Astérisque

MICHEL DUFLO

Analyse harmonique sur les groupes algébriques complexes : formule de Plancherel

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki, exp. n° 612, p. 279-291

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__279_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 612 Juin 1983

ANALYSE HARMONIQUE SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES COMPLEXES : FORMULE DE PLANCHEREL [d'après M. ANDLER] ET CONJECTURE DE M. VERGNE

par Michel DUFLO

Introduction.– Rappelons quelques formules classiques d'analyse harmonique sur $\mathbb{R}$. Si φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est définie par la formule

(1) $$\hat{\varphi}(y) = \int e^{iyx}\varphi(x)dx \ .$$

Pour $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la *formule de Plancherel* s'écrit

(2) $$\int |\varphi|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int |\hat{\varphi}|^2 dx \ .$$

Elle est équivalente à la *formule d'inversion*

(3) $$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi} dx \ ,$$

valable par exemple pour toute fonction φ à support compact suffisamment différentiable. La *formule de Poisson* s'écrit

(4) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\pi n) \ ,$$

elle est valable par exemple pour toutes les fonctions φ de l'espace de Schwartz.

Cela fait au moins trente ans que l'on sait que la formule de Plancherel (ou la formule d'inversion (3)) se généralise à de vastes classes de groupes localement compacts (cf. [Go], [S]). Soit G un groupe localement compact séparable. On fixe une mesure de Haar à gauche dg sur G. Si T est une représentation unitaire(1), et si φ est une fonction intégrable sur G, on pose

(5) $$T(\varphi) = \int \varphi(g)T(g)dg \ .$$

C'est un opérateur borné dans l'espace de T. On note $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. Au moins si G est de type I, on pense qu'une généralisation utile de la transformation de Fourier (1) s'obtient en posant

(6) $$\hat{\varphi}(T) = T(\varphi) \qquad \text{pour } \varphi \in L^1(G) \ , \ T \in \hat{G} \ .$$

(1) Les notes sont à la fin de l'exposé.

Une des définitions de la notion de type I est rappelée dans la note [2], ainsi que la définition de la structure borélienne standard dont $\hat{G}$ est alors muni. Tous les groupes algébriques réels sont de type I [Di 1].

La généralisation la plus courante de la formule de Plancherel (2) s'énonce ainsi (il existe d'autres généralisations pour les groupes non unimodulaires, ou pour ceux qui ne sont pas de type I) :

THÉORÈME 1 (cf. [Di 2] 18.8).— *Soit* G *un groupe localement compact séparable de type* I, *unimodulaire. Fixons une mesure de Haar* dg *sur* G . *Il existe une mesure positive borélienne* m *sur* $\hat{G}$ *telle que l'on ait*

$$\int_G |\varphi|^2 dg = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(T(\varphi)T(\varphi)^*)dm(T) \tag{7}$$

pour tout $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$. *La mesure* m *est uniquement déterminée par* (7). *Elle dépend du choix de* dg .

La mesure m s'appelle la mesure de Plancherel. La formule (7) est équivalente à la formule d'inversion (8) ci-dessous, que je n'écrirai que pour un groupe de Lie.

THÉORÈME 2.— *Soit* G *un groupe de Lie séparable, de type* I, *unimodulaire. Il existe un entier* $N \geq 0$ *et un sous-ensemble* $\hat{G}'$ *de* $\hat{G}$, *ayant les propriétés suivantes :*

(a) $\hat{G}'$ *est borélien, et* $\hat{G} - \hat{G}'$ *est négligeable pour la formule de Plancherel.*

(b) *Pour tout* $T \in \hat{G}'$ *et tout* $\varphi \in C_c^N(G)$, *l'opérateur* $T(\varphi)$ *est traçable, et la fonction* $\varphi \mapsto \operatorname{tr} T(\varphi)$ *est continue (pour la topologie habituelle de* $C_c^N(G)$).

(c) *Pour tout* $\varphi \in C_c^N(G)$, *la fonction* $T \to \operatorname{tr} T(\varphi)$ *est borélienne sur* $\hat{G}'$, *et l'on a*

$$\varphi(1) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr} T(\varphi)dm(T) \ . \tag{8}$$

Soit T une réprésentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie, et supposons que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$ l'opérateur $T(\varphi)$ soit traçable. L'application $\varphi \mapsto \operatorname{tr} T(\varphi)$ est alors une distribution, appelée le "caractère distribution" de T [3]. La formule (8) s'interprète donc comme désintégration de δ en caractères.

L'étude de la formule de Plancherel d'un groupe de Lie unimodulaire dont on sait déjà qu'il est de type I comporte les étapes suivantes : trouver une paramétrisation d'une partie de $\hat{G}$ dont le complémentaire est négligeable pour la mesure de Plancherel et décrire m en fonction de ces paramètres. On tâchera de plus de dire quelque chose des représentations T qui apparaissent dans la formule de Plancherel, et de leur caractère. Il est impossible de citer ici tous les travaux ayant un rapport avec ce programme. En voici quelques uns, traitant de la détermination explicite de la mesure de Plancherel pour différents groupes, pour marquer des repères : Harish-Chandra (1952) [H-C 1] pour $SL(2,\mathbb{R})$, Gelfand-Naimark [G-N], Harish-Chandra (1954) [H-C 2] pour les groupes semi-simples complexes, Harish-Chandra (1976) [H-C 3] pour les groupes semi-simples réels connexes de centre fini, Kirillov [Ki 2] pour les groupes nilpotents simplement connexes, Charbonnel [C 1] pour les groupes résolubles connexes unimodulaires de type I. Beaucoup d'autres exemples ont été calculés (par exemple [Kl-Li]).

