MARC CHAPERON

Quelques questions de géométrie symplectique

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 610, p. 231-249
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__231_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 610 Juin 1983

QUELQUES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE
[d'après, entre autres,
Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder]

par Marc CHAPERON

Au milieu des années 60, V.I. Arnold a énoncé une série de remarquables conjectures en géométrie symplectique globale, issues du "dernier théorème géométrique" de Poincaré. Malgré les efforts des géomètres, aucun progrès substantiel n'a été réalisé jusqu'à la fin de l'année 1982, où Conley et Zehnder ont fait faire à la théorie un pas décisif. Leur démonstration étant en définitive très simple, j'ai pu inclure dans cet exposé une introduction à la géométrie symplectique, de façon à placer les problèmes dans un contexte où ils paraissent naturels.

CONVENTIONS.– Les applications considérées sont de classe C^∞ (en règle générale, C^1 suffirait pour les plongements, les difféomorphismes et les champs de vecteurs, et C^2 pour les fonctions), et les espaces d'applications étudiés sont, si l'on y tient, munis de la topologie C^∞ (même remarque). Étant donné un espace d'applications F, un *chemin*, ou *arc différentiable* dans F est une application $t \mapsto f_t$, notée (f_t), de $I = [0,1]$ dans F, telle que l'application $(t,x) \longmapsto f_t(x)$ soit de classe C^∞ (même remarque). Lorsque F est un groupe d'élément neutre e, un tel chemin (f_t) dans F est dit *à support compact* si $f_t(x) = e(x)$ en dehors d'un compact. Enfin on note $E(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbf{R}$. Par *variété* on entend variété différentielle connexe de dimension finie.

0. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

(0.1) Une *structure symplectique* sur une variété X est la donnée d'une 2-forme fermée σ sur X, telle que la forme bilinéaire alternée $\sigma(x)$ soit non dégénérée pour tout $x \in X$ - ce qui implique que X soit de dimension paire $2n$. Une immersion $j : V \to X$ est dite *lagrangienne* lorsque l'espace tangent $Tj(T_yV)$ est son propre orthogonal pour $\sigma(j(y))$ quel que soit $y \in V$ - ce qui revient à dire que V est de dimension n et que $j^*\sigma = 0$. Cette notion étant invariante par difféomorphisme de V, on peut, si j est un plongement, dire que $j(V)$ est une *variété lagrangienne de* σ lorsque j - ou l'inclusion $j(V) \to X$ - est un plongement lagrangien. La structure symplectique (X,σ) est dite *exacte* lorsque σ admet une primitive λ ; les immersions $j : V \to X$ telles que $j^*\lambda$ soit exacte sont appelées *immersions lagrangiennes exactes* si $H^1(X;\mathbb{R}) = 0$ ou si le choix de λ est clair.

(0.2) Exemples

(0.2.1) Sur les surfaces, les structures symplectiques coïncident avec les formes-volume, et les variétés lagrangiennes avec les courbes.

(0.2.2) Nous noterons σ_n la structure symplectique définie sur $\mathbb{C}^n$ par $\sigma_n(z)(x,y) = \mathrm{Im}(x.\bar{y})$, où $(x,y) \longmapsto x.\bar{y}$ désigne le produit hermitien standard.

(0.2.3) Pour chaque variété M , le cotangent T^*M est muni de la structure symplectique exacte $d\lambda_M$, où la 1-*forme de Liouville* λ_M sur T^*M est définie par ce que $\alpha^*\lambda_M = \alpha$ pour tout germe α de 1-forme sur M - d'où il résulte qu'*une 1-forme sur* M *est un plongement lagrangien (resp. exact) de* M *dans* T^*M *si et seulement si elle est fermée (resp. exacte)*.

JUSQU'À LA FIN DE CETTE SECTION, ON SUPPOSE FIXÉE UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE (X,σ) .

