CHRISTOPHE SOULÉ

K_2 et le groupe de Brauer

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 601, p. 79-93
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__79_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 601   Novembre 1982

K_2 ET LE GROUPE DE BRAUER
[d'après A.S. Merkurjev et A.A. Suslin]

par Christophe SOULÉ

Notation.— Si A est un groupe abélien et $n > 0$ un entier, on note ${}_nA$ (resp. A/n) le noyau (resp. le conoyau) de la multiplication par n dans A .

I. Énoncé du résultat principal

I.1. Cohomologie galoisienne

Soit F un corps, $\overline{F}$ une clôture séparable de F , $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F , et M un G-module dont tout élément est fixé par un sous-groupe ouvert d'indice fini de G . La cohomologie galoisienne $H^k(F,M)$ de F à coefficients dans M , est, par définition, la cohomologie continue du groupe profini G à coefficients dans M [16], [21]. En particulier, on note $\mathbb{G}_m = \overline{F}^*$ le G-module des éléments inversibles de $\overline{F}$ et μ_n le sous-groupe ${}_n\overline{F}^*$ de $\overline{F}^*$. Si n est inversible dans F on a une suite exacte de G-modules (suite exacte de Kummer) :

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\times n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

d'où on tire une suite exacte longue en cohomologie. Mais le Théorème 90 de Hilbert affirme $H^1(F,\mathbb{G}_m) = 0$. On a donc des isomorphismes

$$H^1(F,\mu_n) \simeq H^0(F,\mathbb{G}_m)/n = F^*/n$$

et

$$H^2(F,\mu_n) \simeq {}_nH^2(F,G_m) \simeq {}_n\mathrm{Br}(F) ,$$

où $\mathrm{Br}(F)$ est le groupe de Brauer de F .

Si $a \in F^*$ on note (a) sa classe dans $H^1(F,\mu_n)$. Si A est une algèbre simple centrale sur F , on note $[A]$ sa classe dans $\mathrm{Br}(F)$.

I.2. Symbole galoisien

On a un cup-produit $H^1(F,\mu_n) \times H^1(F,\mu_n) \longrightarrow H^2(F,\mu_n^{\otimes 2})$, où $\mu_n^{\otimes 2} = \mu_n \otimes \mu_n$. Si a et $b \in F^*$ et $1/n \in F$ on note

$$(a,b)_F = (a) \cup (b) \in H^2(F,\mu_n^{\otimes 2})$$

le cup-produit de (a) et (b) . Il est clair que

$$(aa',b)_F = (a,b)_F + (a',b)_F \quad \text{et} \quad (a,bb')_F = (a,b)_F + (a,b')_F .$$

Mais on a aussi la relation suivante :

Lemme 1.— Si $a \in F$, $a \neq 0$ *et* $a \neq 1$, *on a* $(a,1-a)_F = 0$

Preuve.— cf. [21] 3.1.

I.3. On désigne par $K_2(F)$ le groupe abélien engendré par les couples $\{a,b\}$, $a , b \in F^*$, soumis aux relations $\{aa',b\} = \{a,b\} + \{a',b\}$, $\{a,bb'\} = \{a,b\} + \{a,b'\}$, et $\{a,1-a\} = 0$ si $a \neq 0,1$. Le lemme 1 affirme donc que l'application $\{a,b\} \longrightarrow (a,b)_F$ induit un morphisme

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F,\mu_n^{\otimes 2}) ,$$

où $k_2(F) = K_2(F)/n$. Ce morphisme h_F est appelé *symbole galoisien*. Si $\{a,b\} \in K_2(F)$, on notera $\overline{\{a,b\}}$ sa classe dans $k_2(F)$. Merkurjev et Suslin ont démontré le résultat suivant

THÉORÈME 1 ([10], [11]).— *Pour tout corps* F *et tout entier* n *inversible dans* F *, le symbole galoisien*

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F,\mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

I.4. Si $\mu_n \subset F^*$ on savait déjà ([17], XIV.1, ou [12]) :

i) Les énoncés suivants sont équivalents : $h_F(\overline{\{a,b\}}) = 0$, $\overline{\{a,b\}} = 0$, ou " b appartient à l'image de la norme $F(\sqrt[n]{a})^* \longrightarrow F^*$ ".

ii) Si $a \in F^*$, tout élément x du noyau de $H^2(F,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^2(F(\sqrt[n]{a}),\mu_n^{\otimes 2})$ est de la forme $x = h_F(\overline{\{a,b\}})$, $b \in F^*$.

I.5. Le Théorème 1 était connu par exemple quand F est un corps fini, ou quand F est un corps de nombres [21].

II. Conséquences

II.1. Algèbres simples centrales

Supposons que F^* contienne le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité (et $1/n \in F$). Le choix d'un générateur ζ de μ_n établit un isomorphisme entre $\mu_n^{\otimes 2}$ et μ_n . On a donc $H^2(F,\mu_n^{\otimes 2}) \simeq H^2(F,\mu_n) \simeq {}_n\mathrm{Br}(F)$. Si $a , b \in F^*$ l'image de $(a,b)_F$ dans $\mathrm{Br}(F)$ par cet isomorphisme est la classe d'une algèbre simple centrale $A_\zeta(a,b)$ sur F , dite *cyclique*. Cette algèbre est engendrée sur F par des éléments X et Y soumis aux relations $X^n = a$, $Y^n = b$ et $XY = \zeta YX$. Par exemple, si $n = 2$, l'algèbre $A_{-1}(a,b)$ est une algèbre de quaternions. On notera que $A_\zeta(a,b)$ est trivialisée par l'extension cyclique $F(\sqrt[n]{a})$ de F . La surjectivité du symbole galoisien montre donc

COROLLAIRE 1 [11].— i) *Si* A *est une* F*-algèbre simple centrale telle que* $n[A] = 0$ *et* $\mu_n \subset F^*$ *, l'algèbre* A *est semblable à un produit tensoriel d'algèbres cycliques*[1].

ii) *Si* $n[A] = 0$ *et* $1/n \in F$ *, l'algèbre* A *est trivialisée par une extension résoluble à deux crans.*

iii) *Si tout élément de* F *est un carré et* $1/2 \in F$ *,* ${}_2\mathrm{Br}(F) = 0$.