La formule de Plancherel étant connue pour les groupes semi-simples et pour les groupes résolubles, il est bien naturel d'aborder le cas d'un groupe de Lie quelconque. Bien que l'on commence à savoir un certain nombre de choses avec des hypothèses moins restrictives, cet exposé se limitera aux *groupes algébriques complexes* (considérés comme groupes de Lie réels). La raison principale en est qu'il existe un texte écrit (M. Andler, thèse université Paris 7, 1983). D'autre part le fait d'être algébrique, et complexe, entraine beaucoup de simplifications (pensons aux deux dizaines d'années séparant les articles d'Harish-Chandra relatifs aux groupes semi-simples complexes et réels), ce qui fait que certaines idées apparaissent plus clairement (mais d'autres disparaissent complètement).

Dans toute la suite, G est un groupe algébrique linéaire complexe, considéré comme groupe de Lie réel. On note $\underline{g}$ son algèbre de Lie, $\underline{g}^*$ le dual de $\underline{g}$ (c'est donc l'ensemble des formes linéaires réelles sur $\underline{g}$). Si une sous-algèbre de $\underline{g}$ est stable par la structure complexe, on précisera sous-algèbre complexe. De même, si on parle de la dimension d'un sous-espace, il s'agit de la dimension sur $\mathbb{R}$. On fixe une mesure de Haar à gauche dg sur G . On note dX la mesure de Lebesgue sur $\underline{g}$ tangente à dg . On note df la mesure de Lebesgue sur $\underline{g}^*$ duale de dX ; on a donc, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\underline{g})$

$$\int_{\underline{g}^*}\left(\int_{\underline{g}} \psi(X)e^{if(X)}dX\right)df = \psi(0) \ .$$

I. CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DE G

Soit $f \in \underline{g}^*$. Une *polarisation réelle* en f est une sous-algèbre $\underline{b}$ qui est un sous espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire $\beta_f : X,Y \longrightarrow \langle f,[X,Y]\rangle = \beta_f(X,Y)$. Notons B_o le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\underline{b}$. Il est fermé, et l'orbite $B_o f$ de f dans $\underline{g}^*$ est un ouvert de l'espace affine $f + \underline{b}^\perp$, où $\underline{b}^\perp$ est l'orthogonal de $\underline{b}$ dans $\underline{g}^*$. Si $B_o f = f + \underline{b}^\perp$, on dit que f vérifie la condition de Pukanszky. Une *bonne polarisation réelle* est une polarisation réelle, vérifiant la condition de Pukanszky, et résoluble. Si f admet une telle polarisation, on dit que f est *bien polarisable* (4).

On dit que f est *intégrable* (ou G-*intégrable*) s'il existe un caractère χ_f de la composante neutre $G(f)_o$ du stabilisateur $G(f)$ de f dans G , tel que $\chi_f(\exp X) = \exp(if(X))$ pour tout $X \in \underline{g}(f)$, où $\underline{g}(f)$ est l'algèbre de Lie de $G(f)$. Lorsque f est intégrable, on note $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires τ de $G(f)$ dont la restriction à $G(f)_o$ est un multiple de χ_f . On note $X^{irr}(f)$ l'ensemble des $\tau \in X(f)$ qui sont irréductibles. Comme le groupe $G(f)/G(f)_o$ est fini, $X^{irr}(f)$ est un ensemble fini de représentations de dimension finie, et l'on a

(9) $$\sum_{\tau\in X^{irr}(f)} (\dim \tau)^2 = \# G(f)/G(f)_0 .$$

On note X l'ensemble des couples (f,τ) où f est intégrable et bien polarisable, et $\tau \in X(f)$. On note X^{irr} le sous-ensemble formé des couples $(f,\tau) \in X$, où τ est irréductible. Le groupe G opère par conjugaison dans X .

Dans [Du 1], il est construit une application qui à $(f,\tau) \in X$ associe une représentation unitaire $T_{f,\tau}$ de G , dont le commutant est isomorphe à celui de τ . En particulier $T_{f,\tau} \in \hat{G}$ si $\tau \in X^{irr}(f)$. De plus, l'application $(f,\tau) \mapsto T_{f,\tau}$ induit une injection de X^{irr}/G dans $\hat{G}$. La construction de [Du 1] est valable pour des groupes de Lie généraux(5). Le cas particulier considéré ici permet de grandes simplifications dans la construction de $T_{f,\tau}$.