(0.3) Automorphismes et isotopies de σ

(0.3.1) Étant donnée une structure symplectique (X',σ') , un *isomorphisme de* σ *sur* σ' est un difféomorphisme $\varphi : X \to X'$ tel que $\varphi^*\sigma' = \sigma$; cette dernière assertion équivaut évidemment à ce que *le graphe de* φ *soit une variété lagrangienne de la structure symplectique* $pr_2^*\sigma' - pr_1^*\sigma$ *sur* $X \times X'$, où $pr_1 : X \times X' \longrightarrow X$ et $pr_2 : X \times X' \longrightarrow X'$ désignent les projections. Un isomorphisme de σ sur σ est appelé *automorphisme de* σ . Nous noterons $\mathrm{Aut}(\sigma)$ le groupe des automorphismes de σ , et $\overset{2}{\sigma}$ la forme symplectique $pr_2^*\sigma - pr_1^*\sigma$ sur $X \times X$.

Exemple.— Soit $\xi \longrightarrow \xi_b$ l'isomorphisme de $(\mathbb{R}^n)^*$ sur $\mathbb{R}^n$ défini par la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$; le cotangent $T^*\mathbb{R}^n$ étant canoniquement identifié à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, il est clair que $(x,\xi) \longmapsto x + i\xi_b$ est un isomorphisme de $d\lambda_{\mathbb{R}^n}$ sur σ_n , envoyant la section nulle $\Sigma_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^n$.

(0.3.2) Un *automorphisme infinitésimal de* σ , comme son nom l'indique, est un champ de vecteurs ξ sur X tel que la dérivée de Lie $L_\xi\sigma$ soit identiquement nulle. Comme σ est fermée, cela signifie que la 1-forme $i_\xi\sigma$, produit intérieur de σ par ξ , est fermée. Lorsque $i_\xi\sigma$ est exacte, on dit que ξ est un *champ hamiltonien de* σ , et toute primitive de $i_\xi\sigma$ s'appelle un *hamiltonien de* ξ ; étant donné $h : X \to \mathbb{R}$, l'unique champ de vecteurs ξ sur X tel que $i_\xi\sigma = dh$ est le *gradient symplectique de* h . Nous noterons $\mathrm{aut}(\sigma)$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de σ , et $\mathrm{ham}(\sigma)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{aut}(\sigma)$ formée des champs hamiltoniens.

Remarque.— Le gradient symplectique d'une fonction à support compact engendrant évidemment un groupe à un paramètre d'automorphismes de σ , on voit que le groupe

$\mathrm{Aut}(\sigma)$ est très gros.

(0.3.3) Une *isotopie de* σ est un chemin (φ_t) dans $\mathrm{Aut}(\sigma)$ tel que

(1) $$\varphi_0 = \mathrm{id}_X .$$

Une *isotopie infinitésimale de* σ est un chemin (ξ_t) dans $\mathrm{aut}(\sigma)$. À toute isotopie (φ_t) de σ , on associe son *générateur infinitésimal* $(\dot\varphi_t)$, qui est l'isotopie infinitésimale (ξ_t) de σ définie par

(2) $$\frac{d}{dt}\varphi_t = \xi_t \circ \varphi_t \qquad \text{pour tout } t \in I .$$

Toute isotopie infinitésimale (ξ_t) de σ , *à support compact*, est le générateur infinitésimal d'une isotopie (φ_t) de σ , unique solution du problème de Cauchy (1)-(2), évidemment *à support compact*. Une isotopie (φ_t) de σ est dite *hamiltonienne* lorsque $\dot\varphi_t$ est dans $\mathrm{ham}(\sigma)$ pour tout t ; il existe alors un chemin (h_t) dans $\mathcal{E}(X)$ tel que $\dot\varphi_t$ soit pour chaque t le gradient symplectique de h_t , et l'on dit que (h_t) est un *hamiltonien de* (φ_t) . Toute isotopie hamiltonienne à support compact de σ admet un hamiltonien à support compact.

