)$$

où $c_7(\lambda)$ dépend de λ, Ψ et M, mais pas de G, K, h et d, est effectivement calculable, et tend vers zéro lorsque λ tend vers $+\infty$. Le théorème 2 se déduit de (3.5.5), (3.5.6) et de l'égalité $J(U) = -J(U^*)$ (cf. 3.1.4) : il suffit de prendre $c_6 = \sup\left(\lambda, \frac{c_5}{|c_1|}(1+c_7(\lambda))\right)$ pour un quelconque $\lambda \geq \lambda_0$.

3.6. <u>Conclusion</u>.— Soit $\mathcal{K}$ une famille de corps quadratiques imaginaires et $\mathcal{D}$ l'ensemble des d tels que $-d$ soit le discriminant d'un corps $K \in \mathcal{K}$. Supposons que l'on connaisse un nombre réel $M > 0$, une série de Dirichlet Ψ, et pour chaque corps $K \in \mathcal{K}$, une série de Dirichlet G_K, vérifiant les conditions (C1) à (C4) du début du numéro (relativement au corps K). Comme la constante c_6 intervenant dans le théorème 2 ne dépend que de M et Ψ et pas de G_K, ni de K, le théorème 2 permet, pour tout $h \geq 1$, de majorer de façon effective les $d \in \mathcal{D}$ tels que $h(-d) = h$.

4. <u>Construction d'une bonne forme modulaire</u>

4.1. Soit f une newform normalisée de poids 2 et de niveau N (cf. 2.1). Posons $M = \frac{N}{4\pi^2}$ et $\Psi(s) = L(f,s)L(f\otimes\lambda,s)$ (cf. 2.3). Notons $\mathcal{K}_N^-$ l'ensemble des corps quadratiques imaginaires dont le discriminant est premier à N et dont le caractère quadratique χ associé vérifie $\chi(-N) = 1$, ou ce qui revient au même $\chi(N) = -1$. Pour un tel corps K, posons $G = L(f\otimes\chi,s)L(f\otimes\lambda,s)^{-1}$ (cf. 2.2). Pour tout nombre premier p ramifié dans K, on a $G_p(1) = 1 + a_p(f) + p$ avec $a_p(f) \in \mathbb{Z}$, $|a_p(f)| \leq 2\sqrt{p}$, d'où $|G_p(1)| \geq 1 + p - [2\sqrt{p}]$.

PROPOSITION 2.— *Les conditions* (C1) *à* (C4) *du début du numéro* 3 *sont satisfaites par* M, Ψ, G *si la fonction* $L(f,s)$ *admet en* $s = 1$ *un zéro d'ordre* ≥ 3.

Cela se déduit aussitôt des propriétés des formes modulaires rappelées au numéro 2. En particulier le fait que le signe de l'équation fonctionnelle de $d^s\gamma(s)\Psi(s)G_K(s) = \Lambda(f,s)\Lambda(f\otimes\chi,s)$ soit égal à $+1$ résulte du fait que $\chi(-N)$ est égal à 1 (cf. 2.2).

La proposition permet d'appliquer les résultats de 3.6 à la famille de corps quadratiques K_N^- . Dans les minorations des nombres de classes de ces corps ainsi obtenues, la constante la plus importante est $\frac{|c_1|}{c_5}$ et les minorations obtenues seront d'autant meilleures que cette constante est grande. D'après (2.3.3), (2.3.1) et la définition de c_1 (cf. 3.2) et de c_5 (cf. 3.4, prop. 1, b)), on a

$$c_1 = 2\pi \prod_{p|N} \left(\frac{p}{p-1}\right) \iint_{D_0(N)} f(\tau)\overline{f(\tau)}\,|d\tau \wedge d\bar{\tau}| \;,$$

$$c_5 = \frac{\pi}{12} N^{3/2} \;.$$

4.2. Les résultats exposés ci-dessus s'étendent aux corps quadratiques imaginaires dont le discriminant n'est pas premier à N mais dont le caractère associé χ est tel que $\varepsilon(f \otimes \chi) = \varepsilon(f)$ (notations de 2.2), modulo les modifications mineures suivantes, nécessaires à la validité des conditions (C1) à (C4) du numéro 3 : on prend pour Ψ la série de Dirichlet ayant mêmes facteurs eulériens que $L(f \otimes \chi, s)$ en les nombres premiers p tels que $p^2 | \mathrm{pgcd}(N, d^2)$ et mêmes facteurs eulériens que $L(f,s)L(f \otimes \lambda, s)$ en les autres nombres premiers. On pose $G(s) = L(f,s)L(f \otimes \chi, s)\Psi(s)^{-1}$ et $M = \frac{\sqrt{NN_\chi}}{4\pi^2 d}$, où N_χ désigne le niveau de $f \otimes \chi$. (Lorsque K varie, M décrit un ensemble fini.)