Soit donc $f \in \underline{g}^*$ un élément bien polarisable. Supposons qu'il existe une bonne polarisation réelle $\underline{b}$ qui soit de plus $G(f)$-stable. Posons $B = G(f)B_0$. C'est un sous-groupe fermé, et il existe une unique représentation (notée encore τ) de B prolongeant la représentation τ de $G(f)$, et telle que $\tau(\exp X) = \exp(if(X))\mathrm{Id}$ pour $X \in \underline{b}$. On note $T_{f,\tau,\underline{b}}$ la représentation induite $\mathrm{Ind}_B^G(\tau)$. Le théorème 1 de [A] affirme que $T_{f,\tau,\underline{b}}$ est indépendante de $\underline{b}$, et le théorème 3 que son commutant est isomorphe à celui de τ . Notons $T'_{f,\tau}$ la classe de $T_{f,\tau,\underline{b}}$ (qui est donc définie lorsqu'il existe une bonne polarisation réelle $G(f)$-invariante). Il serait tentant de définir $T_{f,\tau}$ comme étant égale à $T'_{f,\tau}$. Cependant cela pose deux problèmes : tout d'abord il n'existe pas toujours, même génériquement, de bonne polarisation réelle $G(f)$-invariante ([A], § 3). D'autre part, même si une telle polarisation existe, l'égalité de la représentation $T_{f,\tau}$ (qui sera définie plus bas) avec $T'_{f,\tau}$ n'est établie dans [A] que sous l'hypothèse peut-être plus restrictive d'existence d'une "très bonne polarisation" $G(f)$-invariante (voir [A], prop. 9).

La construction de $T_{f,\tau}$ se fait par récurrence sur la dimension de G . Voici une variante de la méthode de [Du 1]. On suppose la construction faite pour tous les groupes de dimension inférieure strictement à la dimension de G . On note $\underline{u}$ le radical unipotent de $\underline{g}$, $\ell \in \underline{u}^*$ la restriction de f à $\underline{u}$, G_1 le stabilisateur de ℓ dans G , $\underline{g}_1$ son algèbre de Lie, f_1 la restriction de f à $\underline{g}_1$. On considère deux cas.

1er cas.— $\dim G = \dim G_1$ (ce cas est essentiellement celui où $\underline{g}$ est réductive). Il existe alors une bonne polarisation réelle $G(f)$-invariante ([A], lemme 38). On pose $T_{f,\tau} = T'_{f,\tau}$ (6).

2-ième cas.— $\dim G > \dim G_1$. Notons U le sous-groupe unipotent d'algèbre de Lie $\underline{u}$. Notons T_ℓ la représentation unitaire irréductible de U associée à $\ell \in \underline{u}^*$ par la théorie de Kirillov [Ki 1]. Ce n'est autre que la représentation T'_{ℓ,χ_ℓ} de U définie comme plus haut en remplaçant G par U , f par ℓ , τ par χ_ℓ , et en remarquant que $U(\ell)$ est connexe. Le groupe G_1 opère dans U et laisse stable T_ℓ . Il se trouve qu'il existe une représentation W_ℓ de G_1 dans l'espace de T_ℓ , canoniquement définie, telle que l'on ait $W_\ell(h)T_\ell(u)W_\ell(h^{-1}) = T_\ell(huh^{-1})$ pour tout $h \in G_1$, $u \in U$ [7].

D'autre part, on a $G_1(f_1) = G(f)U(\ell)$, et il existe un unique élément, que nous noterons τ_1, de $X(f_1)$, qui prolonge τ. L'hypothèse de récurrence implique que la représentation T_{f_1,τ_1} de G_1 est définie. La formule

$$(T_{f_1,\tau_1} \otimes W_\ell T_\ell)(hu) = T_{f_1,\tau_1}(h) \otimes W_\ell(h)T_\ell(u)$$

où $h \in G_1$, $u \in U$, définit une représentation du groupe G_1U dans le produit tensoriel des espaces de T_ℓ et T_{f_1,τ_1}. On pose :

$$T_{f,\tau} = \mathrm{Ind}_{G_1U}^{G}(T_{f_1,\tau_1} \otimes W_\ell T_\ell) .$$

Remarques.— 1) On trouvera en [Du 2], théorème 20, une autre construction de ces représentations.

2) Dans [Du 1], la construction des $T_{f,\tau}$ est faite en utilisant non pas $\underline{u}$, mais le plus grand idéal nilpotent de $\underline{g}$. On obtient le même résultat (cf. [Du 2], théorème 19).

* * *

Soit $f \in \underline{g}^*$ une forme linéaire bien polarisable et admissible. Soit $\underline{b}$ une bonne polarisation réelle en f. Il existe un caractère (noté encore χ_f) de B_o tel que $\chi_f(\exp X) = \exp(if(X))$ pour tout $X \in \underline{b}$.

THÉORÈME 3.— (i) ([A], th. 1) *La classe de la représentation* $\mathrm{Ind}_{B_o}^{G}(\chi_f)$ *ne dépend pas de* $\underline{b}$. *Notons-la* T_f.

(ii) *On a :*

$$T_f = \sum_{\tau \in X^{\mathrm{irr}}(f)} \dim \tau \; T_{f,\tau} \qquad (10)$$

((ii) *est implicite dans* [A], *cf. en particulier le théorème* 3).

II. CARACTÈRE DES REPRÉSENTATIONS

Soit Ω une orbite de G dans $\underline{g}^*$. L'espace tangent en un point $f \in \Omega$ s'identifie à $\underline{g}/\underline{g}(f)$, et la forme β_f fournit par passage au quotient une structure symplectique. On munit Ω de la mesure $\mu_\Omega = (2\pi)^{-d}(d\,)^{-1}|\beta \wedge \ldots \wedge \beta|$ (d facteurs, où $2d = \dim \Omega$). On dit que Ω est tempérée si

$$\int_\Omega (1 + \|f\|)^{-N} d\mu_\Omega(f) < \infty ,$$

pour N assez grand, où $\|.\|$ est une norme sur $\underline{g}^*$.