(0.4) Voisinages tubulaires symplectiques et prolongement des isotopies lagrangiennes

(0.4.1) THÉORÈME (Weinstein [29], [1]).— *Pour tout plongement lagrangien* $j : M \to X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de la section nulle de* T^*M *et un plongement* $J : U \to X$ *tel que* $J^*\sigma = d\lambda_M|U$ *et que, si* 0_M *désigne la* 1-*forme nulle sur* M , *on ait* $j = J \circ 0_M$. □

Un tel J sera appelé *voisinage tubulaire de* j *pour* σ lorsque l'ouvert $U \cap T^*_xM$ sera étoilé par rapport à l'origine pour tout $x \in M$, situation à laquelle on peut évidemment toujours se ramener.

COROLLAIRE.— (i) *Pour toute structure symplectique* ω *sur une variété compacte* M , *le groupe* $\mathrm{Aut}(\omega)$ *est localement connexe par arcs différentiables.*

(ii) *Pour toute variété compacte* V , *l'espace* $\mathrm{Pl}(V,\sigma)$ *des plongements lagrangiens de* V *dans* X *est localement connexe par arcs différentiables.*

Démonstration.— (i) Soit J un voisinage tubulaire de l'inclusion diagonale $j : x \mapsto (x,x)$ de M dans $M \times M$ pour $\overset{2}{\omega}$. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(\omega)$ assez C^1-proche de l'identité, on définit une isotopie (φ_t) de ω par le fait que le graphe de φ_t est $J(tJ^{-1}(\text{graphe}(\varphi)))$, en notant $v \mapsto tv$ l'endomorphisme du fibré vectoriel T^*M consistant à faire l'homothétie de rapport t dans chaque fibre.

(ii) Soit J un voisinage tubulaire de $j \in \mathrm{Pl}(V,\sigma)$. Pour tout $k \in \mathrm{Pl}(V,\sigma)$, assez C^1-proche de j , il existe (0.2.3) une 1-forme fermée α telle que $k(V) = J(\alpha(V))$, et une isotopie (φ_t) de V telle que $k = J \circ \alpha \circ \varphi_1$ - ceci parce que le groupe des difféomorphismes de V est localement connexe par arcs différentiables, ce qui se prouve comme (i). Le chemin différentiable $(J \circ t\alpha \circ \varphi_t)$ joint donc j à k dans $Pl(V,\sigma)$. □

Une *isotopie lagrangienne* d'une variété M dans (X,σ) est un chemin dans $Pl(M,\sigma)$. Une telle isotopie lagrangienne (j_t) est dite *exacte* lorsque, pour tout $t \in I$ et toute primitive λ de σ dans un voisinage de $j_t(M)$, la 1-forme $\frac{d}{dt} j_t^*\lambda$ est exacte sur M . Cette condition porte en fait sur les sous-variétés $j_t(M)$; ainsi, *lorsque* M *est compacte, une isotopie lagrangienne de* M *dans* (X,σ) *est exacte si et seulement si elle possède la propriété suivante : quels que soient* $t \in I$, *le voisinage tubulaire* J *de* j_t *et le réel* $s \in I$ *assez voisin de* t , *il existe* $f_s : M \to \mathbb{R}$ *telle que* $j_s(M) = J(df_s(M))$.

(0.4.2) THÉORÈME.— (i) *Une isotopie* (ψ_t) *de* X *est une isotopie hamiltonienne de* σ *si et seulement si* $(j_t : x \mapsto (x,\psi_t(x)))$ *est une isotopie lagrangienne exacte de* X *dans* $(X \times X, \overset{2}{\sigma})$.

(ii) (Prolongement des isotopies lagrangiennes exactes.) *Pour toute isotopie* (j_t) *d'une variété* compacte M *dans* X , *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (j_t) *est une isotopie lagrangienne exacte de* M *dans* (X,σ) .

b) j_0 *est lagrangien, et il existe une isotopie hamiltonienne* (φ_t) *de* σ , *à support compact, telle que* $j_t = \varphi_t \circ j_0$ *pour tout* $t \in I$.