4.3. La façon dont les travaux de Gross et Zagier permettent de prouver que, pour certaines newforms f de poids 2 , $L(f,s)$ a en $s = 1$ un zéro d'ordre ≥ 3 , a été décrite dans l'introduction. Pour plus de détails, voir [G,Z]. Nous nous contenterons ici de décrire une telle situation : la courbe elliptique E_0 d'équation $y^2 + y = x^3 + x^2 - 23x - 50$ est une courbe de Weil, de conducteur 37 , de rang nul ([M,S-D]) et la forme modulaire f_0 associée est l'unique newform de poids 2 et de niveau 37 vérifiant $f_0(-\frac{1}{37\tau}) = -37\tau^2 f(\tau)$. La courbe E_1 déduite de E_0 par "torsion par -139 " est une courbe de Weil, de conducteur 37.139^2 , de rang 3 , et la forme modulaire associée est $f_1 = f_0 \otimes \chi_0$ avec $\chi_0 = \left(\frac{-139}{\cdot}\right)$. Gross et Zagier ont prouvé que $L(f_1, s)$ a en $s = 1$ un zéro d'ordre 3 . Les constantes $\varepsilon(f_0)$ et $\varepsilon(f_1)$ sont respectivement égales à 1 et à $\chi_0(-37) = -1$. Soit χ le caractère quadratique associé à un corps quadratique imaginaire de discriminant $-d$. Si $\chi(-37)$ est non nul, on a
$\varepsilon(f_1 \otimes \chi) = \varepsilon(f_0 \otimes \chi_0\chi) = \chi_0\chi(-37) = -\chi(-37)$. Si $\chi(-37)$ est nul, on a
$\varepsilon(f_1 \otimes \chi) = \varepsilon(f_0 \otimes \chi_0\chi) = -1$ (cf. 2.1 et 2.2).

Lorsque $\chi(-37) = -1$, i.e. $\chi(37) = 1$, on a $\log \frac{d}{4} \geq h \log 37$ d'après 1.4, a). Lorsque $\chi(-37) \neq -1$, on vient de vérifier que l'on a $\varepsilon(f_1 \otimes \chi) = \varepsilon(f_1)$, de sorte que la théorie exposée en 4.1 ou en 4.2 s'applique. Il convient de prendre pour Ψ la fonction

$$\Psi(s) = L(f_1, s)L(f_1 \otimes \lambda, s)L_{139}(f_0 \otimes \chi_0\chi, s) \;,$$

où

$$L_{139}(f_0 \otimes \chi_0\chi, s) = \begin{cases} (1 \pm 4\ 139^{-s} + 139^{1-2s})^{-1} & \text{si } 139 \mid d \text{ et } (\chi_0\chi)(139) = \pm 1 \\ 1 & \text{si } 139 \nmid d \end{cases},$$

et de prendre pour M le nombre $\dfrac{37^{\alpha}139^{\beta}}{4\pi^2}$ avec $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } 37 \nmid d \\ 1/2 & \text{si } 37 \mid d \end{cases}$ et $\beta = \begin{cases} 2 & \text{si } 139 \nmid d \\ 0 & \text{si } 139 \mid d \end{cases}$.

Ceci démontre le théorème 1 dans tous les cas.

5. Quelques compléments

5.1. Dans [M,W], Montgomery et Weinberger montrent que le nombre de classes d'un corps quadratique imaginaire de discriminant $-d$ est différent de 3 si $907 < d < 10^{2500}$. On peut se demander si les constantes numériques intervenant dans le théorème 1 sont suffisamment petites pour montrer que l'on a $h(-d) \neq 3$ pour $d \geq 10^{2500}$. En utilisant la forme modulaire f_1 introduite en 4.3, on montre (cf. [Oe]) que l'on peut prendre $C = 7000$ dans le théorème 1, ce qui est insuffisant.

Si par contre on utilisait la fonction L d'une courbe elliptique E de conducteur 5077 trouvée par Brumer et Kramer, le théorème 1 s'appliquerait avec $C = 55$, à condition de se restreindre aux discriminants d premiers à 5077 (restriction sans importance si l'on suppose $h(-d)$ impair) : mais pour pouvoir utiliser cette fonction L, il faut vérifier que la courbe E est de Weil (ce que Mestre vient de faire) et que $L(E,s)$ a en $s = 1$ un zéro d'ordre ≥ 3 : les calculs en cours seront exposés dans [Oe].