Rappelons que si Ω est une orbite de dimension maximale, alors $\underline{g}(f)$ est commutative pour $f \in \Omega$.

THÉORÈME 4.— *Soit* $(f,\tau) \in X^{\mathrm{irr}}$. *Supposons que* $\underline{g}(f)$ *soit nilpotente. La représentation* $T_{f,\tau}$ *admet un caractère distribution si et seulement si l'orbite* $\Omega = G.f$ *de* f *est tempérée.*

Dans ce cas, on a l'identité suivante de fonctions généralisées dans un voisi-

nage de 0 *dans* $\underline{g}$:

$$\operatorname{tr} T_{f,\tau}(\exp X) = \int_\Omega \dim\tau\, e^{ig(X)} j^{-\frac{1}{2}}(X)\, d\mu_\Omega(g) \ , \tag{11}$$

où $j(X) = \det \dfrac{e^{\frac{1}{2}\operatorname{ad}X} - e^{-\frac{1}{2}\operatorname{ad}X}}{\operatorname{ad}X}$.

La formule (11) est la "formule universelle" de Kirillov [Ki 3]. Elle est due dans ce cas à Khalgui [Kh][(8)]. Des formules (9), (10) et (11), on déduit, dans les mêmes conditions que la formule (11) :

$$\operatorname{tr} T_f(\exp X) = \#\,(G(f)/G(f)_0)\int_\Omega e^{ig(X)} j^{-\frac{1}{2}}(X)\, d\mu_\Omega(g) \ . \tag{12}$$

Comme T_f est une représentation induite, la démonstration de (12) est facile (cf. par ex. [Gu] où elle ne prend que quelques lignes). Il en est de même de (11) lorsque $T_{f,\tau} = T'_{f,\tau}$.

III. FORMES LINÉAIRES FORTEMENT RÉGULIÈRES

Soit $f \in \underline{g}^*$ une forme linéaire régulière (i.e. $\dim \underline{g}(f)$ est minimale). Alors $\underline{g}(f)$ est commutative, et donc somme directe de sa partie réductive $\underline{s}(f)$ et de sa partie unipotente $\underline{u}(f)$. On dit que f est fortement régulière si de plus $\underline{s}(f)$ est de dimension maximale. L'ensemble de ces formes est un ouvert de Zariski $\mathcal{O}$ de $\underline{g}^*$, et les $\underline{s}(f)$ pour $f \in \mathcal{O}$ sont deux à deux conjugués. On fixe un représentant $\underline{s}$ de cette classe de conjugaison.

On note H le centralisateur de $\underline{s}$ dans G , H' le normalisateur de $\underline{s}$ dans G . Le groupe $W = H'/H$ est fini, et H et H' ont même algèbre de Lie, notée $\underline{h}$. On pose $\underline{q} = [\underline{s},\underline{g}]$. Alors $\underline{g} = \underline{h} \oplus \underline{q}$. On identifie $\underline{h}^*$ à l'orthogonal de $\underline{q}$ dans $\underline{g}^*$. L'intérêt de ces notions est que toute orbite de G dans $\underline{g}^*$ rencontre $\underline{h}^*$ suivant une H'-orbite. On a donc

$$\mathcal{O} = G(\mathcal{O} \cap \underline{h}^*) \ . \tag{13}$$

La décomposition (13) s'accompagne d'une formule intégrale (dans le genre de celles d'H. Weyl ou d'Harish-Chandra). On choisit une mesure de Lebesgue dH sur $\underline{h}$ et une mesure de Lebesgue dY sur $\underline{q}$ de telle sorte que $dX = dH dY$. On choisit une base $e_1,\dots,e_{2d}$ de $\underline{q}$ telle que $dY = |e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2d}^*|$, où $e_1^*,\dots,e_{2d}^*$ est la base duale. On pose, pour $\lambda \in \underline{h}^*$

$$\omega(\lambda)^2 = \det(\lambda[e_i,e_j])_{1\le i,j\le 2d} \ . \tag{14}$$

Donc ω est un élément de $S(\underline{h})$, défini au signe près, et dépendant du choix de dY . A cause de la structure complexe sous-jacente, on peut choisir $\omega \geq 0$. On munit $\underline{h}^*$ de la mesure de Lebesgue $d\lambda$ duale de dH (définie comme plus haut df).

Soit $\alpha \in C_c(\mathcal{O})$. Pour $g \in G$, posons

$$\psi(g) = |\det \operatorname{Ad} g|^{-1}\int_{\underline{h}^*} \omega(\lambda)^2 \alpha(g\lambda)\, d\lambda \ . \tag{15}$$

C'est une fonction continue à support compact modulo H , et vérifiant $\psi(gh) = |\det \operatorname{Ad}_{\underline{g}/\underline{h}} h|\psi(g)$ pour $h \in H$. Sur l'espace de ces fonctions, il existe une forme linéaire G-invariante notée $\psi \longrightarrow \int_{G/H} \psi dg$, et une seule qui soit tangente à dY (on identifie $\underline{q}$ et $\underline{g}/\underline{h}$). On a ([Du 3]) :

(16) $$\int_{\mathcal{O}} \alpha(f)df = \frac{1}{(2\pi)^{2d} \# W} \int_{G/H} \psi(g)dg \ .$$