[1] Elle n'est pas nécessairement isomorphe à un produit tensoriel de telles algèbres [1].

Ces résultats répondent à des questions étudiées depuis longtemps (par exemple, le corollaire 1, ii) est montré dans [4] pour une algèbre de degré 5).

II.2. Cycles en codimension 2

II.2.1. Soit X/F une variété algébrique lisse sur un corps F . Pour tout entier $i \geq 0$, le groupe des cycles de codimension i sur X , noté $\mathcal{Z}^i(X)$, est, par définition, le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $X^{(i)}$ des sous-variétés fermées irréductibles de codimension i de X . Soit $\mathcal{Z}^i_{rat}(X)$ le sous-groupe de $\mathcal{Z}^i(X)$ engendré par les diviseurs des fonctions rationnelles non nulles sur les sous-variétés fermées irréductibles de codimension $i-1$ de X . Le quotient

$$CH^i(X) = \mathcal{Z}^i(X)/\mathcal{Z}^i_{rat}(X)$$

est le groupe de Chow en codimension i .

II.2.2. Le Théorème 1 est l'ingrédient nouveau essentiel qui permet d'établir le

THÉORÈME 2.— *Soit* X *une variété projective, lisse et géométriquement irréductible sur un corps* F

i) [11] *Si* F *est algébriquement clos et* $1/n \in F$ *, le groupe* ${}_nCH^2(X)$ *est fini.*

ii) [6] *Si* F *est fini, le sous-groupe de torsion de* $CH^2(X)$ *est fini.*

iii) [5] *Si* F *est un corps de nombres et si* X *est une surface rationnelle, le groupe* $CH^2(X)$ *est de type fini.*

III. K-théorie des variétés

N.B.— Tous les schémas considérés sont noethériens et séparés.

III.1. Généralités

La preuve du Théorème 1 utilise la K-théorie algébrique des schémas définie par Quillen dans [13]. Celui-ci associe à tout schéma X (resp. à tout anneau unitaire A , commutatif ou non) et à tout entier $m \geq 0$ des groupes abéliens $K_m(X)$. Leur définition utilise la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de type fini (resp. la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A-modules à gauche projectifs de type fini).

Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine on a $K_m(X) = K_m(A)$.

Si $f : X \to Y$ (resp. $f : B \to A$) est un morphisme de schémas (resp. d'anneaux unitaires), il induit des morphismes de groupes

$$f^* : K_m(Y) \longrightarrow K_m(X) \qquad (\text{resp. } f^* : K_m(B) \longrightarrow K_m(A)).$$

Si X et Y sont réguliers et si $f : X \to Y$ est un morphisme fini, il induit aussi un transfert

$$f_* : K_m(X) \longrightarrow K_m(Y) .$$

Quand $f : F \to E$ est une extension finie de corps, on appellera aussi norme, et on notera $N_{E/F}$, le transfert

$$N_{E/F} = f_* : K_m(E) \longrightarrow K_m(F) .$$

Le produit tensoriel de $\mathcal{O}_X$-modules conduit à une structure produit [22]

$$K_m(X) \times K_{m'}(X) \longrightarrow K_{m+m'}(X) , \qquad m, m' \geq 0 .$$

Si $f : X \to Y$ est un morphisme fini entre schémas réguliers, on a une formule de projection

$$f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y , \qquad x \in K_m(X) , \quad y \in K_{m'}(Y) .$$

Si E/F est une extension finie de corps, de degré d , X un schéma régulier sur F , $X_E = X \underset{\operatorname{Spec} F}{\times} \operatorname{Spec} E$ et $f : X_E \to X$ le morphisme canonique, la formule de projection implique en particulier

$$f_*f^*(x) = f_*(1.f^*(x)) = f_*(1).x = dx .$$

Si E/F est une extension galoisienne de groupe de Galois G , on montre aussi que

$$f^*f_*(x) = \sum_{g \in G} g^*(x) .$$

Si A est un anneau unitaire et $M_n(A)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ sur A , les catégories $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(M_n(A))$ sont équivalentes ("équivalence de Morita"), d'où des isomorphismes $\quad K_m(A) \xrightarrow{\sim} K_m(M_n(A))$.

III.2. <u>Exemples</u>

Si $m = 0$ le groupe $K_0(X)$ (resp. $K_0(A)$) est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}(A)$) étudié dans [9].

Si A est un anneau unitaire, si $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$ est le groupe linéaire infini sur A , et si $E(A) \subset GL(A)$ est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires, on a aussi

$$K_1(A) = GL(A)/E(A) \quad \text{et} \quad K_2(A) = H_2(E(A),\mathbb{Z}) .$$

On trouve, avec cette définition, que si F est un corps on a $K_0(F) = \mathbb{Z}$, $K_1(F) = F^*$, et que $K_2(F)$ est le groupe défini au paragraphe I.3. (Théorème de Matsumoto, *cf.* [12]).

Si D est un corps gauche de dimension n^2 sur son centre F , on a $K_0(D) = \mathbb{Z}$ et $K_1(D) = D^*/[D^*,D^*]$. Si n est premier et si $\mathrm{Nrd} : D^* \longrightarrow F^*$ désigne la norme réduite, on a aussi $K_1(D) = \mathrm{Nrd}(D^*)$ (Théorème de Wang, [23]). Enfin Rehmann étudie dans [14] le groupe $K_2(D)$.

Si E/F est une extension finie de corps de degré d , la norme $N_{E/F} : K_m(E) \longrightarrow K_m(F)$ est la norme usuelle si $m = 1$, et si $m = 2$ elle est induite par les morphismes $E_n(E) \longrightarrow E_{nd}(F)$ (associés à un choix arbitraire d'une base de E sur F , *cf.* [12]).

III.3. <u>Suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen</u> [13]

Si X/F est une variété algébrique lisse de dimension d sur un corps F , un outil pour le calcul de $K_m(X)$ est la suite spectrale dite de Brown-Gersten-Quillen (en abrégé BGQ) qui ramène le calcul de $K_m(X)$ à celui de la K-théorie des corps résiduels de X. Cette suite spectrale $E_r^{st}(X)$ est de type cohomologique, elle est située dans le quatrième quadrant, et elle converge vers $K_{-s-t}(X)$. Elle est contravariante pour les morphismes plats, et covariante pour les morphismes finis. La filtration $F^i_{\dim}K_m(X)$ qu'elle définit sur la K-théorie de X est la filtration par la codimension du support. On a

$$E_1^{st}(X) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{x \in X^{(s)}} K_{-s-t}(F(x)) & \text{si } s \geq 0 \text{ et } s+t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $F(x)$ est le corps des fonctions de la sous-variété fermée irréductible x de codimension s dans X.

