PIERRE CARTIER

Homologie cyclique : rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen...

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. n° 621, p. 123-146

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__123_0>

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983-84, n° 621 Février 1984

HOMOLOGIE CYCLIQUE : RAPPORT SUR DES TRAVAUX RÉCENTS DE CONNES, KAROUBI, LODAY, QUILLEN...

par Pierre CARTIER

Introduction

L'homologie cyclique a deux origines distinctes. Connes [4] a introduit une *cohomologie cyclique* dans sa recherche d'invariants pour l'espace des feuilles d'une variété feuilletée, considérée comme un test décisif pour sa géométrie différentielle non-commutative. Tsigan [23] a introduit une *homologie cyclique* permettant de calculer l'homologie de certaines algèbres de Lie ; le même problème a reçu une solution voisine de la part de Loday et Quillen [22]. Les deux points de vue ont été unifiés par l'introduction des *objets cycliques*, par Connes dans [5].

Les deux approches sont liées de manière étroite à la K-théorie, à tel point que l'homologie cyclique est baptisée "K-théorie additive" par Feigin et Tsigan. Il est possible d'ailleurs qu'on puisse associer une K-théorie à chaque groupe formel commutatif ; des efforts dans ce sens avaient été faits par Morava vers 1970. Une précision s'impose ici : Connes travaille dans un contexte d'analyse avec les espaces de Hilbert, où l'on dispose de la périodicité de Bott ; seuls importent donc les groupes K_0 et K_1. On doit par ailleurs à Quillen la définition de groupes $K_i(A)$ pour tous les entiers positifs i. Le caractère de Chern qui relie K-théorie et homologie est capital ; la construction initiale de Connes a été étendue à la théorie de Quillen par Karoubi [18], [19], [20].

L'ubiquité de l'homologie cyclique est remarquable. Aussitôt mise à jour, elle a été reconnue dans des sujets apparemment très éloignés : pseudo-isotopie des espaces topologiques et espaces $A(X)$ de Waldhausen, algèbres de Kac-Moody, géométrie hyperbolique de dimension 3 et dilogarithme, symbole modéré et jacobiennes intermédiaires, théorèmes de l'indice. Après avoir défini l'homologie cyclique et décrit ses principales propriétés, nous passerons en revue l'essentiel de ces applications. Le sujet est en rapide développement, et le présent rapport risque de dater rapidement.

Je remercie très sincèrement Connes, Deligne, Karoubi et Loday pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux sur ce sujet, et pour l'abondante documentation - en grande partie inédite - qu'ils m'ont communiquée. Je remercie aussi Douady pour son affectueuse vigilance lors de la préparation de cet exposé.

§ 1. CONSTRUCTION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE

1.1. Rappels de K-théorie

Soit X un espace compact. Notons $\mathcal{E}(X)$ la catégorie additive des fibrés vectoriels (complexes) sur X, et $\Phi(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{E}(X)$. Pour l'opération de *somme directe*, $\Phi(X)$ est un monoïde commutatif; le groupe symétrisé associé se note $K^{0}(X)$. Pour tout fibré vectoriel E de base X, on note $[E]$ l'élément correspondant de $K^{0}(X)$; par définition, on a $[E] + [F] = [E \oplus F]$ si E et F sont deux fibrés vectoriels de base X, et tout élément de $K^{0}(X)$ est de la forme $[E] - [F]$. Il existe sur $K^{0}(X)$ une structure d'anneau commutatif caractérisée par la formule $[E].[F] = [E \otimes F]$. A côté du produit tensoriel, on peut aussi considérer les opérations de puissances extérieures, d'où des opérations notées λ_n dans $K^{0}(X)$. On introduit aussi les *opérations d'Adams* ψ_n par la relation de récurrence

$$\psi_1(x) = x \quad , \quad \psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\lambda_i(x)\psi_{n-i}(x) + (-1)^{n-1}n\lambda_n(x)$$

(pour $n \geq 2$). Il est remarquable que les ψ_n soient des endomorphismes de l'anneau $K^{0}(X)$; de plus, on a $\psi_m \circ \psi_n = \psi_{mn}$, et $\psi_n(x) = x^n$ si x est la classe d'un fibré vectoriel de rang 1.

Soit $\Phi_1(X)$ le groupe commutatif formé des classes de fibrés vectoriels de rang 1 sur X, l'opération étant le produit tensoriel. Ce groupe est isomorphe à $H^{2}(X,\mathbb{Z})$ (la cohomologie est celle de Čech) par un isomorphisme $[L] \mapsto c_1(L)$ (première classe de Chern). Le *caractère de Chern* ch^X est caractérisé par les propriétés suivantes :

a) pour tout espace compact X, ch^X est un isomorphisme d'anneaux de $K^{0}(X) \otimes \mathbb{Q}$ avec $H^{+}(X;\mathbb{Q}) = \sum_{i\geq 0} H^{2i}(X;\mathbb{Q})$;

b) ch^X est fonctoriel par rapport à X ;

c) on a $ch^X(L) = \exp c_1(L)$ pour L dans $\Phi_1(X)$.

De plus, on a

$$ch_i^X(\psi_m(x)) = m^i ch_i^X(x) \qquad (x \in K^{0}(X))$$

si $ch_i^X(x)$ est la composante de $ch^X(x)$ dans $H^{2i}(X;\mathbb{Q})$. Il est donc tentant de *définir* la cohomologie rationnelle de degré pair, soit $H^{+}(X;\mathbb{Q})$, au moyen de l'isomorphisme ch^X ; on peut même, avec quelques réserves, définir les puissances de Steenrod (voir [11]). On sait aussi définir les *classes de Chern* $c_i(E)$ d'un fibré vectoriel sur X ; elles appartiennent à $H^{2i}(X;\mathbb{Z})$, et $ch^X(E)$ se calcule par une formule polynômiale universelle (à coefficients rationnels) en les $c_i(E)$. Grothendieck a montré comment définir des K-classes de Chern à l'intérieur de $K^{0}(X)$ (cf. [14], pages 194 à 196).

Pour obtenir la cohomologie impaire, on utilise l'isomorphisme connu de $\widetilde{H}^{i}(X)$ et $\widetilde{H}^{i+1}(S^{1}X)$, où $S^{1}X$ désigne la suspension de X. Ceci conduit à introduire le groupe $K^{-1}(X) = \widetilde{K}^0(S^1X)$, ou plus généralement les groupes $K^{-n}(X) = \widetilde{K}^0(S^nX^+)$ (où[1] S^nX est la n-ième suspension de X). Il s'agit d'un luxe inutile, puisque le *théorème de périodicité de Bott* affirme que $K^{-n}(X)$ est canoniquement isomorphe à $K^{-n-2}(X)$. On peut aussi définir les groupes relatifs $K^{-n}(X,Y)$, où Y est un sous-espace fermé de X ; ce groupe ne dépend en fait que de l'espace localement compact $X \smallsetminus Y$, d'où la définition des groupes $K^{-n}(X)$ lorsque X est localement compact. Le théorème de périodicité de Bott s'énonce alors :

$$\text{" } K^0(X) \text{ est isomorphe à } K^0(X \times \mathbb{R}^2) \text{ ",}$$

et l'on a un hexagone exact

$$\begin{tikzcd}
 & K^0(X,Y) \arrow[r] & K^0(X,Z) \arrow[dr] & \\
K^{-1}(Y,Z) \arrow[ur] & & & K^0(Y,Z) \arrow[dl] \\
 & K^{-1}(X,Z) \arrow[ul] & K^{-1}(X,Y) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

dans l'hypothèse $X \supset Y \supset Z$.

1.2. Apparition des algèbres stellaires (alias C^*-algèbres)

Si A est un anneau, commutatif ou non, on note $P(A)$ la catégorie additive des A-modules projectifs à gauche de type fini. Le procédé du début du n° 1.1 s'applique à toute catégorie additive C , et permet de définir un groupe de Grothendieck $K(C)$. On *posera* $K_0(A) = K(P(A))$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $GL_n(A)$ le groupe des matrices $n \times n$, à coefficients dans A , et inversibles. On complète une telle matrice en une matrice infinie comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & . \\ c & d & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} .$$

Alors les groupes $GL_n(A)$ forment une suite croissante, dont la réunion est notée $GL(A)$. *On définit* $K_1(A)$ *comme le quotient de* $GL(A)$ *par son groupe des commutateurs*, noté $E(A)$.

Supposons maintenant que A soit une algèbre normée complète (avec unité). Le groupe $GL_n(A)$ est alors un groupe topologique, et l'on munit $GL(A)$ de la topologie limite inductive. En particulier les groupes d'homotopie $\pi_i(GL(A))$ sont définis. Une variante du théorème de périodicité de Bott (cf. Wood [17] et Karoubi [14]) affirme l'existence d'isomorphismes (on pose $K^{-1}(A) = \pi_0(GL(A))$)

(1) On note $\widetilde{K}^0(X)$ la K-théorie *réduite*, c'est-à-dire $K^0(X)/K^0(*)$ où $*$ est un point, et X^+ l'espace déduit de X par adjonction d'un point base.

$$K_0(A) \longrightarrow \pi_{2i+1}(GL(A))$$
$$K^{-1}(A) \longrightarrow \pi_{2i}(GL(A))$$

pour $i \geq 0$. Noter le cas particulier $A = \mathbb{C}$: on a $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ et $K^{-1}(\mathbb{C}) = 0$, et l'on retrouve la détermination par Bott des groupes d'homotopie $\pi_i(GL(\mathbb{C}))$.