Démonstration.— Sous l'hypothèse b), soit (h_t) un hamiltonien de (φ_t) . Pour toute primitive locale λ de σ , on a

$$\frac{d}{dt} j_t^*\lambda = j_0^* \frac{d}{dt} \varphi_t^*\lambda = j_0^*\varphi_t^*L_{\dot\varphi_t} \lambda = j_t^*(i_{\dot\varphi_t}\sigma + di_{\dot\varphi_t}\lambda) = d(j_t^*(h_t + i_{\dot\varphi_t}\lambda)) ,$$

d'où a). Aucune hypothèse de compacité n'intervenant dans ce qui précède, on en déduit (i) en prenant $\varphi_t(x,y) = (x,\psi_t(y))$.

Sous l'hypothèse a), on définit pour chaque $t \in I$ un champ de vecteurs ξ_t sur X au-dessus de $j_t(M)$ par $\xi_t \circ j_t = \frac{d}{dt} j_t$. Si λ est une primitive de σ dans un voisinage de $j_t(M)$, nulle sur $j_t(M)$ (cf. (0.4.1)), on a $j_t^*(i_{\xi_t}\sigma) = \frac{d}{dt}(j_t^*\lambda)$; comme j est exacte, on en déduit, en posant $\tilde{j}(t,x) = (t,j_t(x))$, l'existence d'une fonction $h^o : \tilde{j}(I \times M) \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante : pour tout $t \in I$, on a $j_t^*i_{\xi_t}\sigma = j_t^*dh_t^o$, où $h_t^o : j_t(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $h_t^o(x) = h^o(t,x)$. Il n'y a donc aucune obstruction à construire un chemin (h_t) à support compact dans $E(X)$, tel que $h_t^o = h_t|j_t(M)$ et $i_{\xi_t}\sigma = dh_t|j_t(M)$ pour tout $t \in I$. L'isotopie de σ qui a (h_t) pour hamiltonien vérifie évidemment b). □

Remarques.— 1) On prouve de même un théorème de prolongement des isotopies de Legendre [15] d'une structure de contact.

2) Il n'est pas en général possible de prolonger une isotopie lagrangienne de M dans (X,σ) par une isotopie de σ : si M est le cercle $\mathbb{T}^1$ et que X est le cylindre T^*M *moins* sa section nulle Σ_M , alors, pour tout plongement $j : M \to X$ isotope (comme plongement de M dans $T^*\mathbb{T}^1$) à la section nulle, l'aire A_j comprise entre $j(M)$ et Σ_M pour la mesure $|d\lambda_M|$ est invariante par automorphisme

de $\sigma = d\lambda_M|X$. Une isotopie (j_t) de tels plongements est donc prolongeable par une isotopie de σ seulement si A_{j_t} est constante, c'est-à-dire (si et) seulement si (j_t) est une isotopie (lagrangienne !) exacte.

1. LES CONJECTURES D'ARNOLD ET LE THÉORÈME DE CONLEY-ZEHNDER

(1.1) Préliminaires : l'invariant S de Calabi et le théorème de Banyaga

(1.1.1) Soit ω une structure symplectique sur une variété *compacte* M , et soit G_ω la composante neutre de $\mathrm{Aut}(\omega)$. D'après le corollaire (0.4.1) (i), G_ω est l'ensemble des extrémités φ_1 d'isotopies (φ_t) de σ . Pour chacune de celles-ci, la classe de cohomologie de la 1-forme fermée

$$\Sigma(\varphi_t) = \int_0^1 i_{\dot\varphi_t}\,\omega\,dt$$

ne dépend que de la classe d'homotopie (différentiable, d'après (0.4.1)) avec extrémités fixes du chemin (φ_t) dans G_ω . On définit donc ainsi un morphisme de groupes $\tilde S : \tilde G_\omega \longrightarrow H^1(M,\mathbb{R})$, où $\tilde G_\omega$ est le revêtement universel de G_ω . Ce morphisme est surjectif : toute 1-forme fermée α sur M est égale à $\Sigma(\varphi_t)$, où $i_{\dot\varphi_t}\omega = \alpha$ pour tout $t \in I$. On obtient donc par passage au quotient un morphisme surjectif $S : G_\omega \longrightarrow H^1(M,\mathbb{R})/\tilde S(\pi_1(G_\omega))$, appelé *invariant* S *de Calabi* [7].