Soit $\underline{\underline{K}}_{-t}$ le faisceau associé au préfaisceau sur X pour la topologie de Zariski $U \longmapsto K_{-t}(U)$. On a

$$E_2^{st}(X) = \begin{cases} H^s(X, \underline{\underline{K}}_{-t}) & \text{si } s \geq 0 \text{ et } s+t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'image de la différentielle

$$d_1 : E_1^{i-1,-i}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(i-1)}} F(x)^* \longrightarrow E_1^{i,-i}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(i)}} \mathbb{Z} = \mathcal{Z}^i(X)$$

est $\mathcal{Z}^i_{rat}(X)$. D'où la formule [13] : $E_2^{i,-i}(X) = H^i(X, \underline{\underline{K}}_i) = CH^i(X)$. Ceci explique pourquoi la compréhension de K_2 conduit à des résultats sur $CH^2(X)$.

III.4. Dégénérescence de la suite spectrale BGQ

Les classes de Chern à valeurs dans les groupes de Chow

$$c_i : K_0(X) \longrightarrow CH^i(X) = E_2^{i,-i}(X) , \qquad 0 \leq i \leq d ,$$

et le Théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée montrent ([9], XIV.4) que le noyau du morphisme (surjectif)

$$E_2^{i,-i}(X) \longrightarrow E_\infty^{i,-i}(X)$$

est annulé par $(i-1)!$.

Dans [7] Gillet définit plus généralement des classes de Chern

$$c_{i,m} : K_m(X) \longrightarrow E_2^{i-m,-i}(X) , \qquad 0 \leq i \leq d , \quad m \geq 0 ,$$

et il montre qu'elles vérifient un Théorème de Riemann-Roch. Il en résulte [11]

$$E_2^{i,-i-1}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/d!] \simeq E_\infty^{i,-i-1}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/d!] .$$

Ceci sera utilisé dans la Proposition 2 ci-dessous.

IV. Variétés de Severi-Brauer

IV.1. Définition [17]

Soit A une algèbre simple centrale de dimension n^2 sur F. Notons $Gr(A)$ la grassmanienne des sous-variétés linéaires de dimension n de A. Soit X le sous-schéma fermé de $Gr(A)$ défini par la condition que si $x \in X$ la variété linéaire associée à x est stable par la multiplication à droite par A. On montre que X est une variété projective de dimension $n-1$ sur F, dite *variété de Severi-Brauer*, et que, si E/F est une extension du corps F, les énoncés suivants sont équivalents :

i) $[A \otimes_F E] = 0$ dans $Br(E)$.

ii) $X \otimes_F E$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_E^{n-1}$.

iii) L'ensemble $X(E)$ des points de X à valeurs dans E est non vide.

En particulier, ces énoncés sont vérifiés par le corps $E = F(X)$ des fonctions rationnelles sur X.

On voit donc que si $\mu_n \subset F^*$, à un symbole $\overline{\{a,b\}} \in k_2(F)$ sont associées, outre l'algèbre cyclique $A_\zeta(a,b)$ définie en II.1., la variété de Severi-Brauer $X = X(a,b)$ correspondante sur F (qui est un espace projectif si et seulement si $\overline{\{a,b\}} = 0$, d'après I.4. i)). L'idée centrale de Merkurjev et Suslin consiste à comparer les symboles galoisiens h_F et $h_{F(X)}$. Pour cela on étudie la K-théorie de X.

IV.2. Soit D une algèbre simple centrale de degré premier p sur F (donc D est une algèbre à division ou bien $D \simeq M_p(F)$), et X la variété de Severi-Brauer correspondante.

IV.2.1. En étudiant la structure de $\mathcal{P}(X)$ Quillen a montré

PROPOSITION 1 ([13], Th. 4.1.).— *Si* $m \geq 0$ *on a une décomposition en somme directe*

$$K_m(X) = K_m(F) \oplus K_m(D) \oplus K_m(D^{\otimes 2}) \oplus \ldots \oplus K_m(D^{\otimes(p-1)}) ,$$

où $D^{\otimes i}$ *est le produit tensoriel sur* F *de* i *exemplaires de* D.

Par exemple, si X est triviale, on a $D = M_p(F)$, et $K_m(D^{\otimes i}) = K_m(M_{p^i}(F)) = K_m(F)$.

IV.2.2. Supposons que D est non triviale sur F et soit L/F une extension de degré p de F qui trivialise D. Si $X_L = X \otimes_F L$, on a donc $X_L \simeq \mathbb{P}_L^{p-1}$.

PROPOSITION 2 ([11], [20]).— i) *Si* $i \geq 0$ *on a* $CH^i(X) = \mathbb{Z}$ *et* $CH^i(X_L) = \mathbb{Z}$. *Si* $i \geq 1$ *le morphisme d'extension des scalaires* $CH^i(X) \longrightarrow CH^i(X_L)$ *est la multiplication par* p.

ii) *On a* $H^1(X,\underline{\underline{K}}_2) = Nrd(D^*)$ *et* $H^1(X_L,\underline{\underline{K}}_2) = L^*$. *Le morphisme* $H^1(X,\underline{\underline{K}}_2) \longrightarrow H^1(X_L,\underline{\underline{K}}_2)$ *est l'inclusion* $Nrd(D^*) \subset F^* \subset L^*$.

iii) *Le morphisme* $\pi^* : K_2(F) \longrightarrow H^0(X,\underline{\underline{K}}_2)$ *(induit par le morphisme de définition* $\pi : X \longrightarrow \operatorname{Spec} F$ *) est un isomorphisme.*