On peut énoncer l'un des points saillants de la théorie de Gelfand des algèbres normées comme suit : si l'on associe à un espace localement compact X l'algèbre $C_0(X;\mathbb{C})$ des applications continues de X dans $\mathbb{C}$ nulles à l'infini, on définit une équivalence de la catégorie des espaces localement compacts avec celle des algèbres stellaires commutatives ; les espaces compacts correspondent aux algèbres avec unité. De plus, si X est compact, et si l'on pose $A = C(X;\mathbb{C})$, la catégorie $\mathcal{E}(X)$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}(A)$ ("théorème de Serre-Swan") ; l'équivalence s'obtient en associant à un fibré E sur X l'espace de ses sections continues. On dispose donc d'un dictionnaire permettant de traduire les problèmes sur les espaces compacts en des problèmes sur les algèbres stellaires commutatives. En particulier, l'équivalence de $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{P}(A)$ entraîne un isomorphisme de $K^0(X)$ avec $K_0(A)$; on a aussi un isomorphisme de $K^{-1}(X)$ avec $K^{-1}(A)$ [1].

Une des préoccupations majeures de Connes a été l'étude d'espaces quotients de la forme X/Γ ou $V/\mathcal{F}$, où Γ est un groupe discret opérant dans l'espace localement compact X, et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur la variété V. Dans les deux cas, on peut associer aux données géométriques une algèbre stellaire, notée $C_0(X) \rtimes \Gamma$ dans le premier cas, et $C^*(V,\mathcal{F})$ dans le second. Lorsqu'il existe un quotient raisonnable, cette algèbre stellaire est équivalente au sens de Morita à l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur l'espace quotient. Or deux algèbres équivalentes au sens de Morita ont des groupes K^{-i} isomorphes (pour $i = 0,1$). Il est donc raisonnable de définir les groupes de K-théorie par l'égalité

$$K^{-i}(X/\Gamma) = K^{-i}(C_0(X) \rtimes \Gamma)$$
$$K^{-i}(V/\mathcal{F}) = K^{-i}(C^*(V,\mathcal{F}))$$

(pour i égal à 0 ou 1). Cette K-théorie ayant des propriétés raisonnables, il s'agit maintenant de construire une théorie homologique et un caractère de Chern.

1.3. Des traces à la cohomologie cyclique

Soit k un corps de caractéristique 0 [2]. Considérons une algèbre différentielle graduée Ω (avec élément unité) ; on note Ω^n les composantes homogènes

---

[1] Cela résulte par exemple, du théorème 4.8 de [14], page 84 et de la définition de $K^{-1}(X)$ donnée page 75, à savoir l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $GL(\mathbb{C})$.

[2] Une bonne partie des définitions et résultats de ce numéro restent valables si l'on suppose seulement que k est un anneau commutatif ; cependant, la cohomologie cyclique ne serait pas la "bonne" dans ce cadre plus général, et il faut attendre le numéro 1.7 pour une construction définitive.

(pour $n \geq 0$) et $d : \Omega^n \to \Omega^{n+1}$ la différentielle. Un *cycle de degré* n sur Ω (appelé encore "trace graduée fermée") est une forme linéaire τ sur Ω^n qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

(1) $$\tau(\omega.\omega') = (-1)^{pq}\tau(\omega'\omega) \qquad \text{pour } \omega \in \Omega^p ,\ \omega' \in \Omega^q ,\ p+q=n$$

(2) $$\tau(d\omega) = 0 \qquad \text{pour } \omega \in \Omega^{n-1}.$$

Voici quelques exemples :

a) Si A est une algèbre sur le corps k , on pose $\Omega^0 = A$, $\Omega^n = 0$ si $n > 0$, et $d = 0$; alors un cycle de degré 0 est une forme linéaire τ sur A telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour a , b dans A . On appelle souvent *trace* (ou forme linéaire centrale) une telle forme.

b) Soit X une variété orientée compacte de classe C^∞, de dimension n . Considérons l'algèbre Ω des formes différentielles extérieures sur X et posons $\tau(\omega) = \int_X \omega$ pour $\omega \in \Omega^n$. La formule (2) résulte du théorème de Stokes, et la formule (1) provient de ce que l'on a dans ce cas $\omega'\omega = (-1)^{pq}\omega\omega'$ pour $\omega \in \Omega^p$, $\omega' \in \Omega^q$; cette propriété s'exprime en disant que Ω est commutative (au sens gradué).

c) Avec les notations de b), considérons l'algèbre graduée $M_r(\Omega)$ des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans Ω . Si $\omega = (\omega_{ij})$ est une telle matrice, on pose $d\omega = (d\omega_{ij})$. Alors l'algèbre différentielle graduée $M_r(\Omega)$ n'est plus commutative, mais si l'on pose $\tau(\omega) = \int_X \sum_i \omega_{ii}$ pour $\omega = (\omega_{ij})$ dans $M_r(\Omega^n)$, on a encore défini un cycle de degré n sur $M_r(\Omega)$.

Soit maintenant A une algèbre sur le corps k ; on ne suppose pas que A soit commutative ou possède un élément unité. Notons $\widetilde{A}$ l'algèbre déduite de A par adjonction d'un élément unité, de sorte qu'on a $\widetilde{A} = k.1 \oplus A$. Le cas particulier $A = k$ est important ; on note P l'algèbre $\widetilde{k}$. Elle a une base $(1,e)$ sur k , avec la table de multiplication $1.1 = 1$, $1.e = e.1 = e.e = e$. Introduisons aussi l'algèbre différentielle graduée universelle $\Omega(\widetilde{A})$ construite sur $\widetilde{A}$. On a $\Omega^0(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$, et pour $n \geq 1$, l'application $\widetilde{a}_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \longmapsto \widetilde{a}_0 da_1 \ldots da_n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\widetilde{A} \otimes A^{\otimes n}$ sur $\Omega^n(\widetilde{A})$; si $\widetilde{a}_0 = a_0 + \lambda.1$, on a

(3) $$\widetilde{a}_0 da_1 \ldots da_n = a_0 da_1 \ldots da_n + d(\lambda a_1 da_2 \ldots da_n) .$$

Il en résulte que l'on peut identifier, par la relation[1]

(4) $$\tau_n(a_0,a_1,\ldots,a_n) = \tau(a_0 da_1 \ldots da_n)$$

les cycles de degré n sur $\Omega(\widetilde{A})$ aux *n-traces* sur A , c'est-à-dire les formes multilinéaires τ_n satisfaisant aux relations

(5) $$\tau_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,a_0) = (-1)^n \tau_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)$$

et $b\tau_n = 0$, où la forme multilinéaire $b\tau_n$ est définie par

(6) $$b\tau_n(a_0,..,a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \tau_n(a_0,..,a_{i-1},a_i a_{i+1},..,a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\tau_n(a_{n+1}a_0,a_1,..,a_n) .$$

[1] Avec une petite modification si $n = 0$.

On peut reformuler comme suit ces définitions. Soit A^* le dual de l'espace vectoriel A, considéré comme bimodule sur A par la règle $(a.f.b)(c) = f(bca)$ pour a, b, c dans A et f dans A^*. Considérons le complexe des cochaînes de Hochschild de A dans le bimodule A^*, noté $C^*(A)$.

La composante de degré n, notée $C^n(A)$, est l'ensemble des formes multilinéaires de $n+1$ arguments sur A, et l'opérateur cobord $b : C^n(A) \longrightarrow C^{n+1}(A)$ est défini par la formule (6). La cohomologie du complexe $(C^*(A),b)$ est donc la cohomologie de Hochschild $H^*(A,A^*)$ de A à valeurs dans A^*. Par ailleurs, les éléments τ_n de $C^n(A)$ qui satisfont à la relation (5) forment un sous-espace vectoriel $C^n_\lambda(A)$ de $C^n(A)$. Un petit miracle est le fait que b applique $C^n_\lambda(A)$ dans $C^{n+1}_\lambda(A)$; on peut donc considérer le sous-complexe $(C^*_\lambda(A),b)$ de $(C^*(A),b)$ et définir sa cohomologie[1]. Celle-ci est notée $H^*_\lambda(A)$ par Connes et $HC^*(A)$ par Loday et Quillen ; nous adoptons cette dernière notation et nous l'appellerons *cohomologie cyclique* de A.

1.4. Propriétés de la cohomologie cyclique

Tout d'abord, la définition du cup-produit (comme on dit en bon franglais !). Si A et B sont deux algèbres sur le corps k, la propriété universelle de $\Omega(\widetilde{A \otimes B})$ permet de construire un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$c : \Omega(\widetilde{A \otimes B}) \longrightarrow \Omega(\widetilde{A}) \otimes \Omega(\widetilde{B}) .$$

Si τ est un cycle de degré n sur $\Omega(\widetilde{A})$ et π un cycle de degré p sur $\Omega(\widetilde{B})$, alors $\tau \cup \pi = (\tau \otimes \pi).c$ est un cycle de degré $n+p$ sur $\Omega(\widetilde{A \otimes B})$. On a donc défini un accouplement de $Z^n_\lambda(A) \times Z^p_\lambda(B)$ dans $Z^{n+p}_\lambda(A \otimes B)$, et l'on vérifie qu'il passe à la cohomologie pour définir un accouplement de $HC^n(A) \times HC^p(B)$ dans $HC^{n+p}(A \otimes B)$.

Appliquons d'abord cela au cas où $A = B = k$; on obtient une multiplication dans $HC^*(k)$ et l'on montre que $HC^*(k)$ est l'algèbre de polynômes $k[\sigma]$ par rapport à la 2-trace σ définie par $\sigma(edede) = 1$ (attention : Connes utilise une normalisation différente avec $2\pi i$!). Considérons ensuite le cas où A est quelconque et B égal à k ; on a $A \otimes k = A$, et en particulier le cup-produit par σ définit un opérateur $S : HC^*(A) \longrightarrow HC^*(A)$, dit de suspension. Au niveau des n-traces, il se définit explicitement comme suit :

$$S\tau(a_0da_1\ldots da_{n+2}) = \sum_{j=1}^{n+1} \tau(a_0da_1\ldots da_{j-1}(a_ja_{j+1})da_{j+2}\ldots da_{n+2}) . \tag{7}$$

L'opérateur S est de degré 2, et applique $Z^n_\lambda(A)$ dans $Z^{n+2}_\lambda(A)$. On définit par ailleurs un opérateur de degré -1, soit $B : C^n(A) \longrightarrow C^{n-1}_\lambda(A)$. Tout d'abord, l'opérateur $t : C^n(A) \longrightarrow C^n(A)$ est défini par

[1] Les n-traces sont donc les cocycles du complexe $(C^*_\lambda(A),b)$; on note $Z^n_\lambda(A)$ l'ensemble de ces n-traces.