(1.1.2) THÉORÈME (Banyaga [4]).— *Étant donné* $f \in G_\omega$ *, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une isotopie hamiltonienne* (φ_t) *de* ω *telle que* $f = \varphi_1$.

(ii) $S(f) = 0$.

(iii) f *appartient au sous-groupe* $[G_\omega, G_\omega]$ *des commutateurs de* G_ω .

L'équivalence entre (i) et (ii) est facile à établir, en remarquant que Ker S est connexe par arcs différentiables et que tout chemin de id_M à f dans Ker S est une isotopie hamiltonienne de ω . En revanche, l'équivalence avec (iii), qui dépasse de beaucoup le niveau élémentaire du présent exposé, repose en particulier sur un théorème profond d'Herman [20]. □

Il est donc raisonnable, suivant [3], de dire que $f \in \mathrm{Aut}(\omega)$ est *homologue à l'identité* lorsqu'il satisfait (i). Nous allons maintenant définir une notion analogue pour les plongements, en nous restreignant à un cas simple :

(1.1.3) THÉORÈME.— *Soient* M *une variété compacte, et* $j \in \mathrm{Pl}(M, d\lambda_M)$ *dans la composante connexe de la* 1-*forme nulle* 0_M . *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une isotopie lagrangienne exacte* (j_t) *de* M *dans* T*M *telle que* $j_0 = 0_M$ *et* $j_1 = j$.

(ii) $j^*\lambda_M$ *est exacte.*

Démonstration.— Il est clair que (i) entraîne (ii). Sous l'hypothèse (ii), il existe, d'après le corollaire 0.4.1, un chemin (k_t) de 0_M à j dans $Pl(M,d\lambda_M)$. Désignons par π la projection canonique $T^*M \longrightarrow M$, et supposons d'abord M orientable. Une métrique riemannienne étant fixée sur M , soit α_t , $t \in I$, l'unique 1-forme harmonique dans la classe de cohomologie de $-k_t^*\lambda$, et soit ξ_t l'élément de $aut(d\lambda_M)$ défini par $i_{\xi_t} d\lambda_M = \pi^*\alpha_t$. Il est clair que chaque ξ_t engendre un groupe à un paramètre $(\varphi_t^s)_{s\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de $d\lambda_M$, et que $(j_t) = (\varphi_t^1 \circ k_t)$ est un chemin de 0_M à j dans $Pl(M,d\lambda_M)$. Pour prouver (i), il s'agit donc de montrer que j_t est pour tout t un plongement lagrangien exact. Or, on a

$$\varphi_t^{1*}\lambda - \lambda = \int_0^1 \frac{d}{ds}\, \varphi_t^{s*}\lambda ds = \int_0^1 \varphi_t^{s*}(\pi^*\alpha_t + di_{\xi_t}\lambda) ds \ ,$$

d'où l'on déduit, $\varphi_t^{s*}\pi^*\alpha_t$ étant évidemment cohomologue à $\pi^*\alpha_t$ pour tout s , que la 1-forme fermée $\varphi_t^{1*}\lambda - \lambda$ est cohomologue à $\pi^*\alpha_t$. Par conséquent, $j_t^*\lambda$ est cohomologue à $k_t^*(\lambda + \pi^*\alpha_t)$, d'où le résultat cherché, $(\pi \circ k_t)^*\alpha_t$ étant cohomologue à $(\pi \circ 0_M)^*\alpha_t = \alpha_t$. Dans le cas général, on recourt au revêtement orienté de M . □

Sous les hypothèses du théorème, nous dirons (par analogie avec (1.1.2) et sans raison bien péremptoire) que $j \in Pl(M,d\lambda_M)$ est *homologue à la section nulle* lorsqu'il satisfait (i).