Résumé de la démonstration.— i) soit $\mathcal{O}(-1)$ le fibré inversible standard sur $X_L = \mathbb{P}_L^{p-1}$, $\gamma \in K_0(X_L)$ sa classe, et $\xi \in CH^1(X_L)$ celle du diviseur associé à $\mathcal{O}(-1)$. On sait que $CH^i(X_L)$ est le groupe cyclique infini engendré par ξ^i [9]. Plus généralement [7] le produit

$$K_m(L) \xrightarrow{(?).\xi^i} H^i(X_L,\underline{\underline{K}}_{m+i})$$

est un isomorphisme. La structure multiplicative de la suite spectrale BGQ [7] montre donc que $E_2^{st}(X_L) \simeq E_\infty^{st}(X_L)$. Si $f : X_L \longrightarrow X$ est le morphisme canonique, la formule $f_*f^* = p$ (III.1.) implique donc

$$E_2^{st}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/p] \simeq E_\infty^{st}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/p] .$$

Si on combine ce résultat avec III.4., on obtient, puisque $d = \dim(X) = p-1$,

$$E_2^{i,-i}(X) \simeq E_\infty^{i,-i}(X) \qquad \text{et} \qquad E_2^{i,-i-1}(X) \simeq E_\infty^{i,-i-1}(X) .$$

Par ailleurs on vérifie que le morphisme $K_0(D^{\otimes i}) = \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(D^{\otimes i} \otimes L) = \mathbb{Z}$ est la multiplication par p si $1 \leq i \leq p-1$. Donc le morphisme

$$f^* : K_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(X_L) = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$$

est donné par $f^*(n_0,\ldots,n_{p-1}) = (n_0,pn_1,\ldots,pn_{p-1})$.

On montre aussi que le morphisme $f_* : K_0(X_L) \longrightarrow K_0(X)$ est donné par $f_*(n_0,\ldots,n_{p-1}) = (pn_0,n_1,\ldots,n_{p-1})$. Par ailleurs l'isomorphisme

$$\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(X_L)$$

est donné par $(n_0,\ldots,n_{p-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} n_i\gamma^i$ et l'idéal $F^i_{\dim}K_0(X_L)$ de $K_0(X_L)$ est engendré par $(\gamma-1)^i$ [9]. Il en résulte que, si $i \geq 1$,

$$F^i_{\dim}K_0(X_L) \cap f^*K_0(X) \subset pF^i_{\dim}K_0(X_L) ,$$

et que

$$f^*(F^i_{\dim}K_0(X_L)) \supset f^*f_*F^i_{\dim}K_0(X_L) = pF^i_{\dim}K_0(X_L) .$$

On voit donc que le morphisme

$$f^* : E_\infty^{i,-i}(X) = E_2^{i,-i}(X) \longrightarrow E_\infty^{i,-i}(X_L) = E_2^{i,-i}(X_L) , \qquad i \geq 1 ,$$

est la multiplication par p dans $\mathbb{Z}$.

La preuve de ii) est semblable, et utilise le fait que $K_1(D) = \mathrm{Nrd}(D^*)$. La preuve de iii) est plus difficile. Pour la surjectivité de π^* on remarque d'abord, puisque $E_2^{i,-i-1}(X) \simeq E_\infty^{i,-i-1}(X)$, que les différentielles issues de $E_2^{0,-2}(X) = H^0(X,\underline{\underline{K}}_2)$ sont nulles, et que le morphisme $K_2(X) \longrightarrow H^0(X,\underline{\underline{K}}_2)$ est surjectif. Il faut donc voir que l'image de l'application composée

$$K_2(D^{\otimes i}) \longrightarrow K_2(X) \longrightarrow H^0(X,\underline{\underline{K}}_2)$$

est contenue dans celle de $K_2(F) \longrightarrow H^0(X,\underline{\underline{K}}_2)$. Comme $K_2(L) = H^0(X_L,\underline{\underline{K}}_2)$ et $[L:F] = p$, un argument de transfert (*cf.* ci-dessous la preuve du Théorème 3) permet de supposer que toute extension finie de F est de degré une puissance de p . On montre alors à l'aide du résultat de Rehmann [14] que le produit

$$K_1(D^{\otimes i}) \otimes K_1(F) \longrightarrow K_2(D^{\otimes i})$$

est surjectif ([11], Proposition 5, ou [15] si $p = 2$). On est donc ramené à voir que l'image du morphisme $K_1(D^{\otimes i}) \longrightarrow K_1(X) \longrightarrow H^0(X,\underline{\underline{K}}_1)$ est contenue dans celle de

$K_1(F)$. Mais

$$H^0(X,\underline{\underline{K}}_1) = H^0(X,\mathbb{G}_m) = F^* = K_1(F) .$$

On indiquera en V.3. une preuve de l'injectivité de π^* .

IV.2.3. PROPOSITION 3.— *Avec les hypothèses de la Proposition* 2 :

i) *Le complexe de groupes*

$$0 \longrightarrow K_2(F) \longrightarrow K_2(F(X)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est exact, sauf au terme médian où l'homologie est $N = \mathrm{Nrd}(D^*)$.

ii) *Si* $1/p \in F$, $\mu_p \subset F$ *et* $D = A_\zeta(a,b)$ *on a des suites exactes*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow k_2(F) \longrightarrow k_2(F(X)) \longrightarrow A/p \longrightarrow 0$$

et

$$_pN \longrightarrow A/p \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^*/p$$

où $\mathbb{Z}/p$ *est engendré par* $\overline{\{a,b\}}$ *et* $A = d_1(K_2(F(X)))$.

Preuve.— L'énoncé i) résulte de la Proposition 2 et de III.3. Pour prouver ii), soit B (resp. C) le noyau (resp. l'image) du bord d_1 : $\bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^* \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z}$. De i) on tire des suites exactes

$$_pK_2(F(X)) \longrightarrow {}_pA \longrightarrow K_2(F)/p \longrightarrow K_2(F(X))/p \longrightarrow A/p \longrightarrow 0 ,$$

et $_pN \longrightarrow A/p \longrightarrow B/p$. Comme C est sans torsion on a une injection

$$B/p \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^*/p .$$

Le noyau de $k_2(F) \longrightarrow k_2(F(X))$ contient le groupe d'ordre p engendré par $\overline{\{a,b\}}$ (IV.1. et I.4. i)). Pour voir que ce noyau est d'ordre inférieur ou égal à p , notons $\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathbb{Z}$ le groupe des diviseurs de X et $\mathrm{Pic}(X) = CH^1(X) = \mathbb{Z}$ son groupe de Picard. On a un diagramme commutatif (où la verticale de gauche est le produit en K-théorie)

$$\begin{array}{ccccccc}
F(X)^* \otimes \mu_p & \longrightarrow & \mu_p \otimes \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mu_p \otimes \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow\wr & & \wr & & \\
 & & & & \mu_p & & \\
{}_pK_2(F(X)) & \longrightarrow & {}_pA \hookrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(1)}} {}_pF(x)^* & & & &
\end{array}$$

Il en résulte que le conoyau de $_pK_2(F(X)) \longrightarrow {}_pA$ est d'ordre inférieur ou égal à p .

q.e.d.