(8) $$t\tau(a_0,\dots,a_n) = (-1)^n\tau(a_n,a_0,\dots,a_{n-1})$$

de sorte que $C^n_\lambda(A)$ est caractérisé par la relation $t\tau = \tau$. On définit aussi l'opérateur $B_0 : C^{n+1}(A) \longrightarrow C^n(A)$ par

(9) $$B_0\tau(a_0,\dots,a_n) = \tau(1,a_0,\dots,a_n) + (-1)^n\tau(a_0,\dots,a_n,1) .$$

Enfin, on pose

(10) $$N = 1 + t + \dots + t^n \quad , \quad B = NB_0 .$$

Par construction B applique $C^{n+1}(A)$ dans $C^n_\lambda(A)$, et un calcul direct donne la relation $Bb = -bB$. Par suite, B passe à la cohomologie et définit un opérateur, noté encore B , de $H^*(A,A^*)$ dans $HC^*(A)$ (de degré -1). Par ailleurs, comme $C^*_\lambda(A)$ est un sous-complexe de $C^*(A)$, on a un homomorphisme naturel $I : HC^*(A) \longrightarrow H^*(A,A^*)$.

Un résultat fondamental de Connes est le fait que le triangle

(T) $$\begin{tikzcd} & H^*(A,A^*) \arrow[dl, "B"'] & \\ HC^*(A) \arrow[rr, "S"] & & HC^*(A) \arrow[ul, "I"'] \end{tikzcd}$$

est exact. La démonstration se ramène à prouver les deux formules

(11) $$SZ^n_\lambda(A) = bC^{n+1}(A) \cap C^{n+2}_\lambda(A) \quad , \quad Z^n_\lambda(A) \cap B_0Z^{n+1}(A) = BZ^{n+1}(A) ,$$

où $Z^n(A)$ est le noyau de $b : C^n(A) \longrightarrow C^{n+1}(A)$. En fait, on prouve que B définit, par passage au quotient, un quasi-isomorphisme du complexe $C^*(A)/C^*_\lambda(A)$ sur le complexe $C^*_\lambda(A)[-1]$; autrement dit, B induit un isomorphisme B' de $H^n(C^*(A)/C^*_\lambda(A))$ sur $HC^{n-1}(A)$ et $S \circ B'$ n'est autre que le cobord de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \to C^*_\lambda(A) \to C^*(A) \to C^*(A)/C^*_\lambda(A) \to 0 .$$

Le couple exact (T) précédent conduit à une suite spectrale, qu'on peut expliciter comme suit. Posons $D^{m,n} = C^{m-n}(A)$, avec la convention $C^j(A) = 0$ si $j < 0$; on considère les deux différentielles $d_1 : D^{m,n} \to D^{m+1,n}$ et $d_2 : D^{m,n} \to D^{m,n+1}$, données l'une par $b : C^{m-n}(A) \longrightarrow C^{m-n+1}(A)$ et l'autre par $B : C^{m-n}(A) \longrightarrow C^{m-n-1}(A)$; comme on a $Bb = -bB$, on a ainsi un bicomplexe D . Filtrons D par le 2e degré, d'où $(F^qD)^m = \sum_{n\geq q} D^{m,n}$. Le terme E^1 de la suite spectrale est alors égal à $H^*(A,A^*)$, avec la différentielle $I \circ B$. Pour décrire l'aboutissement, introduisons le conoyau $H^*_{DR}(A)$ de l'endomorphisme $S - 1$ de $HC^*(A)$; comme S est de degré 2 , $H^*_{DR}(A)$ a une graduation modulo 2 . De plus, on définit une filtration sur $H^*_{DR}(A)$ en notant $F_qH^*_{DR}(A)$ l'image canonique de $HC^q(A)$ dans $H^*_{DR}(A)$. Le terme E^∞ de la suite spectrale est le gradué associé à $H^*_{DR}(A)$ pour cette filtration.

1.5. <u>Exemples éclairants</u>

Supposons désormais que k soit le corps des nombres complexes et que A soit une algèbre topologique localement convexe, à multiplication continue. Remplaçons tacitement le complexe $(C^*(A),b)$ par le sous-complexe formé des formes multilinéaires continues sur A. Toutes les constructions algébriques des n^{os} 1.3 et 1.4 conservent un sens, et la théorie se transpose donc au cadre topologique.

Soit alors X une variété compacte de classe C^∞, et soit A l'algèbre $C^\infty(X;\mathbb{C})$. On note aussi Ω^n l'espace des formes différentielles extérieures de degré n et de classe C^∞ sur X ; un courant de de Rham de dimension n est une forme linéaire continue sur Ω^n. On prouve d'abord qu'à tout élément τ de $C^n(A)$, tel que $b\tau = 0$, est associé un courant C de dimension n sur X caractérisé par la formule

$$\langle C, f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n\rangle = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\tau(f_0, f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)}) \ . \tag{12}$$

De plus, la correspondance $\tau \mapsto C$ définit un isomorphisme du groupe de cohomologie de Hochschild $H^n(A,A^*)$ sur l'espace des courants de dimension n sur X. Le bord d'un courant C est le courant BC de dimension $n-1$ défini par $\langle BC,\omega\rangle = \langle C,d\omega\rangle$ pour $\omega \in \Omega^{n-1}$. On vérifie alors que l'isomorphisme précédent transforme l'opérateur $I \circ B$ dans $H^*(A,A^*)$ en le bord des courants. Dans la suite spectrale de la fin du n° 1.4, le terme E^2 est donc l'homologie de de Rham $H_*(X;\mathbb{C})$. Or la suite spectrale dégénère et l'on en conclut qu'il existe un isomorphisme de $H^*_{DR}(A)$ avec $H_*(X;\mathbb{C})$; la graduation modulo 2 de $H_*(X;\mathbb{C})$ se déduit de la graduation usuelle, par exemple $H_+(X;\mathbb{C}) = \sum_{i\geq 0} H_{2i}(X;\mathbb{C})$, et la filtration est définie par $F_q H_*(X;\mathbb{C}) = \sum_{n\leq q} H_n(X;\mathbb{C})$. Rappelons aussi la dualité de Poincaré, à savoir l'isomorphisme de $H_n(X;\mathbb{C})$ avec $H^{d-n}(X;\mathbb{C})$ si X est de dimension d.

Cet exemple me semble justifier la notation $H^*_{DR}(A)$ en général, pour rappeler de Rham.

Le deuxième exemple est celui du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni du feuilletage F dont les feuilles vérifient l'équation de Pfaff $dy = \vartheta dx$, avec ϑ irrationnel (voir [4], II, n° 5). L'algèbre A_ϑ décrivant ce feuilletage se compose des séries de la forme

$$x = \sum_{m,n} a_{mn} U^m V^n \ ,$$

où la famille (a_{mn}) est à décroissance rapide, et U, V ne commutent pas, mais satisfont à la relation $VU = \lambda UV$ avec $\lambda = e^{2\pi i\vartheta}$. La trace canonique sur A_ϑ associe à l'élément x précédent le terme constant $a_{0,0}$. Enfin, on note ∂_U (resp. ∂_V) l'unique dérivation continue de A_ϑ qui satisfait à $\partial_U(U) = 1$, $\partial_U(V) = 0$ (resp. $\partial_V(U) = 0$, $\partial_V(V) = 1$). Pour calculer la cohomologie de Hochschild (continue) de A_ϑ dans son dual A^*_ϑ, on se ramène, par l'utilisation d'une résolution de bimodules, à calculer l'homologie du complexe suivant :

$$0 \longrightarrow A^*_\vartheta \xrightarrow{d} A^*_\vartheta \times A^*_\vartheta \xrightarrow{d'} A^*_\vartheta \longrightarrow 0 \quad .$$

On a $d(\varphi) = (U\varphi - \varphi U, V\varphi - \varphi V)$ et $d'(\varphi_1,\varphi_2) = (V\varphi_1 - \lambda\varphi_1 V) - (\lambda U\varphi_2 - \varphi_2 U)$. Alors $HC^0(A_\vartheta) = \operatorname{Ker} d$ est de dimension 1, engendré par la trace canonique τ. On en déduit que $HC^2(A_\vartheta)$ est engendré par la suspension $S\tau$ de τ, donnée par $S\tau(x_0,x_1,x_2) = \tau(x_0x_1x_2)$ et par la 2-trace φ donnée par $\varphi(x_0,x_1,x_2) = \tau(x_0\partial_U x_1\partial_V x_2 - x_0\partial_V x_1\partial_U x_2)$. On montre que la suspension S donne des isomorphismes $HC^{2n}(A_\vartheta) \simeq HC^{2n+2}(A_\vartheta)$ pour $n \geq 1$, d'où $H^+_{DR}(A_\vartheta) = HC^2(A_\vartheta)$. On montre aussi que la partie impaire $H^-_{DR}(A_\vartheta)$ est de dimension 2. Ceci n'est pas surprenant, car les feuilles du feuilletage F sont contractiles et l'on s'attend que la cohomologie de $\mathbb{T}^2/F$ soit isomorphe à celle de $\mathbb{T}^2$ (rappelons que l'on a $H^0(\mathbb{T}^2) = H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{C}$ et que $H^1(\mathbb{T}^2)$ est de dimension 2).