(1.2) Vif du sujet

(1.2.1) Étant donnée une variété compacte M , rappelons que $CL(M)$ ("*cup length*" de M) est par définition le plus grand entier k pour lequel il existe des formes fermées $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ de degré > 0 sur M telles que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ ne soit pas un cobord. Désignons de même par $SB(M)$ la somme des nombres de Betty ([3]) de M . Par exemple, si $M = \mathbb{T}^n$ (resp. $\mathbb{S}_n$), on a évidemment $CL(M) = n$ et $SB(M) = 2^n$ (resp. $CL(M) + 1 = SB(M) = 2$). Suivant [30], nous dirons qu'une fonction sur M (resp. un automorphisme d'une structure symplectique sur M , deux plongements lagrangiens de M dans une même structure symplectique) a *assez de points critiques* (resp. a *assez de points fixes*, ont *assez de points d'intersection*) si ceux-ci sont au moins $CL(M) + 1$, et au moins $SB(M)$ lorsqu'aucun d'entre eux n'est dégénéré. Les théorèmes de Morse et de Lyusternik-Schnirelmann [6] affirment qu'*une fonction sur* M *a toujours assez de points critiques* - la meilleure borne n'étant d'ailleurs pas en général $CL(M) + 1$.

(1.2.2) CONJECTURE [3].— *Étant donnée une structure symplectique* ω *sur une variété compacte* M *, tout* $\varphi \in Aut(\omega)$ *, homologue à l'identité, a assez de points fixes.*

Une première raison de croire à cette conjecture est qu'elle est vraie lorsque φ est sur le groupe à un paramètre engendré par un champ hamiltonien ξ (les points critiques d'un hamiltonien de ξ étant des points fixes de φ). Une seconde raison, pas très sérieuse, est qu'elle est vérifiée lorsque φ est assez voisin de l'identité, d'après la dernière assertion de (0.4.1) et le théorème 0.4.2 (i) (*). Une troisième raison est qu'elle est vraie si $M = \mathbb{S}_2$ - on a en fait un bien meilleur résultat :

THÉORÈME.- *Tout homéomorphisme* φ *de la sphère* $\mathbb{S}_2$, *homotope à l'identité et conservant une mesure de probabilité* μ *qui charge les ouverts non vides, a au moins deux points fixes.*

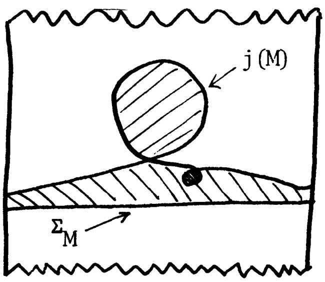
Démonstration.- D'après Lefschetz [14], φ a au moins un point fixe a . Par conséquent, $g = \varphi|\mathbb{S}_2\smallsetminus\{a\}$ s'identifie à un homéomorphisme du plan. Si g n'avait pas de point fixe, le théorème de translation de Brouwer ([18], [25]) impliquerait l'existence d'un ouvert non vide U de $\mathbb{S}_2$ tel que les ouverts $g^n(U) = \varphi^n(U)$, $n \in \mathbb{N}$, soient deux à deux disjoints. On aurait donc $\sum_{0\leq n\leq N}\mu(\varphi^n(U)) = (N+1)\mu(U) \leq \mu(\mathbb{S}_2) = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'où $\mu(U) = 0$. □

Par ailleurs, l'existence de groupes à un paramètre de translations symplectiques du tore $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n + i\mathbb{Z}^n)$ pour la *structure symplectique* standard ω_n , image canonique de σ_n , montre la nécessité de l'hypothèse d'homologie à l'identité. L'objet principal de cet exposé est le résultat suivant, qui sera prouvé dans la section 2 :

(1.2.3) THÉORÈME (Conley-Zehnder [12]).- *La conjecture* (1.2.2) *est vraie si* $(M,\omega) = (\mathbb{T}^{2n},\omega_n)$ - *voir* (2.3) *pour une généralisation.*