V. Théorème 90 de Hilbert pour K_2

V.1. THÉORÈME 3 ([11], [20]).— *Soit* E/F *une extension cyclique de degré* n , $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ *un générateur, et* $N_{E/F} : K_2(E) \longrightarrow K_2(F)$ *la norme. On a une suite exacte*

$$K_2(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_2(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_2(F) .$$

Preuve [20].— On se restreindra au cas où n est un nombre premier p inversible dans F .

— De la description de la norme donnée en III.2. résulte aisément que $N_{E/F} \circ (1-\sigma) = 0$.

— Si F' est une extension de F on note E' l'anneau $E \otimes_F F'$, $N_{E'/F'} : K_2(E') \longrightarrow K_2(F')$ le transfert associé à $F' \longrightarrow E'$, et

$$V(F') = \mathrm{Ker}(N_{E'/F'})/(1-\sigma)(K_2(E')) .$$

Le morphisme composé $V(F) \longrightarrow V(E) \xrightarrow{N_{E/F}} V(F)$ est la multiplication par p (III.1.) et $V(E) = 0$, donc $V(F)$ est annulé par p. Si F'/F est une extension finie de degré premier à p, l'application composée $V(F) \longrightarrow V(F') \xrightarrow{N_{F'/F}} V(F)$ est la multiplication par $[F':F]$, donc le morphisme $V(F) \longrightarrow V(F')$ est injectif. Donc pour montrer que $V(F) = 0$ on peut supposer que $\mu_p \subset F$, puisqu'en général le degré de $F(\mu_p)$ sur F est premier à p. On a alors $E = F(\sqrt[p]{a_0})$, où $a_0 \in F^*$.

— *Lemme 2.— Soient* $b \in F^*$, $X = X(a_0,b)$ *la variété de Severi-Brauer associée à* $A_\zeta(a_0,b)$, *et* $F(X)$ *son corps de fonctions. Le morphisme* $V(F) \longrightarrow V(F(X))$ *est injectif.*

Preuve du Lemme.— Comme le corps E trivialise $A_\zeta(a_0,b)$ on a $X_E \simeq \mathbb{P}_E^{p-1}$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(N_{E/F} : K_2(E) \to K_2(F))$ un élément dont l'image $u_{E(X)}$ dans $K_2(E(X))$ s'écrit $u_{E(X)} = (1-\sigma)v$, avec $v \in K_2(E(X))$. Il faut montrer que $u \in (1-\sigma)K_2(E)$. Pour cela on note ∂_y, $y \in X_E^{(1)}$, les composantes de la différentielle $d_1 : K_2(E(X)) \longrightarrow \bigoplus_{y \in X_E^{(1)}} E(y)^*$ de la suite spectrale BGQ de X_E. Si $x \in X^{(1)}$, on pose $d_x(v) = \prod_{y|x} \partial_y(v)$. On a alors $(1-\sigma)d_x(v) = d_x((1-\sigma)v) = d_x(u_{E(X)}) = 0$. Donc $d_x(v)$ est dans $\left(\prod_{y|x} E(y)^*\right)^\sigma = F(x)^*$. L'élément $(d_x(v))_{x \in X^{(1)}}$ de $E_1^{1,-2}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*$ est dans le noyau de la différentielle d_1 (puisque $E_1^{2,-2}(X) \hookrightarrow E_1^{2,-2}(X_E)$), donc il définit une classe $a(v) \in H^1(X,\underline{\underline{K}}_2)$. L'image de $a(v)$ dans $H^1(X_E,\underline{\underline{K}}_2)$ est nulle, donc $a(v) = 0$ (Proposition 2, ii)). Par conséquent il existe un élément v_0 de $K_2(F(X))$ tel que $\partial_x(v_0) = d_x(v)$ quel que soit $x \in X^{(1)}$. On en déduit que $\partial_y(v - v_0) = 0$ si $y \in X_E^{(1)}$, et $v - v_0 \in H^0(X_E,\underline{\underline{K}}_2) = K_2(E)$. Donc $u = (1-\sigma)v = (1-\sigma)(v-v_0)$ est dans $(1-\sigma)K_2(E)$.

q.e.d.

<u>Fin de la preuve du Théorème</u> 3

On définit une suite de corps F_n en posant $F_0 = F$, en appelant F_{2m+1} le composé des corps $F_{2m}(X(a_0,b))$ où b décrit F_{2m}^*/p, et en appelant F_{2m+2} une extension maximale de F_{2m+1} de degré premier à p (dans une clôture algébrique de F_{2m+1}). Si $F_\infty = \varinjlim_n F_n$, on voit que l'application $V(F) \longrightarrow V(F_\infty)$ est injective, que F_∞ n'a pas d'extension finie de degré premier à p, et que la norme $E_\infty^* \longrightarrow F_\infty^*$ est surjective. Pour montrer que $V(F) = 0$ on peut supposer $F = F_\infty$. Dans ce cas on définit une application

$$\varphi : K_2(F) \longrightarrow K_2(E)/(1-\sigma)K_2(E)$$

en associant au symbole $\{a,b\}$ la classe de $\{a,\beta\}$, où $N_{E/F}(\beta) = b$ [15]. L'élément obtenu ne dépend pas du choix de β (Théorème 90 de Hilbert classique), il dépend bilinéairement de a et b, et il est nul si $b = 1-a$ ([11], Lemme 1.7). Le morphisme φ ainsi défini est une section de $N_{E/F}$ (car $N_{E/F}(\{a,\beta\}) = \{a,N_{E/F}(\beta)\} = \{a,b\}$) et il est surjectif (car $[E:F] = p$ et F n'a pas d'extension de degré premier à p, *cf.* [2]). Donc $V(F) = 0$.

q.e.d.