1.6. Objets cycliques

Il est d'usage d'appeler Δ la catégorie ayant pour objets les ensembles finis $[n] = \{0,1,\dots,n\}$ (pour $n \geq 0$) et pour morphismes les applications croissantes (au sens large). Si C est une catégorie quelconque, un *objet simplicial* (resp. cosimplicial) dans C est un foncteur contravariant (resp. covariant) de Δ dans C. De manière plus explicite, un tel objet simplicial E est défini par une suite d'objets E_n de C et de morphismes

$$d_i : E_n \longrightarrow E_{n-1} \quad , \quad s_i : E_n \longrightarrow E_{n+1} \qquad \text{(pour } 0 \leq i \leq n)$$

qui satisfont aux relations

(13) $$d_i d_j = d_{j-1} d_i \qquad \text{pour } i < j \ ,$$

(14) $$s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad \text{pour } i \leq j \ ,$$

(15) $$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \ , \\ 1 & \text{si } i \text{ est égal à } j \text{ ou } j+1, \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \ . \end{cases}$$

Lorsque C est la catégorie des modules sur un anneau commutatif k, on dira aussi "$k\Delta$-module" pour "k-module simplicial".

Connes, dans [5], a défini une catégorie Λ contenant Δ comme sous-catégorie, avec les mêmes objets. On appelle *objet cyclique* dans C tout foncteur contravariant de Λ dans C (notre terminologie est plutôt celle de Karoubi dans [19]). De manière plus explicite, un tel objet cyclique est un objet simplicial (E_n,d_i,s_i) muni d'opérateurs $t_n : E_n \longrightarrow E_n$ satisfaisant aux règles suivantes :

(16) $$d_i t_n = t_{n-1} d_{i-1} \quad , \quad s_i t_n = t_{n+1} s_{i-1} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

(17) $$t_n^{n+1} = \mathrm{Id}_{E_n} \ .$$

Considérons alors un k-module cyclique E (dit aussi $k\Lambda$-module). On définit des opérateurs linéaires b et b' de E_n dans E_{n-1} par

$$b = d_0 - d_1 + \dots + (-1)^n d_n \quad , \quad b' = d_0 - d_1 + \dots + (-1)^{n-1} d_{n-1} \ ,$$

puis l'opérateur $t = (-1)^n t_n$ sur E_n et

$$N = 1 + t + \dots + t^n \qquad \text{de } E_n \text{ dans } E_n \ ,$$

et enfin l'opérateur

$$B = (-1)^n(1-t)s_nN \quad \text{de} \quad E_n \quad \text{dans} \quad E_{n+1} .$$

A partir de ces définitions et des relations (13) à (17), on obtient les identités suivantes :

$$bb = 0 \quad , \quad b'b' = 0 \quad , \quad BB = 0 \quad , \quad Bb = -bB \ , \tag{18}$$

$$b(1-t) = (1-t)b' \quad , \quad (1-t)N = N(1-t) = 0 \quad , \quad b'N = Nb = Nd_oN \ . \tag{19}$$

En particulier, la somme directe E_* des E_n , munie de l'opérateur b , est un complexe ; on notera simplement $H_*(E)$ l'homologie de ce complexe. C'est l'homologie du k-module simplicial sous-jacent à E ; d'après un théorème classique de Moore, on a un isomorphisme

$$H_n(E) = \pi_n(|E|) \tag{20}$$

si $|E|$ est la réalisation géométrique de E .

Par ailleurs, compte tenu des relations (18) et (19), on peut définir un bicomplexe $C(E)$

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
E_2 & \xleftarrow{1-t} & E_2 & \xleftarrow{N} & E_2 & \xleftarrow{1-t} & \\
{\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle -b'}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & \\
E_1 & \xleftarrow{1-t} & E_1 & \xleftarrow{N} & E_1 & \xleftarrow{1-t} & \\
{\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle -b'}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & \\
E_o & \xleftarrow{1-t} & E_o & \xleftarrow{N} & E_o & \xleftarrow{1-t} & .
\end{array}$$

L'homologie du complexe total associé sera notée $HC_*(E)$ et dite *homologie cyclique de* E (cette construction est due à Tsigan [23]). Supposons que k contienne comme sous-anneau le corps des nombres rationnels. Alors chaque ligne du diagramme précédent est exacte ; d'après la relation $b(1-t) = (1-t)b'$, l'image de $1-t$ est un sous-complexe de (E_*,b) et l'on a alors

$$HC_*(E) = H_*(E_*/(1-t)E_*,\beta) \tag{21}$$

où β se déduit de b par passage au quotient. De plus, en faisant opérer t_n par permutation circulaire des sommets d'un simplexe, on déduit des opérateurs t_n dans les E_n une relation d'équivalence T dans la réalisation géométrique $|E|$ de E . Notons $|E|^{\mathrm{cycl}}$ l'espace quotient correspondant ("réalisation géométrique de l'ensemble cyclique E"). Alors, *toujours sous l'hypothèse* $\mathbb{Q} \subset k$, on a un isomorphisme

$$HC_n(E) \simeq \pi_n(|E|^{\mathrm{cycl}}) \ . \tag{22}$$

Revenons au cas général. On définit un autre bicomplexe $\mathcal{B}(E)$ en tenant compte de la relation $Bb = -bB$:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
E_2 \arrow[d, "b"'] & E_1 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & E_0 \arrow[l, "B"'] \arrow[d] & \arrow[l] \\
E_1 \arrow[d, "b"'] & E_0 \arrow[l, "B"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
E_0 & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

On a $\mathcal{C}(E)_{mn} = E_n$ et $\mathcal{B}(E)_{mn} = E_{n-m}$ (avec la convention $E_j = 0$ si $j < 0$). On définit un homomorphisme u de $\mathcal{B}(E) = \bigoplus_{m,n} \mathcal{B}(E)_{mn}$ dans $\mathcal{C}(E) = \bigoplus_{m,n} \mathcal{C}(E)_{mn}$ qui envoie $x \in \mathcal{B}(E)_{mn}$ sur l'élément $x + (-1)^n s_n N x$ de $\mathcal{C}(E)_{2m,n-m} \oplus \mathcal{C}(E)_{2m,n-m+1}$. On voit facilement que u est un morphisme des complexes totaux et définit un isomorphisme en homologie. Autrement dit, on peut définir $HC_*(E)$ *comme l'homologie du complexe total* $\Delta\mathcal{B}(E)$ *associé à* $\mathcal{B}(E)$.

Enfin, la construction du complexe $\Delta\mathcal{B}(E)$ fournit aussitôt une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow (E_*,b) \longrightarrow \Delta\mathcal{B}(E) \longrightarrow \Delta\mathcal{B}(E)[-2] \longrightarrow 0 .$$

Par passage à l'homologie, on en déduit le triangle exact

$$\begin{tikzcd}
HC_*(E) \arrow[rr, "S"] & & HC_*(E) \arrow[dl, "B"] \\
& H_*(E) \arrow[ul, "I"] &
\end{tikzcd}$$

(noter que I conserve les degrés, S les diminue de 2 , et B les augmente de 1).

Enfin, soit $k_\natural$ le k-module cyclique dont toutes les composantes sont égales à k , et les opérateurs s_i , d_i et t_n égaux à l'identité. On peut interpréter un k-module cyclique E comme un module à droite sur un anneau $k\Lambda$ convenable, $k_\natural$ comme un $k\Lambda$-module à gauche, et définir des isomorphismes

$$HC_n(E) = \mathrm{Tor}_n^{k\Lambda}(E,k_\natural) .$$

1.7. Homologie cyclique des algèbres

Soit A une k-algèbre. On lui associe un k-module cyclique $A^\natural$ comme suit :

- $A_n^\natural$ est le produit tensoriel $A \otimes \ldots \otimes A$ pris sur k ($n+1$ facteurs)
- on a

$$d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \qquad \text{pour } 0 \leq i < n$$

$$d_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$

- on a

$$s_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \qquad (0 \leq i \leq n)$$

- on a

$$t_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} .$$

L'homologie cyclique de l'objet cyclique $A^\natural$ sera appelée l'*homologie cyclique de* A , et notée $HC_*(A)$. D'après le n° 1.6, on a donc un isomorphisme

$$HC_n(A) \simeq \mathrm{Tor}_n^{k\Lambda}(A^{\natural}, k_{=}) .$$

De manière analogue, on appelle cohomologie cyclique de l'algèbre A, et l'on note $HC^*(A)$ la cohomologie du complexe total associé au dual du bicomplexe $C(A^{\natural})$. On montre sans difficulté que l'on a un isomorphisme (du moins si k est un corps)

$$HC^n(A) \cong \mathrm{Ext}^n_{k\Lambda}(A^{\natural}, k^{\natural}) .$$

Lorsque k est un corps de caractéristique 0, on retrouve la cohomologie cyclique définie au n° 1.3. De plus, les raisonnements généraux sur les objets cycliques permettent de se passer des calculs explicites assez compliqués de Connes, en particulier pour construire le triangle exact (T) du n° 1.4.

On peut utiliser le produit de Yoneda dans les Ext pour définir une multiplication dans $HC^*(k)$ isomorphe à $\mathrm{Ext}^*_{k\Lambda}(k^{\natural}, k^{\natural})$. On montre sans difficulé qu'on obtient une algèbre de polynômes $k[\sigma]$ en un générateur $\sigma \in HC^2(k)$. De là, dans [5], Connes déduit que *l'espace classifiant* $B\Lambda$ *associé à la catégorie* Λ *a le type d'homotopie de* BS^1.