Le groupe analytique S d'algèbre $\underline{s}$ est un tore algébrique complexe, et $\underline{s}$ est contenue dans le centre de $\underline{h}$. Posons $\Gamma = \{X \in \underline{s}\ ,\ \exp X = 1\}$. Posons $\Gamma^* = \{\lambda \in \underline{h}^*\ ,\ \lambda(\Gamma) \subset 2\pi\mathbb{Z}\}$. On munit le groupe abélien $\underline{h}/\Gamma$ de la mesure de Haar tangente à dH , on identifie Γ^* au groupe abélien dual, et on munit Γ^* de la mesure de Haar duale, notée γ . Comme chacun le sait, γ se calcule grâce à la formule de Poisson (4) :

(17) $$d\gamma(\lambda) = \sum_{X \in \Gamma} e^{i\lambda(X)} d\lambda$$

(au sens des distributions).

Lemme.— (i) *Tous les éléments* $f \in \mathcal{O}$ *admettent une bonne polarisation réelle* ([A], prop. 13).

(ii) *Un élément* $f \in \mathcal{O}$ *est intégrable si et seulement s'il appartient à* $G(\mathcal{O} \cap \Gamma^*)$.

Notons $\underline{g}^*_G$ l'ensemble des éléments intégrables de $\mathcal{O}$. On définit une mesure p sur $\underline{g}^*_G$ par la formule

(18) $$\int_{\underline{g}^*_G} \alpha(f)dp(f) = \frac{1}{(2\pi)^{2d} \# W} \int_{G/H} |\det \mathrm{Ad} g|^{-1} \int_{\Gamma^*} \omega(\lambda)^2 \alpha(g\lambda) d\gamma(\lambda) dg$$

valable par exemple pour toute fonction α sur $\underline{g}^*_G$, restriction d'une fonction $\alpha \in C_c(\mathcal{O})$.

On peut, compte-tenu de (15) et (17), interpréter (18) de la manière suivante. Soit Θ la fonction généralisée dans $\mathcal{O}$, G-invariante, et qui prolonge la fonction généralisée $\sum_{X \in \Gamma} e^{i\lambda(X)}$ sur $\mathcal{O} \cap \Gamma^*$. Alors

(19) $$dp(f) = \Theta(f)df \qquad \text{dans } \mathcal{O} \ .$$

IV. FORMULE DE PLANCHEREL

Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des couples (f,τ) avec $f \in \underline{g}^*_G$, $\tau \in X^{irr}(f)$. D'après le lemme ci-dessus, $\mathcal{X}$ est contenu dans X .

THÉORÈME 5 ([A], § 13).— *Il existe sur* $\mathcal{X}$ *une structure borélienne standard (explicitement décrite dans* [A]) *rendant boréliennes les applications* $(f,\tau) \longrightarrow f$, $(f,\tau) \longrightarrow \dim\tau$, $(f,\tau) \longmapsto T_{f,\tau}$.

Dans le reste du § IV, nous supposons G unimodulaire. Comme G est unimodulaire, la mesure p sur $\underline{g}^*_G$ est G-invariante. Comme de plus les orbites de G dans $\underline{g}^*$ sont localement fermées (car G est algébrique) on peut montrer qu'il existe une mesure r sur $\underline{g}^*_G/G$ telle que l'on ait, pour toute fonction $\alpha \in C_c(\Omega)$

(20) $$\int_{\underline{g}^*_G} \alpha(f)\,dp(f) = \int_{\underline{g}^*_G/G}\left(\int_\Omega \alpha(f)\,d\mu_\Omega(f)\right)dr(f) \ .$$

La mesure r est donc le quotient de p par les mesures canoniques μ_Ω sur les orbites.

Remarque.— L'application $\Omega \longrightarrow \Omega \cap \underline{h}^*$ est une bijection de $\underline{g}^*_G/G$ sur $(\Gamma^* \cap \mathcal{O})/H'$. Les orbites Λ de H' dans $\underline{h}^*$ sont de même munies d'une mesure canonique μ_Λ. On peut aussi définir r par la formule

(21) $$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Gamma^*\cap\mathcal{O}} \alpha(\lambda)\,|\omega(\lambda)|\,d\lambda = \int_{\Gamma^*\cap\mathcal{O}/H'}\left(\int_\Lambda \alpha(\lambda)\,d\mu_\Lambda(\lambda)\right)dr(f)$$

valable pour tout $\alpha \in C_c(\underline{h}^* \cap \mathcal{O})$.

On définit une mesure m dans l'ensemble X/G par la formule

(22) $$\int_{X/G} \psi(f,\tau)\,dm(f,\tau) = \int_{\underline{g}^*_G/G}\left(\sum_{\tau\in X^{irr}(f)} \psi(f,\tau)\frac{\dim \tau}{\# G(f)/G(f)_o}\right)dr(f)$$

(valable par exemple pour toute fonction borélienne ψ, positive, G-invariante, sur X).