V.2. Torsion dans K_2 d'un corps

THÉORÈME 4 ([11], [20]).— *Soit* L *un corps et* $\zeta \in L^*$ *un élément d'ordre* n $(1/n \in F)$. *Tout élément* $x \in {}_nK_2(L)$ *peut s'écrire* $x = \{\zeta,c\}$ *avec* $c \in L^*$.

Preuve.— On se ramène au cas où n est un nombre premier p. Soit alors $E = L(T)$ le corps des fonctions rationnelles sur L et $F = L(T^p) \subset E$. La restriction de $N_{E/F} : K_2(E) \longrightarrow K_2(F)$ à $K_2(L)$ est la multiplication par p (III.1.), donc, d'après le Théorème 3, on a ${}_pK_2(L) \subset K_2(L) \cap (1-\sigma)K_2(E)$, où $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ est un générateur. Choisissons σ tel que $\zeta = T/\sigma(T)$. Il suffit de montrer

Lemme 3.— $K_2(L) \cap (1-\sigma)K_2(E) = \{\zeta,L^*\}$.

Preuve du lemme.— Si $\mathbb{A}^1_L$ est la droite affine sur L, on note $f : X = \mathbb{A}^1_L \longrightarrow Y = \mathbb{A}^1_L$ le morphisme correspondant à l'inclusion $L[U] \longrightarrow L[T]$ qui envoie U sur T^p. Ce morphisme f est fini et plat, non ramifié en dehors de l'origine $y_0 \in Y$. Soient $u \in K_2(L)$ et $v \in K_2(E)$ des éléments tels que $u_E = (1-\sigma)v$. Si y est un point fermé de Y on pose $d_y(v) = \prod_{x\in f^{-1}(y)} \partial_x(v)$. On a $(1-\sigma)d_y(v) = 0$, donc, si $y \neq y_0$, $d_y(v) \in L(y)^*$. On sait que $K_m(\mathbb{A}^1_L) = K_m(L)$ [13], et la suite spectrale BGQ pour $\mathbb{A}^1_L$ donne une suite exacte courte (due d'abord à Milnor) :

$$0 \longrightarrow K_2(L) \longrightarrow K_2(L(T)) \xrightarrow{\oplus\, \partial_y} \bigoplus_{y\in Y^{(1)}} L(y)^* \longrightarrow 0 .$$

En particulier le morphisme $K_2(F) \longrightarrow \bigoplus_{y\neq y_0} L(y)^*$ est surjectif et il existe $v_0 \in K_2(F)$ tel que $\partial_y(v_0) = d_y(v)$ si $y \neq y_0$. Soit $c = \partial_{y_0}(v-v_0) \in L^*$ et $w = v - v_0 - \{T,c\} \in K_2(E)$. On vérifie que si x est un point fermé de X on a $\partial_x(w) = 0$. Donc $w \in K_2(L)$ et l'on a

$$u_E = (1-\sigma)v = (1-\sigma)(w+v_0+\{T,c\}) = (1-\sigma)\{T,c\} = \{\zeta,c\} .$$

q.e.d.

En considérant l'extension d'Artin-Schreier $E = L(T) \supset F = L(T^p - T)$ on montre de même

THÉORÈME 5 [20].— *Si* L *est un corps de caractéristique* p, *on a* ${}_pK_2(L) = 0$.

V.3. Fin de la preuve de la Proposition 2, iii)

Reprenant les notations de IV.2.2. il s'agit de voir que le morphisme $K_2(F) \longrightarrow K_2(F(X))$ est injectif (car $H_0(X,\underline{\underline{K}}_2) \hookrightarrow K_2(F(X))$). Ceci est connu quand X est l'espace projectif, donc le noyau de $K_2(F) \longrightarrow K_2(F(X))$ est dans

${}_pK_2(F)$ (grâce à l'argument de transfert usuel, *cf.* IV.1.). Ceci permet de supposer $\mu_p \subset F^*$ et d'après le Théorème 4 (dont la preuve n'utilise que la Proposition 2, i) et ii)) il s'agit donc de voir que si $u \in F^*$, $\zeta^p = 1$, et $\{\zeta,u\} = 0$ dans $K_2(F(X))$, on a $\{\zeta,u\} = 0$ dans $K_2(F)$.

En général, Suslin [20] montre que si E est un corps contenant μ_p , $u \in E^*$ et $\{\zeta,u\} = 0$ dans $K_2(E)$, il existe un élément u_0 de la clôture algébrique E_0 dans E du sous-corps premier de E , et un élément v de E tels que $u = u_0v^p$ et $\{\zeta,u_0\} = 0$ dans $K_2(E_0)$. Sa preuve utilise le résultat de Tate (I.5) et les classes de Chern reliant K-théorie et cohomologie étale ([18], [19]).

Appliquant cela à $E = F(X)$ on a (puisque F est algébriquement fermé dans $F(X)$) $E_0 \subset F$ et $v \in F^*$. Donc $\{\zeta,u\} = \{\zeta,u_0\} = 0$ dans $K_2(F)$. Plus généralement :

THÉORÈME 6 [20].— *Si* E/F *est une extension de corps et* F *est algébriquement fermé dans* E *, le morphisme* $K_2(F) \longrightarrow K_2(E)$ *est injectif.*

VI. Preuve du Théorème 1

VI.1. Injectivité du symbole galoisien

Montrons que si $\mu_p \subset F$ le symbole galoisien

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F,\mu_p^{\otimes 2})$$

est injectif. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} \overline{\{a_i,b_i\}}$ un élément de $k_2(F)$ tel que $h_F(u) = 0$. On va montrer par récurrence sur n que $u = 0$. Si $n = 1$ c'est I.4. i). En général supposons l'énoncé vrai pour $n-1$ et, si $\overline{\{a_n,b_n\}} \neq 0$, soit $X = X(a_n,b_n)$ la variété de Severi-Brauer associée. L'image de $\overline{\{a_n,b_n\}}$ dans $k_2(F(X))$ est nulle et $h_{F(X)}(u_{F(X)}) = 0$, donc $u_{F(X)} = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc (Proposition 3, ii)) u est un multiple $m\overline{\{a_n,b_n\}}$ du symbole $\overline{\{a_n,b_n\}}$. Comme $h_F(u) = 0$ on a $m \equiv 0 \pmod{p}$ (I.4. i)). Donc $u = 0$.

q.e.d.