Explicitons *le lien entre l'homologie cyclique et l'homologie de Hochschild.* On considère A comme bimodule sur lui-même en le faisant agir par les multiplications à gauche et à droite. Le complexe de Hochschild de ce A-bimodule sera noté $C_*(A)$; ce n'est autre que le complexe $(A^{\natural}, b)$ et l'homologie $H_*(A^{\natural})$ du groupe simplicial sous-jacent à $A^{\natural}$ n'est autre que l'homologie de Hochschild $H_*(A,A)$. Pour tout entier $n \geq 0$, notons $C_n^{\lambda}(A)$ le quotient de $C_n(A)$ par l'image de $1-t$, engendrée comme k-module par les éléments

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n + (-1)^{n+1} a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} .$$

Sous l'hypothèse $\mathbb{Q} \subset k$, l'homologie cyclique $HC_*(A)$ est l'homologie du complexe $(C_*^{\lambda}(A), \beta)$ où β se déduit de b par passage au quotient. L'homomorphisme canonique de $C_*(A)$ sur $C_*^{\lambda}(A)$ définit un homomorphisme I qui s'insère dans un triangle exact

$$\begin{tikzcd} HC_*(A) \arrow[rr, "S"] & & HC_*(A) \arrow[dl, "B"] \\ & H_*(A,A) \arrow[ul, "I"] & \end{tikzcd} .$$

Faisons maintenant *le lien avec l'homologie de de Rham.* Reprenons l'algèbre différentielle graduée $\Omega(\tilde{A})$ du n° 1.3. Soit $[\Omega(\tilde{A}), \Omega(\tilde{A})]$ le sous-k-module engendré par les commutateurs $\omega\omega' - (-1)^{pq}\omega'\omega$, où ω est de degré p et ω' de degré q ; il est stable par la différentielle d et l'on peut donc définir le complexe quotient $D\Omega(\tilde{A}) = \Omega(\tilde{A})/[\Omega(\tilde{A}), \Omega(\tilde{A})]$. Lorsque A est commutative, le complexe $D\Omega(\tilde{A})$ admet pour quotient le complexe usuel $\Lambda\Omega(\tilde{A})$, à la Kähler-de Rham, des formes différentielles extérieures sur $\tilde{A}$. On définit alors un homomorphisme

$$\mu : \Omega(\tilde{A}) \longrightarrow C_*^{\lambda}(A)$$

qui associe à $(a_0 + \lambda 1) da_1 \ldots da_n$ l'image de $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n$ dans $C_n^{\lambda}(A)$ ($a_i \in A$

pour $0 \leq i \leq n$, $\lambda \in k$). On en déduit par passage aux quotients un homomorphisme ϑ de $H_*(D\Omega(\tilde{A}))$ dans $HC_*(A)$. Lorsque k contient $\mathbb{Q}$, on a une suite exacte

$$0 \to k \to H_*(D\Omega(\tilde{A})) \xrightarrow{\vartheta} HC_*(A) \xrightarrow{B} H_*(A,A) \ .$$

Faisons maintenant l'hypothèse que k est un corps de caractéristique 0 et que A est l'algèbre des fonctions polynômiales sur une variété algébrique X affine lisse sur le corps k . En reprenant le complexe $\mathcal{B}(E)$ introduit au n° 1.6, on voit que $HC_*(A)$ se calcule comme l'homologie du complexe total associé au bicomplexe $\mathcal{B}(A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_2(A) & \xleftarrow{B} & C_1(A) & \xleftarrow{B} & C_0(A) & \longleftarrow & \\
b\downarrow & & b\downarrow & & \downarrow & & \\
C_1(A) & \xleftarrow{B} & C_0(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \\
b\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
C_0(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & .
\end{array}$$

On a par définition $C_n(A) = A \otimes \ldots \otimes A$ ($n+1$ facteurs), et l'on peut définir un homomorphisme $\mu : C_n(A) \longrightarrow \Lambda^n\Omega(A)$ par

$$\mu(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \frac{1}{n!} a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_n \ . \tag{23}$$

On peut alors déduire de μ un homomorphisme μ_* du bicomplexe $\mathcal{B}(A)$ dans le bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Lambda^2\Omega(A) & \xleftarrow{d} & \Lambda^1\Omega(A) & \xleftarrow{d} & \Lambda^0\Omega(A) & \longleftarrow & \\
0\downarrow & & 0\downarrow & & \downarrow & & \\
\Lambda^1\Omega(A) & \longleftarrow & \Lambda^0\Omega(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \\
0\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Lambda^0\Omega(A) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & .
\end{array}$$

On démontre alors que μ_* induit un isomorphisme en homologie, d'où un isomorphisme de $HC_n(A)$ avec

$$\Lambda^n\Omega(A)/d\Lambda^{n-1}\Omega(A) \oplus H^{n-2}_{DR}(A) \oplus H^{n-4}_{DR}(A) \oplus \ldots \ .$$

On a noté $H^*_{DR}(A)$ l'homologie du complexe $(\Lambda\Omega(A),d)$. Finalement, on en déduit que le noyau de $S-1$ agissant dans $\prod_i HC^i(A)$ s'identifie à la cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(A)$ de A ; noter l'analogie avec le résultat de Connes sur la cohomologie cyclique de l'algèbre $C^\infty(X)$ (voir n° 1.5).

PROBLÈME.– Quel lien existe-t-il entre l'homologie cyclique et le complexe de de Rham-Witt en caractéristique p ?

1.8. Le caractère de Chern

Dans [4], II, Connes définit pour toute algèbre A des accouplements entre $K_0(A)$ et $HC^{2n}(A)$, compatibles aux homomorphismes de suspension $S : HC^{2n}(A) \longrightarrow HC^{2n+2}(A)$. Par passage à la limite inductive, on en déduit un accouplement entre $K_0(A)$ et $H^+_{DR}(A)$. En suivant Karoubi [19], I, on peut donner la version suivante en *homologie cyclique*. On fait l'hypothèse $\mathbb{Q} \subset k$.

Soit donc A une k-algèbre avec élément unité. Notons $M_r(A)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans A. Soient E un A-module projectif de type fini et $n \geq 1$ un entier ; il existe un entier $r \geq 1$ et un idempotent p dans $M_r(A) = \mathrm{End}(A^r)$ tel que E soit isomorphe à l'image pA^r de p. Associons à p l'image de $p \otimes \ldots \otimes p$ dans le groupe $C^\lambda_{2n}(M_r(A))$. C'est un cycle, dont la classe d'homologie est un élément $[p]$ de $HC_{2n}(M_r(A))$. Or, on a une *invariance de Morita de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique* ; de manière précise, pour tout entier i, on note Tr_i l'application linéaire de $C_i(M_r(A))$ dans $C_i(A)$ qui applique $(x_0 \otimes a_0) \otimes \ldots \otimes (x_i \otimes a_i)$ sur $\mathrm{Tr}(x_0 \ldots x_i).a_0 \otimes \ldots \otimes a_i$ (on identifie $M_r(A)$ à $M_r(k) \otimes A$, et l'on suppose que les x_j appartiennent à $M_r(k)$ et les a_j à A). Or par passage à l'homologie, Tr_i définit des isomorphismes

$$\mathrm{Tr}_i : H_i(M_r(A), M_r(A)) \simeq H_i(A,A) ,$$
$$\mathrm{Tr}^\lambda_i : HC_i(M_r(A)) \simeq HC_i(A) .$$

En reprenant les notations ci-dessus, on montre qu'il existe un homomorphisme Ch^n_0 de $K_0(A)$ dans $HC_{2n}(A)$ qui associe à E l'image de $[p] \in HC_{2n}(M_r(A))$ par Tr^λ_{2n}. De plus, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & HC_{2n}(A) \arrow[d, "S"] \\ K_0(A) \arrow[ur, "\mathrm{Ch}^n_0"] \arrow[r, "\mathrm{Ch}^{n-1}_0"'] & HC_{2n-2}(A) \end{tikzcd} .$$

Connes construit aussi des homomorphismes analogues pour $K_1(A)$. Nous suivons de nouveau Karoubi en étendant cette construction aux groupes $K_i(A)$ de Quillen [16] dont nous rappelons la définition. Considérons (comme au n° 1.2) le groupe discret $G = GL(A)$, réunion des groupes $GL_r(A)$ pour $r = 1,2,\ldots$. Introduisons l'espace classifiant BG ; c'est un espace dont le groupe fondamental est isomorphe à G, et dont le revêtement universel est contractile. Par suite, on a $H_i(BG,\mathbb{Z}) = H_i(G,\mathbb{Z})$ pour tout entier $i \geq 0$. On peut prendre pour BG la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial ; en lui appliquant la construction $^+$ de Quillen, par adjonction de cellules de dimension 2 et 3, on obtient un espace BG^+ et une application continue $\vartheta : BG \longrightarrow BG^+$. Alors ϑ induit des isomorphismes de $H_i(BG,\mathbb{Z})$ sur $H_i(BG^+,\mathbb{Z})$ et un homomorphisme surjectif de $\pi_1(BG) = G$ sur $\pi_1(BG^+)$ dont le noyau est le groupe des commutateurs de G. D'après Quillen, on pose

$$K_i(A) = \pi_i(BG^+) .$$

L'homomorphisme de Hurewicz de $\pi_i(BG^+)$ dans $H_i(BG^+)$ est donc un homomorphisme

$$h_i : K_i(A) \longrightarrow H_i(G,\mathbb{Z}) .$$

Par ailleurs, pour tout entier $r \geq 1$, le groupe $GL_r(A)$ se compose des éléments inversibles de l'algèbre $M_r(A)$. On a donc un homomorphisme d'algèbres de $k[GL_r(A)]$ dans $M_r(A)$; prenant l'homomorphisme induit en homologie cyclique, puis utilisant l'invariance de Morita de l'homologie cyclique, et passant à la limite inductive, on obtient des homomorphismes

$$\varphi_m : HC_m(k[G]) \longrightarrow HC_m(A) .$$

Pour achever de définir le caractère de Chern, il suffit de construire des homomorphismes

$$\vartheta_{i,n} : H_i(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow HC_{i+2n}(k[G])$$

et de prendre le composé

$$K_i(A) \xrightarrow{h_i} H_i(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\vartheta_{i,n}} HC_{i+2n}(k[G]) \xrightarrow{\varphi_{i+2n}} HC_{i+2n}(A) .$$