THÉORÈME 6 ([A], th. 7).— *Identifions X/G à un sous-ensemble de $\hat{G}$ grâce à l'application $(f,\tau) \longmapsto T_{f,\tau}$. Le complémentaire de X/G dans $\hat{G}$ est négligeable pour la mesure de Plancherel, et, dans X/G, la mesure de Plancherel est égale à m.*

D'après le théorème 2, le théorème 6 implique la formule d'inversion suivante, valable pour toute fonction φ à support compact suffisamment différentiable

(23) $$\varphi(1) = \int_{\underline{g}^*_G/G}\left(\sum_{\tau\in X^{irr}(f)} \mathrm{tr}\ T_{f,\tau}(\varphi)\frac{\dim \tau}{\# G(f)/G(f)_o}\right)dr(f) \ .$$

Remarques.— 1) Compte-tenu de (9) et (10), on peut écrire (23) sous la forme remarquablement simple

(24) $$\varphi(1) = \int_{\underline{g}^*_G/G} \mathrm{tr}\ T_f(\varphi)\frac{1}{\# G(f)/G(f)_o}\,dr(f) \ .$$

2) Si G est fini, munissons-le de la mesure dg donnant la masse 1 à chaque point. La formule (23) devient la formule bien connue

(25) $$\varphi(1) = \sum_{\tau\in\hat{G}} \mathrm{tr}\ \tau(\varphi)\frac{\dim \tau}{\# G} \ .$$

Plus généralement, le facteur $\frac{\dim \tau}{\# G(f)/G(f)_o}$ apparaîssant dans (23) est la mesure de Plancherel de l'ensemble $X^{irr}(f)$, identifié à l'ensemble des représentations irréductibles (projectives correspondant à un cocycle bien déterminé) du groupe $G(f)/G(f)_o$.

3) Si G est unipotent, $\underline{g}^*_G$ est un ouvert de Zariski de $\underline{g}^*$, $dp = df$, et T_f est irréductible de sorte que la formule est donnée par la formule (24), dans laquelle dr est le quotient de la mesure de Lebesgue df par la mesure canonique sur les orbites. Ce résultat est dû à Kirillov [Ki 2].

4) Si G est semi-simple et connexe, $\underline{s}$ est une sous-algèbre de Cartan, $\underline{h}$ est

égal à $\underline{s}$, $\underline{h}^* \cap \mathcal{O}$ est l'ensemble des points réguliers de $\underline{s}^*$ (i.e. ceux où ω ne s'annule pas). Si $\lambda \in \underline{h}^* \cap \mathcal{O}$, le groupe $G(f)$ est égal à S . Si de plus λ est intégrable (i.e. $\lambda \in \Gamma^* \cap \mathcal{O}$), $X^{irr}(f)$ a exactement un élément, à savoir le caractère χ_λ de S de différentielle $i\lambda$. On a donc $T_{\lambda,\chi_\lambda} = T_\lambda$. Compte-tenu de (21), la formule d'inversion s'écrit :

$$\varphi(1) = \frac{1}{\# W(2\pi)^d} \int_{\Gamma^* \cap \mathcal{O}} |\omega(\lambda)| \operatorname{tr} T_\lambda(\varphi) d\gamma(\lambda) \ . \tag{26}$$

Cette formule est due à Harish-Chandra [H-C 2]. La démonstration du théorème 6 se fait par réduction du cas semi-simple, en utilisant [Kl-Li].

5) Soit V un voisinage de 0 dans $\underline{g}$ dans lequel exp définit un difféomorphisme de V sur $\exp V$ et dans lequel le théorème 4 est valable.

Le théorème 4 montre que r-presque toute orbite $\Omega \in \underline{g}^*_G/G$ est tempérée. De plus, il résulte du théorème 4, de (24) et de (20) que pour toute fonction ψ à support compact dans V , suffisamment différentiable, on a

$$\int_{\underline{g}^*_G} \left(\int_V e^{if(X)} \psi(X) dX \right) dp(f) = \psi(0) \ . \tag{27}$$

Ceci entraîne que p , considéré comme mesure sur $\underline{g}^*$ concentrée dans $\underline{g}_G$, est tempérée.

6) Il est vraisemblable que r-presque toute orbite $\Omega \in \underline{g}^*_G/G$ est fermée. Comme toute orbite fermée est tempérée, ce serait une meilleure manière de retrouver un résultat signalé dans la remarque précédente. On sait pour l'instant [C 2] qu'il existe un ouvert de Zariski U de $\underline{g}^*$, G-invariant non vide, réunion d'orbites fermées. Il faudrait pouvoir choisir U de telle sorte que $U \cap \underline{g}^*_G$ soit de complémentaire p-négligeable dans $\underline{g}^*_G$.

V. CONJECTURE DE M. VERGNE

On ne suppose plus G unimodulaire. Il reste cependant vrai que la mesure p est tempérée (on se ramène facilement au cas unimodulaire). Sa transformée de Fourier (qui est donc une distribution de type positif sur $\underline{g}$) sera notée n .

La formule (27), encore valable si G n'est pas unimodulaire, montre que n vaut δ (la distribution de Dirac) dans un voisinage de 0 . Rappelons que (27) est conséquence du théorème de Plancherel et de la formule universelle de Kirillov.

Introduisons l'ensemble $\underline{g}_G = \{X \in \underline{g} \ , \ \exp X = 1\}$. Inspirée par des formules analogues à (27), M. Vergne [V 1] [V 3] a conjecturé que, pour tout groupe de Lie réel G , il existe un sous-ensemble de $\underline{g}^*$, noté $\underline{g}^*_G$, et sur $\underline{g}^*_G$ une mesure positive tempérée p ayant quelque chose à voir avec la formule de Plancherel de G , dont la transformée de Fourier n vaut δ dans un voisinage de 0 dans $\underline{g}$, et est à support dans $\underline{g}_G$. Pour le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la formule de Poisson (4) résoud la conjecture avec $n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j$. La formule de M. Vergne (dans le cas où elle est vraie) donne une généralisation de la formule de Poisson.