VI.2. Surjectivité du symbole galoisien

VI.2.1. *Lemme* 4.— *Soient* F *un corps et* p *un nombre premier tels que* $1/p \in F$ *,* F *n'a pas d'extension finie de degré premier à* p *et* $k_2(F) = 0$ *. Alors* $Br(F) = 0$.

Preuve.— Soient A une F-algèbre simple centrale non triviale et L un corps neutralisant de A et galoisien sur F , minimal pour ces propriétés. Soit $E \subset L$ le sous-corps des points fixes d'un sous-groupe normal d'ordre p de $Gal(L/F)$. Comme l'algèbre $[A \otimes_F E]$ est trivialisée par l'extension cyclique L de E , sa classe $[A \otimes_F E]$ est dans l'image de h_E (I.4. ii)). On va voir que $k_2(E) = 0$ donc $[A \otimes_F E] = 0$, ce qui contredit la minimalité de L .

Pour voir que $k_2(E) = 0$ on est ramené au cas où E/F est cyclique de degré p . Si $u \in K_2(E)$ on a alors $N_{E/F}(u) = pv$, $v \in K_2(F)$. Donc $N_{E/F}(u - v_E) = 0$.

D'après le Théorème 3 on en déduit que $u - v_E = (1-\sigma)w$, $w \in K_2(E)$. Donc $k_2(E) = (1-\sigma)k_2(E) = (1-\sigma)^p k_2(E) = (1-\sigma^p)k_2(E) = 0$ q.e.d.

VI.2.2. On suppose que $\mu_p \subset F$. Soit $\overline{\{a,b\}} \in k_2(F)$ un symbole non nul et $X = X(a,b)$ la variété de Severi-Brauer associée à $D = A_\zeta(a,b)$.

Lemme 5.— *Le morphisme* $\mathrm{coker}(h_F) \longrightarrow \mathrm{coker}(h_{F(X)})$ *est injectif.*

Preuve.— Si $\langle D\rangle \subset {}_p\mathrm{Br}(F)$ est le sous-groupe engendré par la classe $[D]$ de D , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow {}_p\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_p(\mathrm{Br}(F)/\langle D\rangle) \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{Br}(F)/p \ .$$

On va voir qu'on a également une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow {}_p(\mathrm{Br}(F)/\langle D\rangle) \longrightarrow {}_p\mathrm{Br}(F(X)) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^*/p \ .$$

En effet, si l'on pose $\mathrm{Br}(X) = H^2(X,\mathbb{G}_m)$, Grothendieck montre dans [8], Cor. 6.2., qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_p\mathrm{Br}(X) \longrightarrow {}_p\mathrm{Br}(F(X)) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^*/p \ .$$

Par ailleurs la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^r(F, H^s(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{r+s}(X,\mathbb{G}_m)$$

(où $\overline{X} = X \otimes_F \overline{F}$) donne ici une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X,\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(\overline{X},\mathbb{G}_m)^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} \xrightarrow{d_2} H^2(F,\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{G}_m) \rightarrow 0 \ .$$

D'après la Proposition 2, i), on sait que l'image de d_2 est un groupe d'ordre p . Elle contient $\langle D\rangle$ car $D \otimes F(X)$ est triviale. Donc $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(F)/\langle D\rangle$. Cela montre (*). On montre [3] que le diagramme ci-dessous est commutatif (*cf.* aussi Proposition 3, ii)). :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & p^N \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p \arrow[r] \arrow[d, equal] & k_2(F) \arrow[rrr] \arrow[d, "h_F"] & & & k_2(F(X)) \arrow[r] \arrow[d, "h_{F(X)}"] & A/p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p \arrow[r] & {}_p\mathrm{Br}(F) \arrow[dr] & & & {}_p\mathrm{Br}(F(X)) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} F(x)^*/p & \\
 & & & {}_p(\mathrm{Br}(F)/\langle D\rangle) \arrow[urr] \arrow[dr] & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}/p \arrow[rr] & & \mathrm{Br}(F)/p &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que pour prouver que le morphisme $\mathrm{coker}(h_F) \longrightarrow \mathrm{coker}(h_{F(X)})$ est injectif, il suffit de montrer le Lemme suivant

Lemme 6.— *Si le groupe* $N = \mathrm{Nrd}(D^*)$ *contient* μ_p , *il existe une* F*-algèbre simple centrale* A *telle que* $[D] = p[A]$ *dans* $\mathrm{Br}(F)$ *et que* $[A \otimes_F F(X)]$ *soit dans l'image de* $h_{F(X)}$.

Preuve.— Par l'argument de transfert usuel, on peut supposer que le degré de toute extension finie de F est une puissance de p . Soit $\zeta \in F^*$ une racine primitive p-ième de l'unité. Comme ζ est dans l'image de la norme réduite, il existe un sous-corps maximal $L = F(\sqrt[p]{a})$ de D tel que ζ est dans l'image de la norme $F(\sqrt[p]{a})^* \longrightarrow F^*$. D'après I.4. ii) on a $D \simeq A_\zeta(a,b)$ pour un certain $b \in F^*$. Identifions μ_p à $\mathbb{Z}/p$ par le choix de ζ, et si $x \in F^*$, notons $\chi_x \in H^1(F,\mathbb{Z}/p)$ le caractère correspondant à la classe de x dans $H^1(F,\mu_p) \simeq H^1(F,\mathbb{Z}/p)$. Si δ est le bord de la suite exacte

$$H^1(F,\mathbb{Z}/p^2) \longrightarrow H^1(F,\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\delta} H^2(F,\mathbb{Z}/p) \simeq {}_p\mathrm{Br}(F)$$

on a $\delta(\chi_a) = (a,\zeta)_F = 0$ (I.4. i)). Donc il existe $\chi \in H^1(F,\mathbb{Z}/p^2)$ tel que $p\chi = \chi a$. Soit $(b) \in H^1(F,\mu_{p^2})$ la classe de b module $(F^*)^{p^2}$ et A une F-algèbre simple centrale telle que $[A] = \chi \cup (b)$ dans ${}_{p^2}\mathrm{Br}(F)$. On a $p[A] = \chi_a \cup (b) = [D]$. Pour vérifier que $[A \otimes_F F(X)]$ est dans l'image de $h_{F(X)}$ on note que $D \otimes_F F(X)$ est triviale, donc (I.4. i)) $b \in F(X)^*$ est la norme d'un élément $t \in L(X)^*$. On a donc

$$[A \otimes_F F(X)] = N_{L(X)/F(X)}(\chi_{|L(X)} \cup (t)) .$$

Comme la restriction de χ à $L(X)$ est d'ordre p, il existe $u \in L(X)^*$ avec $\chi_{|L(X)} = \chi_u$. On a donc

$$[A \otimes_F F(X)] = h_{F(X)}(N_{L(X)/F(X)}(\overline{\{u,t\}})) .$$

q.e.d.