Or, le modèle simplicial de BG a pour simplexes en dimension n les systèmes $[g_0,g_1,\dots,g_n]$, avec la relation d'équivalence

(24) $$[gg_0,gg_1,\dots,gg_n] = [g_0,g_1,\dots,g_n] .$$

Les opérateurs de face sont donnés par exemple par

(25) $$d_i[g_0,\dots,g_n] = [g_0,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots,g_n]$$

mais on a aussi des opérateurs cycliques

(26) $$t[g_0,\dots,g_n] = [g_n,g_0,\dots,g_{n-1}] .$$

Prenant le complexe des chaînes à coefficients dans k , on obtient un k-module cyclique, dont on note $HC_*(G,k)$ l'homologie cyclique. Or on établit un isomorphisme entre $HC_n(G,k)$ et la somme directe des $H_{n-2j}(G,k)$, d'où un homomorphisme

$$\eta_{i,n} : H_i(G,k) \longrightarrow HC_{i+2n}(G,k) .$$

Pour définir $\vartheta_{i,n}$ il suffit de prendre le composé

$$H_i(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(G,k) \xrightarrow{\eta_{i,n}} HC_{i+2n}(G,k) \xrightarrow{\alpha_{i+2n}} HC_{i+2n}(k[G])$$

où $\alpha_p : HC_p(G,k) \longrightarrow HC_p(k[G])$ se déduit de l'application

$$[g_0,\dots,g_p] \longmapsto g_p^{-1}g_0 \otimes g_0^{-1}g_1 \otimes \dots \otimes g_{p-1}^{-1}g_p .$$

Comme on s'y attend maintenant, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & HC_{i+2n}(A) \arrow[d, "S"] \\ K_i(A) \arrow[ur, "Ch_i^n"] \arrow[r, "Ch_i^{n-1}"'] & HC_{i+2n-2}(A) \end{tikzcd} .$$

Lorsque k contient $\mathbb{Q}$, l'image de S est égale à celle de ϑ (voir au n° 1.7) et par suite le caractère de Chern prend ses valeurs dans l'homologie de $D\Omega(\tilde{A})$. Plus particulièrement, si A est commutative, on en déduit un caractère de Chern à valeurs dans l'homologie de de Rham de A .

§ 2. APPLICATIONS DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE

2.1. Homologie des algèbres de Lie

On considère un corps k de caractéristique 0. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur le corps k, on définit ses groupes d'homologie par

$$H_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Tor}_n^{U(\mathfrak{g})}(k,k)$$

où $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}$ agit par 0 sur k. Ces groupes se calculent par un complexe $(\Lambda\mathfrak{g},d)$ où d agit dans l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$ par

$$(27) \qquad d(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j}[x_i,x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_n$$

(on emploie la convention usuelle : le signe $\widehat{\ }$ indique d'omettre le terme correspondant). Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $H_*(\mathfrak{g})$ est une bigèbre ; elle est donc l'algèbre anticommutative universelle sur l'espace $\mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{g})$ des éléments primitifs (théorème de Hopf). Cela reste vrai dans la situation ci-dessous.

Nous allons, en suivant Loday et Quillen [22] et aussi Tsigan [23], identifier l'espace $\mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{g})$ dans un cas important. Soit A une algèbre sur le corps k, et soit $M(A)$ l'algèbre associative des matrices infinies $(a_{ij})_{i\geq 1, j\geq 1}$ ayant un nombre fini de termes non nuls ; pour le crochet usuel $[a,b] = ab - ba$, c'est une algèbre de Lie qu'on note $\mathfrak{gl}(A)$; elle est réunion de la suite croissante des algèbres de Lie $\mathfrak{gl}_r(A)$ formée des matrices $r \times r$. Soit $r \geq 1$ un entier ; on définit une application linéaire λ de $\otimes^{n+1}\mathfrak{gl}_r(A)$ dans $C_n(M_r(A))$ qui associe à $x_0 \otimes \ldots \otimes x_n$ l'élément $(-1)^n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_0 \otimes x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$. Composons λ avec la trace Tr_n de $C_n(M_r(A))$ dans $C_n(A)$, puis avec l'application canonique de $C_n(A)$ sur $C_n^\lambda(A)$. En passant à la limite inductive sur r, on a finalement un homomorphisme de complexes

$$\Lambda : (\Lambda\mathfrak{gl}(A),d)[+1] \longrightarrow C_*^\lambda(A) .$$

Le résultat fondamental est que Λ *induit des isomorphismes*

$$\Lambda_n : \mathrm{Prim}\, H_{n+1}(\mathfrak{gl}(A)) \longrightarrow HC_n(A) .$$

De plus, pour tout entier $m \geq n$, *les applications canoniques*

$$H_n(\mathfrak{gl}_n(A)) \longrightarrow H_n(\mathfrak{gl}_m(A)) \longrightarrow H_n(\mathfrak{gl}(A))$$

sont des isomorphismes (stabilité de l'homologie) *si* A *est commutative, et alors on a une suite exacte*

$$H_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A)) \longrightarrow H_n(\mathfrak{gl}_n(A)) \longrightarrow \Lambda^{n-1}\Omega(A)/d\Lambda^{n-2}\Omega(A) \rightarrow 0 .$$

La démonstration se fait en trois étapes :

a) La théorie classique des invariants de H. Weyl et I. Schur fournit un isomorphisme du module des coinvariants

$$H_0(\mathfrak{gl}_r(k), \underbrace{\mathfrak{gl}_r(k) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{gl}_r(k)}_{n \text{ facteurs}})$$

avec l'algèbre $k[\mathfrak{S}_n]$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, chaque fois que $r \geq n$.

b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_r(A)$ s'identifie à $\mathfrak{gl}_r(k) \otimes A$; comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_r(k)$ est réductive, on peut pour calculer l'homologie de $\mathfrak{gl}_r(A)$ remplacer le complexe $(\Lambda(\mathfrak{gl}_r(k) \otimes A),d)$ par l'ensemble de ses coinvariants sous l'action de $\mathfrak{gl}_r(k)$ [1].

c) Compte tenu de a), la partie primitive (au sens du coproduit) de ce dernier complexe de coinvariants est naturellement isomorphe au complexe cyclique $C_*^\lambda(A)$.

2.2. Extensions universelles d'algèbres de Lie

A titre de comparaison, rappelons d'abord quelques propriétés des extensions centrales de groupes. Soit G un groupe égal à son groupe des commutateurs ; il existe alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(G;\mathbb{Z}) \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

avec les propriétés suivantes :

a) le noyau de π est contenu dans le centre de E ;

b) si $\pi' : E' \to G$ est un homomorphisme surjectif de groupes, et si le noyau de π' est contenu dans le centre de E', il existe alors un unique homomorphisme $u : E \to E'$ tel que $\pi = \pi' \circ u$.

Revenons au groupe $GL(A)$ associé à un anneau A quelconque. Le groupe des commutateurs de $GL(A)$ se note $E(A)$; c'est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires (avec 1 sur la diagonale et un seul élément non nul hors de la diagonale). Le groupe $E(A)$ est égal à son groupe des commutateurs, et l'on a

$$GL(A)/E(A) = K_1(A) \quad , \quad H_2(E(A);\mathbb{Z}) = K_2(A) .$$

On a donc une extension centrale universelle

$$0 \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow St(A) \longrightarrow E(A) \longrightarrow 1 ;$$

le groupe $St(A)$ s'appelle le *groupe de Steinberg*. On a aussi

$$H_3(St(A);\mathbb{Z}) = K_3(A) .$$

Passons aux algèbres de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un anneau commutatif k, on a $H_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Supposons que l'application linéaire $\vartheta : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui envoie $x \wedge y$ sur $[x,y]$ admette une section linéaire ; cette hypothèse entraîne qu'on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, et réciproquement elle est satisfaite si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}$ est projectif sur k. Alors il existe une extension centrale d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow H_2(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0 ,$$

universelle au même sens que ci-dessus.

Avant de continuer, faisons quelques remarques sur les groupes d'homologie cycliques $HC_0(A)$ et $HC_1(A)$. Soit $[A,A]$ le sous-k-module de A engendré par les

[1] Le cas où $k = A$ est bien connu et remonte en principe à E. Cartan en 1936. Il a été explicité par Chevalley et Eilenberg en 1948.

commutateurs $[a,b] = ab - ba$; alors $HC_0(A)$ est isomorphe à $A/[A,A]$. Introduisons aussi le conoyau $\Gamma(A)$ de la différentielle $\beta : C_2^\lambda(A) \longrightarrow C_1^\lambda(A)$; comme k-module, il est engendré par des symboles $\langle a,b\rangle$, où a et b parcourent A , bilinéaires en a , b , et satisfaisant aux relations

$$\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = 0 \quad , \quad \langle a,bc\rangle + \langle b,ca\rangle + \langle c,ab\rangle = 0 \; . \tag{28}$$

Par définition de $HC_1(A)$, on a une suite exacte

$$0 \to HC_1(A) \longrightarrow \Gamma(A) \xrightarrow{\gamma} [A,A] \to 0$$

avec $\gamma\langle a,b\rangle = ba - ab$.