5.2. La connaissance de la liste des corps quadratiques imaginaires ayant un nombre de classes égal à 1,2 ou 4 permettrait de déterminer la liste (finie) des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ qui admettent exactement une représentation de la forme $n = x^2 + y^2 + z^2$ avec $x \geq y \geq z \geq 0$. Cela se déduit de la formule de Gauss-Hermite donnant le nombre de telles représentations d'un entier n.

5.3. La connaissance de la liste des corps quadratiques imaginaires ayant un nombre de classes $\leq h$ (h entier donné) permet de déterminer la liste (finie) des ordres non maximaux de corps quadratiques imaginaires, dont le groupe des classes de modules inversibles est d'ordre inférieur à h (cf. [B,Š], p. 277, ex. 20).

5.4. Le théorème 3 est trop faible pour permettre de déterminer les discriminants pour lesquels chaque genre de formes quadratiques (entières définies positives) comprend une seule classe et en particulier de déterminer la liste (finie d'après le théorème de Siegel) des "nombres convenables" d'Euler (cf. *loc. cit.*, p. 271).

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] A. BAKER – *A remark on the class number of quadratic fields*, Bull. London Math. Soc. 1(1969), 98-102.

[B,Š] Z.I. BOREVIČ, I.R. ŠAFAREVIČ – Théorie des nombres, Ed. Gauthier-Villars, 1967.

[Bu] D.A. BUELL – *Small class numbers and extreme values of* L-*functions of quadratic fields*, Math. of Comp. 31(1977), 786-796.

[Ca] H. CARAYOL – *Sur les représentations* ℓ*-adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296(1983), 629-632.

[C 11] M.K. AGRAWAL, J.H. COATES, D.C. HUNT and J.A. VAN DER POORTEN – *Elliptic curves of conductor* 11, Math. of Comp. 35(1980), 991-1002.

[De] P. DELIGNE – *Preuve des conjectures de Tate et Shafarevitch (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki, exp. 616, novembre 1983, Astérisque n° 121-122(1985), 25-41.

[Ga] C.F. GAUSS – Disquisitiones arithmeticae, Werke, t. I.

[G,J] S. GELBART and H. JACQUET – *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. E.N.S. (4) 11(1978), 471-542.

[G,Z] B. GROSS et D. ZAGIER – *Points de Heegner et dérivées de fonctions* L, C.R. Acad. Sc. Paris 297(1983), 85-87.

[He] K. HEEGNER – *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*, Math. Z. 56(1952), 227-253.

[Hei] H. HEILBRONN – *On the class-number in imaginary quadratic fields*, Quarterly J. of Math. (Oxford) 5(1934), 150-160.

[Go] D.M. GOLDFELD – *The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and the class numbers of quadratic fields*, Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42(1977), 219-227.

[M,S-D] B. MAZUR and P. SWINNERTON-DYER – *Arithmetic of Weil Curves*, Invent. Math. 25(1974), 1-61.

[M,W] H.L. MONTGOMERY and P.J. WEINBERGER – *Notes on small class numbers*, Acta Arithmetica 24(1973), 529-542.

[Oe] J. OESTERLÉ – *Résolution effective du problème du nombre de classes des corps quadratiques imaginaires*, à paraître.

[Ogg] A.P. OGG – *On a convolution of* L-*series*, Invent. Math. 7(1969), 297-312.

[Sh] G. SHIMURA – *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. of the London Math. Soc. 31(1975), 79-98.

[Si] C.L. SIEGEL – *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arithmetica 1(1936), 83-86.

[S-D,B] H.P.F. SWINNERTON-DYER and B.J. BIRCH – *Elliptic curves and modular functions*, in : Modular Functions of One Variable IV, Lect. Notes in Math. 476, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[St 1] H.M. STARK - *There is no tenth complex quadratic field with class-number one*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 57(1967), 216-221.

[St 2] H.M. STARK - *On the "gap" in a theorem of Heegner*, J. Number Theory 1(1969), 16-27.

[St 3] H.M. STARK - *On complex quadratic fields with class number two*, Math. Comp. 29(1975), 289-302.

[Ta] T. TATUZAWA - *On a theorem of Siegel*, Jap. J. of Math. 21(1951), 163-178.

[Vi] M.-F. VIGNERAS - *Valeur au centre de symétrie des fonctions* L *associées aux formes modulaires*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-80, Birkhäuser.

Joseph OESTERLÉ

École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05