Dans [V 2], la conjecture est démontrée pour les groupes de Lie semi-simples réels connexes linéaires, et une formule explicite est donnée pour n . Cette formule fait intervenir l'*intégrale invariante* d'Harish-Chandra.

Revenons au cas d'un groupe algébrique complexe (pas nécessairement semi-simple). La conjecture de M. Vergne est vraie [Du 3], et on obtient une formule explicite pour n qui fait intervenir une généralisation de l'intégrale invariante d'Harish-Chandra. La fin de l'exposé est consacrée à la description de n .

Soit $a \in \underline{s}$. On note ϑ_a la fonction différentiable et bornée dans ϑ qui est G-invariante et telle que $\vartheta_a(\lambda) = \frac{1}{\# W} \sum_{w \in W} \exp(i\lambda(wa))$ pour $\lambda \in \underline{h}^*$. On note M_a la distribution tempérée G-invariante sur $\underline{g}$ telle que $\vartheta_a(f) = \int_{\underline{g}} e^{if(X)} dM_a(X)$ (au sens des fonctions généralisées sur $\underline{g}^*$).

THÉORÈME 7.— *La distribution* M_a *a son support dans l'orbite* Ga *de* a *dans* $\underline{g}$ *(remarquons que* Ga *est un fermé de Zariski de* $\underline{g}$ *car* a *est semi-simple).*

On trouvera dans [Du 3] une formule explicite pour M_a . Considérons seulement le cas où a est régulier, c'est-à-dire où le centralisateur de a dans $\underline{g}$ est égal à H (c'est le cas pour a dans un ouvert de Zariski non vide de $\underline{s}$). Notons $\underline{n}$ le sous-espace complexe somme des sous-espaces propres de ada dans $\underline{g}$ correspondant aux valeurs propres ξ telles que $\mathrm{Re}\,\xi > 0$, ou $\mathrm{Re}\,\xi = 0$ et $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ (ici $\underline{g}$ est considéré comme un espace vectoriel complexe). Oubliant de nouveau la structure complexe, on définit un polynôme v a valeurs positives sur $\underline{h}$ en posant $v(H) = \det \mathrm{ad}_{\underline{\underline{n}}}(H)$. On choisit le polynôme ω sur $\underline{h}^*$ positif. On note D_ω l'opérateur différentiel à coefficients constants qu'il définit sur $\underline{h}$.
Si $\psi \in C_c^\infty(\underline{g})$, on a

$$M_a(\psi) = \frac{i^d}{(2\pi)^d \# W} \int_{G/H} D_\omega(v(H)\psi(\mathrm{Adg}.H))_{|H=a} dg \ . \tag{28}$$

(Remarquons que d est pair, car la dimension complexe de $\underline{q}$ est paire, et 2d est la dimension réelle de $\underline{q}$).

La conjecture de M. Vergne dans le cas complexe résulte alors du théorème suivant

THÉORÈME 8.— *Dans* $\mathcal{D}'(\underline{g})$ *, on a* $\sum_{a \in \Gamma} M_a = n$.

Je ne sais pas si la convergence a lieu dans $\mathcal{S}'(\underline{g})$ quoique cela me paraisse vraisemblable.

NOTES

(1) Dans ce texte, représentation unitaire signifie représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert.

(2) Une représentation unitaire irréductible T de G est dite *normale* si tout opérateur compact dans l'espace de T est limite pour la topologie de la norme d'opérateurs $T(\varphi)$, avec $\varphi \in L^1(G)$. Si G est un groupe de Lie connexe, il est

équivalent de demander l'existence d'un élément $\varphi \in L^1(G)$ (on peut même le choisir dans $C_c^\infty(G)$) tel que $T(\varphi)$ soit un opérateur compact non nul [C 3].

Soit $C^*(G)$ la C^*-algèbre de G . Toute représentation unitaire T de G définit une représentation (notée encore T) de $C^*(G)$ dans le même espace de Hilbert. Si T est irréductible et normale, toute représentation T' irréductible ayant même noyau que T dans la C^*-algèbre est équivalente à T (cf. [Di 2]).

Le groupe G est dit de type I si toute représentation unitaire irréductible de G est normale. L'application qui à $T \in \hat{G}$ associe son noyau dans $C^*(G)$ est alors une bijection sur l'ensemble $\mathrm{Prim}\, C^*(G)$ des idéaux premiers de $C^*(G)$. On munit $\mathrm{Prim}\, C^*(G)$ de la topologie de Jacobson, et on transporte cette topologie sur $\hat{G}$. La structure borélienne sous-jacente à cette topologie est standard. Pour tout $x \in C^*(G)$, la fonction $T \to \mathrm{tr}(T(x)T(x)^*)$ de $\hat{G}$ dans $[0,\infty]$ est semi-continue inférieurement, et en particulier borélienne.