Soit $r \geq 1$ un entier. On définit l'application linéaire T de $\mathfrak{gl}_r(A)$ dans $A/[A,A]$ qui associe à la matrice (x_{ij}) l'image de la trace $\sum_i x_{ii}$ modulo $[A,A]$. On note $\mathfrak{sl}_r(A)$ le noyau de T . Alors $\mathfrak{sl}_r(A)$ est l'algèbre de Lie dérivée de $\mathfrak{gl}_r(A)$, d'où un isomorphisme

$$H_1(\mathfrak{gl}_r(A)) \simeq HC_0(A) \qquad \text{(pour } r \geq 1 \text{).}$$

Notons maintenant $\mathfrak{gt}_r(A)$ le k-module $\mathfrak{gl}_r(A) \times \Gamma(A)$ muni de la loi de composition bilinéaire suivante

$$[(x,\gamma),(x',\gamma')] = ([x,x'], \sum_{i,j} \langle x_{ij}, x'_{ji}\rangle) \; . \tag{29}$$

Il s'en faut de peu que $\mathfrak{gt}_r(A)$ ne soit une algèbre de Lie sur k : on a en effet $[u,v] = -[v,u]$ et l'identité de Jacobi

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

mais on n'est pas assuré d'avoir $[u,u] = 0$ (sauf bien sûr, si 2 est inversible dans k). Notons $\mathfrak{st}_r(A)$ le noyau de l'homomorphisme (Tr,γ) de $\mathfrak{gt}_r(A)$ dans A ; pour l'opération précédente, c'est une algèbre de Lie, c'est-à-dire qu'on a bien $[u,u] = 0$ pour u dans $\mathfrak{st}_r(A)$. On peut résumer ces constructions dans le diagramme commutatif suivant, à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{sl}_r(A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{gl}_r(A) \arrow[r, "T"] \arrow[u] & A/[A,A] \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{st}_r(A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{gt}_r(A) \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & HC_1(A) \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u] & [A,A] \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \; .$$

Loday et Kassel, dans [28], ont prouvé le résultat suivant :

a) *Lorsque l'on a* $r \geq 3$ *, l'algèbre de Lie* $\mathfrak{st}_r(A)$ *est engendrée par des générateurs* $u_{ij}(a)$ (pour $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$, $i \neq j$, $a \in A$), *linéaires par rapport à* a *et soumis aux relations*

(30) $$[u_{ij}(a), u_{k\ell}(b)] = \delta_{jk} u_{i\ell}(ab) \ .$$

b) *Lorsqu'on a* $r \geq 5$, *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{st}_r(A)$ *est une extension centrale universelle de* $\mathfrak{sl}_r(A)$.

En corollaire, supposons ou bien qu'on ait $r \geq 2$ et que 2 soit inversible dans k , ou bien qu'on ait $r \geq 5$ et que $[A,A]$ soit un k-module projectif. Alors *on a un isomorphisme*

$$H_2(\mathfrak{sl}_r(A)) \simeq HC_1(A) \ .$$

Lorsque A est commutative, on a $[A,A] = 0$, d'où $HC_1(A) = \Gamma(A)$, et l'application $a.db \longmapsto \langle a,b \rangle$ définit un isomorphisme de $\Omega_{A/k}/dA$ sur $\Gamma(A)$ (on note $\Omega_{A/k}$ le module des différentielles de Kähler de l'algèbre A). Supposons de plus que 2 soit inversible dans k . Alors le résultat précédent donne un isomorphisme

$$H_2(\mathfrak{sl}_r(A)) \simeq \Omega^1_{A/k}/dA \qquad (r \geq 2).$$

Il se déduit par passage aux quotients de l'homomorphisme

$$x \wedge y \longmapsto \mathrm{Tr}(xdy)$$

de $\Lambda^2\mathfrak{sl}_r(A)$ dans $\Omega_{A/k}$. Ce cas particulier est dû à Bloch [24]. Plus particulièrement encore, supposons que A soit l'algèbre $k[t,t^{-1}]$ des polynômes en t et t^{-1} ; alors le résidu des formes différentielles définit un isomorphisme de $\Omega_{A/k}/dA$ avec k . Dans ce cas, on a donc une extension centrale universelle

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathfrak{st}_r(k[t,t^{-1}]) \longrightarrow \mathfrak{sl}_r(k[t,t^{-1}]) \longrightarrow 0 \quad ;$$

on peut montrer qu'il s'agit d'une des algèbres de Kac-Moody (voir Garland [25]).

Remarque.– Sous des hypothèses très peu restrictives, Kassel vient de définir dans [27] des isomorphismes

$$H_2(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}} A) \simeq \Omega_{A/k}/dA$$

où $\mathfrak{g}$ est l'une des formes sur $\mathbb{Z}$ définies par Chevalley des algèbres de Lie semi-simples complexes, et A une k-algèbre commutative ; on considère $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ comme algèbre de Lie *sur* k . Le cas particulier $A = k[t,t^{-1}]$ a été antérieurement traité par Garland [25].

2.3. La K-théorie algébrique des espaces topologiques

Commençons par quelques rappels sur l'homotopie rationnelle des espaces. Soit d'abord M une variété compacte de classe C^∞ ; une *pseudo-isotopie* de M est un difféomorphisme f de $M \times I$ (avec $I = [0,1]$) tel que $f(x,0) = x$ pour tout $x \in M$. On note $P(M)$ l'espace de ces pseudo-isotopies. On définit facilement une suspension $\Sigma : P(M) \longrightarrow P(M \times I)$, ce qui permet de définir la limite inductive $\mathcal{P}(M)$ des espaces $P(M \times I^k)$. Il est important de pouvoir calculer les groupes d'homotopie stables $\pi_i(\mathcal{P}(M))$. Waldhausen [33] construit un espace $A(M)$ et un isomorphisme de $\pi_i^{\mathbb{Q}}(A(M))$ avec $\pi_{i-2}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}(M)) \times H_i(M;\mathbb{Q})$ (on pose $\pi_i^{\mathbb{Q}}(X) = \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ pour tout espace topologique X). Le problème est donc transféré en celui du calcul de l'homotopie rationnelle de $A(M)$ (qui est la même pour diverses constructions de cet espace).

Or la définition de $A(X)$ dépend en général de l'espace des lacets. Commençons par le cas simple où X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi,1)$; autrement dit, on a $\pi_1(X) = \pi$ et $\pi_i(X) = 0$ pour $i \neq 1$. Alors $A(X)$ n'est autre que l'espace BG^+ déjà considéré plus haut, où $G = GL(\mathbb{Z}[\pi])$; les groupes d'homotopie $K_i(X) = \pi_i(A(X))$ ne sont autres que les groupes de Quillen $K_i(\mathbb{Z}[\pi])$, et en particulier, on a $K_i(X) = K_i(\mathbb{Z})$ si X est réduit à un point (d'où $\pi = \{1\}$). On sait que les groupes $K_0(\mathbb{Z}[\pi])$ et $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ ont joué un rôle important dans la genèse de la K-théorie algébrique et qu'ils interviennent dans la théorie du type d'homotopie simple de Whitehead.

Passons à l'autre cas, celui d'un espace simplement connexe X muni d'un point base x_0. Considérons l'espace ΩX des lacets de X basés en x_0 ; ce n'est pas un groupe topologique, mais Kan a construit un groupe simplicial GX qui a le même type d'homotopie que ΩX. Alors $A = \mathbb{Q}[GX]$ est un *anneau simplicial* ; on introduit ensuite le monoïde simplicial $\widetilde{GL}(A)$ des matrices inversibles à homotopie près, d'où une version simpliciale de l'espace classifiant $BGL(A)$; on peut lui appliquer la construction $^+$ de Quillen. Alors $A(X)$ a le type d'homotopie de la réalisation géométrique de $BGL(A)^+$; on pose encore $K_i(X) = \pi_i(A(X))$ et l'on note $\widetilde{K}_i(X)$ le groupe quotient $K_i(X)/K_i(x_0)$.

Il s'agit de donner des moyens de calculer ces groupes, autrement que par leur définition. Pour cela considérons le groupe $C_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ des chaînes à coefficients rationnels de l'espace des lacets ΩX. Comme ΩX est un H-espace, on peut définir un produit (de Pontrjagin) des chaînes de ΩX et obtenir une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle graduée [ATTENTION : dans tout ce numéro, la différentielle est de degré -1]. Un modèle rationnel pour ΩX est n'importe quelle $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle graduée connexe munie d'un homomorphisme $K \longrightarrow C_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ compatible avec toutes les structures, et induisant un isomorphisme sur les groupes d'homologie (autrement dit, ce qu'il est d'usage d'appeler un quasi-isomorphisme). En fait, il ressort des travaux de Quillen[1] qu'on a une équivalence entre la catégorie des $\mathbb{Q}$-coalgèbres cocommutatives, différentielles, graduées et 1-connexes[2], à quasi-isomorphisme près, et celle des espaces topologiques pointés simplement connexes, à équivalence d'homotopie rationnelle près.

Choisissons donc K comme ci-dessus, et notons $\overline{K}$ l'idéal des éléments de degré > 0. Si l'on prend pour K un modèle minimal, on peut supposer que K est l'algèbre tensorielle sur un espace vectoriel V sur $\mathbb{Q}$, avec une différentielle "tordue". Comme $\overline{K}$ est une algèbre associative (sans élément unité en général), on peut considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\overline{K})$, qui hérite de la différentielle de $\overline{K}$. On peut modifier la définition de l'homologie des algèbres de Lie, de manière à définir l'hyperhomologie $hH_*(\mathfrak{gl}(\overline{K}))$.

Le premier résultat important est dû à Dwyer, Hsiang et Staffeldt [30] et indé-

---

(1) Voir son article aux Annals of Mathematics, <u>90</u>(1969), p. 205-295, sur l'homotopie rationnelle.

(2) La coalgèbre graduée C est 1-connexe si l'on a $C_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i = 1$, et $C_0 = \mathbb{Q}$.

pendamment à Burghelea :

Soit K *un modèle rationnel pour l'algèbre des chaînes singulières de* ΩX . *Alors* $\widetilde{K}_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ *est isomorphe à la partie primitive (au sens des bigèbres) du module des coinvariants de* $\mathfrak{gl}(\mathbb{Q})$ *agissant par la représentation adjointe sur l'hyperhomologie* $hH_*(\mathfrak{gl}(\overline{K}))$.