VI.2.3. Si E est une extension finie de F de degré premier à p, le morphisme $\mathrm{coker}(h_F) \longrightarrow \mathrm{coker}(h_E)$ est injectif (argument de transfert habituel).

VI.2.4. Montrons que $h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F,\mu_p^{\otimes 2})$ est surjectif. Soit F_n une suite de corps telle que $F_0 = F$, F_{2m+1} est une extension maximale de degré premier à p de F_{2m} (dans une clôture algébrique de F_{2m}), et F_{2m+2} est le composé des corps $F_{2m+1}(X(a,b))$ où $\overline{\{a,b\}}$ décrit un ensemble de générateurs de $k_2(F_{2m+1})$. Le corps $F_\infty = \varinjlim_n F_n$ n'a pas d'extension de degré premier à p, on a $k_2(F_\infty) = 0$, et le morphisme $\mathrm{coker}(h_F) \longrightarrow \mathrm{coker}(h_{F_\infty})$ est injectif (Lemme 5 et VI.2.3.). D'après le Lemme 4 on a $\mathrm{Br}(F_\infty) = 0$ donc $\mathrm{coker}(h_F) = 0$.

q.e.d.

VI.3. Pour montrer que le symbole galoisien

$$h_F : K_2(F)/n \longrightarrow H^2(F,\mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme pour tout entier n $(1/n \in F)$, on peut d'abord supposer que $n = p^k$ avec p premier, puis que $\mu_p \subset F^*$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mu_p \otimes F^* & \longrightarrow & K_2(F)/p^{k-1} & \longrightarrow & K_2(F)/p^k & \longrightarrow & K_2(F)/p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(F,\mu_p^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F,\mu_{p^{k-1}}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F,\mu_{p^k}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F,\mu_p^{\otimes 2}) & &
\end{array}$$

est commutatif et ses lignes sont exactes (sauf peut-être en $K_2(F)/p^{k-1}$). Il permet de se ramener par récurrence au cas $k = 1$ traité en VI.1. et VI.2.4..

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. AMITSUR, L.H. ROWEN, J.-P. TIGNOL - *Division algebras of degree* 4 *and* 8 *with involution,* Israël J. of Maths. 33(1979), 133-148.

[2] H. BASS, T. TATE - *The Milnor ring of a global field,* Algebraic K-theory II, Springer, Lect. Notes in Maths. 342(1973), 349-446.

[3] S. BLOCH - *Torsion algebraic cycles,* K_2 *and Brauer groups of function fields,* Groupe de Brauer, Springer, Lect. Notes in Maths. 844(1981), 75-102.

[4] R. BRAUER - *On normal division algebras of index* 5, Proc. Nat. Ac. of Sc. 24 (1938), 243-246.

[5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE - *Hilbert's Theorem* 90 *for* K_2, *with application to the Chow groups of rational surfaces,* à paraître aux Inventiones.

[6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, C. SOULÉ - *Quelques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques,* C.R.A.S., t. 294(28/6/1982), 749-752.

[7] H. GILLET - *Riemann-Roch Theorems for higher Algebraic* K*-theory,* Adv. in Maths. 40(1981), 203-289.

[8] A. GROTHENDIECK - *Le groupe de Brauer* III, dans "Dix exposés sur la cohomologie des schémas", Masson-North Holland, 1968.

[9] A. GROTHENDIECK et al. - SGA VI, Théorème de Riemann-Roch, Springer, Lect. Notes in Maths. 225(1971).

[10] A.S. MERKURJEV - *On the norm residue symbol of degree* 2, C.R.A.S. de l'URSS (Doklady) 261, n° 3(1981), 542-547.

[11] A.S. MERKURJEV, A.A. SUSLIN - K*-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism,* Izv. Acad. Sci. URSS 46, n° 5(1982), 1011-1046 (en russe).

[12] J. MILNOR - *Introduction to Algebraic* K*-theory*, Annals of Maths. Studies 72 (1971), Princeton Univ. Press.

[13] D. QUILLEN - *Algebraic* K*-theory* I, Springer, Lect. Notes in Maths. 341(1973), 85-147.

[14] U. REHMANN - *Zentrale Erweiterungen der speziellen lineare Gruppe eines Schiefkörpers,* Journal f. d. r. u. a. Math. 301(1978), 77-104.

[15] U. REHMANN, U. STUHLER - *On* K_2 *of finite dimensional division algebras over arithmetical fields,* Inv. Math. 50, n° 1(1978), 75-90.

[16] J.-P. SERRE - Cohomologie galoisienne, Springer, Lect. Notes in Math. 5.

[17] J.-P. SERRE - Corps locaux, Hermann, 1968.

[18] V.V. SCHECHTMAN - *Algebraic* K*-theory and characteristic classes,* Usp. Mat. Nauk 33, n° 6(1978), 239-240

[19] C. SOULÉ - K*-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale,* Inv. Math. 55(1979), 251-295.

[20] A.A. SUSLIN - *Torsion in* K_2 *of fields,* prépublication L.O.M.I. (1982).

[21] J. TATE - *Relations between* K_2 *and Galois cohomology,* Inv. Math. 36(1976), 257-274.

[22] F. WALDHAUSEN - *Algebraic* K-*theory of generalized free products,* I *et* II, Annals of Maths. 108(1978), 135-256.

[23] Sh. WANG - *On the commutator group of a simple algebra,* Amer. J. of Maths. 72(1950), 323-334.

Christophe SOULÉ

Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2 Place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05