(3) La distribution $\varphi \mapsto \mathrm{tr}\, T(\varphi)$ dépend du choix de dg . Ce qui est canoniquement déterminé est la fonction généralisée $\mathrm{tr}\, T(g)$ telle que l'on ait

$$\int \varphi(g)\, \mathrm{tr}\, T(g)\, dg = \mathrm{tr} \int \varphi(g) T(g)\, dg \ .$$

C'est une forme linéaire sur l'espace des densités de la forme φdg , avec $\varphi \in C_c^\infty(G)$.

(4) Si f est bien polarisable, f admet une bonne polarisation qui est une sous-algèbre complexe de $\underline{g}$. Cette définition est équivalente à celle de [Du 1], qui ne demande l'existence de bonne polarisation que dans le complexifié $\underline{g} \otimes \mathbb{C}$ de $\underline{g}$.

(5) A condition de remarquer que la condition d'intégrabilité est équivalente (pour les groupes complexes) à la condition d'admissibilité de [Du 1], et que les ensembles $X(f)$ définis ici et là sont canoniquement isomorphes.

(6) Ce n'est pas la même définition que dans [Du 1], mais cela revient au même, d'après un résultat récent de Bouaziz [B]. L'existence de polarisations réelles $G(f)$-invariantes lorsque G est réductif complexe est une grande simplification par rapport au cas des groupes réels (et même au cas des groupes dont seulement la composante neutre est réductive complexe).

(7) La représentation W_ℓ est essentiellement la représentation de Shale-Weil du groupe $Sp(n,\mathbb{C})$. Sur les réels, il faut faire intervenir des revêtements d'ordre deux, ce qui complique un peu les choses (cf. [Du 1]).

(8) [K] suppose l'orbite fermée, et ne démontre pas que si $T_{f,\tau}$ admet un caractère distribution l'orbite est tempérée, mais cela ne fait pas de problème. La formule (11) est écrite sous la forme proposée dans [Be-V] (voir aussi [V 3]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] M. ANDLER - *La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes unimodulaires*, Thèse Université Paris 7, 1983.

[Be-V] N. BERLINE and M. VERGNE - *The equivariant index and Kirillov's Character Formula*, Preprint 1983.

[B] A. BOUAZIZ - *Sur les représentations des groupes réductifs non connexes*, Preprint, 1983.

[C 1] J.-Y. CHARBONNEL - *La formule de Plancherel pour un groupe résoluble connexe* II, Math. Annalen 250(1980), 1-34.

[C 2] J.-Y. CHARBONNEL - *Sur les orbites de la représentation coadjointe*, Compositio Math. 46(1982), 273-305.

[C 3] J.-Y. CHARBONNEL - *Idéaux primitifs et opérateurs compacts*, à paraître dans le Bull. S.M.F..

[Di 1] J. DIXMIER - *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques*, Ann. Institut Fourier 7(1957), 315-328.

[Di 2] J. DIXMIER - *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[Du 1] M. DUFLO - *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, in Harmonic Analysis and Group Representations, Liguori Ed., Napoli, 1982.

[Du 2] M. DUFLO - *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, à paraître dans Acta Mathematica.

[Du 3] M. DUFLO - *Représentations unitaires des groupes de Lie et méthode des orbites*, in G.M.E.L., Bordas, Paris, 1982.

[G-N] I.M. GELFAND und M.A. NAIMARK - *Unitäre Darstellung der Klassichen Gruppen*, Akademie Verlag, Berlin, 1957.

[Go] R. GODEMENT - *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires*, J. Math. pures et appl. 30(1951), 1-110.

[Gu] V.A. GUINZBURG - *Method of orbits in the representation theory of complex Lie groups*, Funct. Analysis and Applic. 15(1981), 18-28.

[H-C 1] HARISH-CHANDRA - *Plancherel formula for the* 2×2 *real unimodular group*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38(1952), 337-342.

[H-C 2] HARISH-CHANDRA - *The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 76(1954), 485-528.

[H-C 3] HARISH-CHANDRA - *Harmonic analysis on real reductive groups III, The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula*, Annals of Math. 104(1976), 117-201.

[Kh] M.S. KHALGUI - *Caractères des groupes de Lie*, Journal of Funct. Analysis 47 (1982), 64-77.

[Ki 1] A.A. KIRILLOV - *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Uspekhi Math. Nauk. 27(1962), 57-110.

[Ki 2] A.A. KIRILLOV - *Plancherel measure for nilpotent Lie groups*, Funct. Analysis and Applic. 1(1967), 330-331.

[Ki 3] A.A. KIRILLOV - *The characters of unitary representations of Lie groups*, Funct. Analysis and Applic. 3(1968), 133-146.

[Kl-Li] A. KLEPPNER and R.L. LIPSMAN - *The Plancherel formula for group extensions* II, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 6(1973), 103-132.

[S] I.E. SEGAL - *An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups*, Ann. of Math. 52(1950), 272-292.

[V 1] M. VERGNE - *A Plancherel formula without group representations*, OAGR Conference (1980), à paraître.

[V 2] M. VERGNE - *A Poisson-Plancherel formula for semi-simple Lie groups*, Annals of Math. 115(1982), 639-666.

[V 3] M. VERGNE - *Representations of Lie groups and the orbit method*, in Emmy Noether Symposium, Bryn-Mawr, à paraître chez Springer-Verlag.

Michel DUFLO

Université de Paris 7
UER de Mathématiques
Tour 45-55 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05