L'étape suivante est due à Hsiang et Staffeldt [31] :

Avec les notations précédentes, supposons que K *soit, comme algèbre, isomorphe à une algèbre tensorielle* $T(V)$ *, où* V *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{Q}$. *Soit*

$$T : \mathfrak{gl}(\overline{K}) \longrightarrow \overline{K}/[\overline{K},\overline{K}]$$

la trace définie comme au n° 2.2. *Alors* T *induit un isomorphisme des coinvariants de* $\mathfrak{gl}(\mathbb{Q})$ *dans* $hH_*(\mathfrak{gl}(\overline{K}))$ *sur l'hyperhomologie* $hH_*(\overline{K}/[\overline{K},\overline{K}])$ *de l'algèbre de Lie commutative graduée* $\overline{K}/[\overline{K},\overline{K}]$.

Le dernier acte vient d'être joué par Burghelea et aussi par Staffeldt. Il s'agit de faire intervenir l'homologie cyclique. Tout d'abord, il s'agit d'étendre la notion d'homologie cyclique au cas d'une algèbre différentielle graduée A sur un anneau commutatif k . Pour cela, on remarque que l'on sait définir le produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées. Par suite $A^\natural$ est un objet cyclique de la catégorie des modules différentiels gradués. Les deux bicomplexes $\mathcal{C}(A^\natural)$ et $\mathcal{B}(A^\natural)$ définis au n° 1.7 héritent donc d'une troisième différentielle, et l'on doit prendre le complexe total dont la différentielle est la somme de trois termes. L'homologie ainsi obtenue sera notée $hHC_*(A)$.

Voici maintenant le résultat fondamental, tel qu'il est formulé par Burghelea dans une lettre à Connes :

a) *Soit* $f : A \to B$ *un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles graduées. L'homomorphisme induit est un isomorphisme de* $hHC_*(A)$ *sur* $hHC_*(B)$ *(l'anneau de base* k *est un corps).*

Soient X *un espace pointé simplement connexe et* $f : A \longrightarrow C_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ *un quasi-isomorphisme de* $\mathbb{Q}$*-algèbres différentielles graduées. Alors* f *induit un isomorphisme de* $\widetilde{K}_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ *sur* $hHC_{i-1}(A)$ *pour tout* $i \geq 1$.

La démonstration n'est qu'une extension fastidieuse des résultats de Connes, et Loday-Quillen, au cas des algèbres différentielles, et redonne les résultats précédemment notés de Hsiang et Staffeldt.

2.4. Autres applications de l'homologie cyclique

a) Dans [4], I, Connes a montré comment définir un caractère de Chern en K-homologie (cette dernière au sens de Kasparov[1]). C'est un homomorphisme de $K^0(A)$ dans $H_{DR}^+(A)$, où A est une sous-algèbre dense d'une algèbre stellaire. En utilisant l'accouplement de Kasparov entre $K_0(A)$ et $K^0(A)$, Connes déduit de là un théorème de l'indice, généralisant les résultats de Pimsner et Voiculescu.

[1] Voir l'exposé récent de Fack au Séminaire Bourbaki (année 1982-83, exposé n° 605).

b) Dans [6], Connes a montré comment définir une classe de n-traces sur une algèbre stellaire, non bornées au sens des opérateurs non bornés d'espaces de Hilbert. Il déduit de là une description géométrique, en termes de cobordisme, d'une partie importante du groupe $K^*(V/F)$ de K-théorie associé à une variété V munie d'un feuilletage F . Il interprète aussi dans sa théorie la classe de Godbillon-Vey.

c) Soit X une variété algébrique sur un corps k . Si X n'est pas affine, l'homologie cyclique de l'anneau des fonctions régulières n'est pas très intéressante. On peut par contre définir un faisceau de complexes de la forme $U \longmapsto C_*^\lambda(\Gamma(U,\mathcal{O}_X))$ où U parcourt l'ensemble des ouverts de X (pour la topologie de Zariski). Lorsque k est de caractéristique 0 et X lisse, ce faisceau de complexes (ou complexe de faisceaux) est quasi-isomorphe à une somme directe de complexes de de Rham tronqués

$$0 \to \Omega^0_{X/k} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} \Omega^i_{X/k} \to 0 .$$

De tels complexes ont été utilisés par Deligne [36], Bloch [35] et Beilinson [34] pour définir des régulateurs supérieurs. La théorie des classes de Chern a été développée par Gillet [38] dans ce cadre. Il resterait à jouer à fond le jeu de l'homologie cyclique.

d) Déjà, dans la situation précédente, le dilogarithme joue un rôle inattendu. Pour un lien entre des sujets aussi divers que le dilogarithme, l'égalité par décomposition des polyèdres, la cohomologie continue du groupe $SL_3(\mathbb{C})$, et le groupe K_2 des corps, on pourra consulter l'article de Dupont et Sah [37].

BIBLIOGRAPHIE

A. A tout seigneur, tout honneur. Voici les références à Connes :

[1] A. CONNES - *Feuilletages et algèbres d'opérateurs*, Sém. Bourbaki 1979-80, exposé n° 551, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 842(1981), 139-155.

[2] A. CONNES - *C*-algèbres et géométrie différentielle*, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, vol. 290(1980), 599-604.

[3] A. CONNES - *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. Pure Math. 38(1982), part I, 521-628, Amer. Math. Soc., Providence.

[4] A. CONNES - *Non commutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in K-homology ; Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra*, prépublications I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, oct. 1982 et mars 1983.

[5] A. CONNES - *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, vol. 296(1983), 953-958.

[6] A. CONNES - *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, prépublication I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, déc. 1983.

[7] A. CONNES and G. SKANDALIS - *The longitudinal index theorem for foliations*, prépublication I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1982.

[8] P. BAUM and A. CONNES - *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, pré-publication I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, nov. 1982.

[9] P. BAUM and A. CONNES - *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes*, prépublication I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, sept. 1983.

B. Ouvrages de référence sur la K-théorie :

[10] M. ATIYAH - K-theory, Benjamin, New York, 1967.

[11] M. ATIYAH - *Power operations in K-theory*, Quart. J. Math. Oxford (2) 17(1966), 165-193 (reproduit comme appendice dans [10]).

[12] H. BASS - Algebraic K-theory, Benjamin, New York, 1968.

[13] R. BOTT - Lectures on K(X), Benjamin, New York, 1969.

[14] M. KAROUBI - K-theory, an introduction, Springer-Verlag, 1978.

[15] J. MILNOR - Introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Studies 72, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[16] D. QUILLEN - Higher algebraic K-theory, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 341(1973), 85-147.

[17] R. WOOD - *Banach algebras and Bott periodicity*, Topology 4(1966), 371-389.

C. Quelques sources pour l'homologie cyclique :

[18] M. KAROUBI - *Homologie cyclique des groupes et des algèbres*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, vol. 297(1983), 381-384.

[19] M. KAROUBI - *Homologie cyclique et K-théorie algébrique, I et II* , C.R. Acad. Sci. Paris, série I, vol. 297(1983), 447-450 et 513-516.

[20] M. KAROUBI - *Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, vol. 297(1983), 557-560.

[21] M. KAROUBI - *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique*, Canadian Math. Soc. Proc., vol. 2, part I(1982), 19-27.

[22] J.L. LODAY and D. QUILLEN - *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*, à paraître (voir aussi C.R. Acad. Sci. Paris, série I, vol. 296(1983), 295-297).

[23] B.L. TSIGAN - *Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Math. Nauk vol. 38(1983), 217-218.

D. Homologie des algèbres de Lie

[24] S. BLOCH - *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, in Algebraic K-theory, Evanston 1980, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 854(1981), 1-23.

[25] H. GARLAND - *The arithmetic theory of loop groups*, Publ. Math. I.H.E.S. 52(1980), 5-136.

[26] C. KASSEL - *Calcul algébrique de l'homologie de certains groupes de matrices*, J. Alg. 80(1983), 235-260.

[27] C. KASSEL - *Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra*, à paraître.

[28] C. KASSEL et J.-L. LODAY - *Extensions centrales d'algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier 32(1982), 119-142.

E. K-théorie algébrique des espaces :

[29] D. BURGHELEA - *Cyclic homology and the K-theory of spaces I*, à paraître.

[30] W.G. DWYER, W.C. HSIANG and R.E. STAFFELDT - *Pseudo-isotopy and invariant theory I*, Topology 19(1980), 367-385.

[31] W.C. HSIANG and R.E. STAFFELDT - *A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces*, Invent. Math. 68(1982), 227-239.

[32] R.E. STAFFELDT - *Rational algebraic K-theory of topological spaces and cyclic homology*, à paraître.

[33] F. WALDHAUSEN - *Algebraic K-theory of topological spaces I*, Proc. Symp. Pure Math. 32(1978), 35-60.

F. Applications diverses :

[34] A.A. BEILINSON - *Higher regulators and values of L-functions* (en russe), traduction anglaise à paraître.

[35] S. BLOCH and D. RAMAKRISHNAN - *Heisenberg group bundles and the regulator map for curves*, à paraître.

[36] P. DELIGNE - *Le symbole modéré*, note manuscrite du 25/07/79.

[37] J.L. DUPONT and C.H. SAH - *Scissor congruences II*, J. Pure Appl. Algebra 25(1982), 159-195.

[38] H. GILLET - *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. in Math. 40(1981), 203-289.

[39] J.W. MILNOR - *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), 9-24.

[40] J.W. MILNOR - *On polylogarithms, Hurwitz zeta functions and the Kubert identities*, Ens. Math. 29(1983), 281-322.

Pierre CARTIER
École Polytechnique
Centre de Mathématiques Pures
F-91128 PALAISEAU CEDEX