(1.2.4) CONJECTURE.- *Soit* M *une variété compacte. Si* $j \in \mathrm{Pl}(M,d\lambda_M)$ *est homologue à la section nulle, alors* $j(M)$ *et* $\Sigma_M = 0_M(M)$ *ont assez de points d'intersection.*

Pour les j assez C^1-proches de 0_M , cette conjecture est vraie (*) - d'après (0.2.3), ce n'est qu'une reformulation des théorèmes de Morse et Lyusternik-Schnirelmann. Par ailleurs, elle est *trivialement vérifiée* si $M = \mathbb{T}^1$: sur le cylindre $T^*\mathbb{T}^1$, les aires comprises entre $j(M)$ et Σ_M de part et d'autre du cercle Σ_M doivent être égales. En outre, la conjecture est *trivialement fausse lorsqu'on y remplace les plongements par des immersions* : le cylindre $T^*\mathbb{T}^1$ étant coupé suivant une génératrice et déroulé sur un plan, voici l'image d'une immersion $j : M \longrightarrow T^*M$, homotope à 0_M parmi les immersions lagrangiennes exactes, et telle que $j(M) \cap \Sigma_M = \emptyset$ (l'exactitude de $j^*\lambda$ signifie que les deux régions hachurées ont la même aire, la petite boucle étant comptée deux fois) :



(*) A. Weinstein annonce d'ailleurs [30] que (1.2.2) et (1.2.4) sont vraies dans des voisinages C^0 de l'identité et de la section nulle respectivement.

(1.2.5) THÉORÈME [8].— *La conjecture 1.2.4 est vraie lorsque* M *admet une métrique riemannienne plate - donc pour* $M = \mathbb{T}^n$.

On prouve sans peine que ce résultat implique le théorème 1.2.3 ; il sera établi dans la section 2. Pour terminer, voici une conjecture dont on ne sait *rien* pour $n > 1$ (si $n = 1$, elle résulte d'un argument d'aire trivial), et dont la véracité entraînerait entre autres l'existence de plusieurs structures symplectiques non isomorphes sur $\mathbb{C}^n$ pour $n > 1$.

(1.2.6) CONJECTURE.— *Il n'existe pas de plongement lagrangien exact d'une variété compacte dans* $(\mathbb{C}^n,\sigma_n)$.

2. DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

(2.1) Idée et partie analytique de la démonstration (cas des tores)

(2.1.1) Pourquoi (1.2.5) implique (1.2.3). Soit $p : \mathbb{C}^n \to M = \mathbb{T}^{2n}$ la projection canonique. Le revêtement $\overset{2}{p} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow M \times M$ défini par $\overset{2}{p}(z_1,z_2) = (p(\overline{z}_1 + i\overline{z}_2),p(z_1 + iz_2))$ vérifie $\overset{2}{p}(\mathbb{R}^{2n}) = \Delta M$ et $\overset{2}{p}{}^*\overset{2}{\omega} = 2\sigma_{2n}$. À l'aide de l'isomorphisme (0.3.1), on en déduit par passage au quotient un revêtement $q : T^*M \longrightarrow M \times M$ tel que $\overset{*2}{q\omega} = 2d\lambda_M$ et $q(\Sigma_M) = \Delta M$. Une isotopie hamiltonienne (φ_t) de M , d'extrémité φ , étant choisie, on obtient donc (1.2.3) en appliquant (1.2.5) à l'extrémité $j = j_1$ de l'isotopie (j_t) de M dans T^*M , d'origine 0_M , obtenue en relevant $(x \longmapsto (x,\varphi_t(x)))$, et qui est lagrangienne exacte d'après le théorème 0.4.2 (i).

(2.1.2) Introduction : aperçu de la preuve de Conley et Zehnder [12]. Étant donné un automorphisme φ , homologue à l'identité, d'une structure symplectique ω sur une variété compacte M , on montre sans peine l'existence d'une isotopie hamiltonienne (φ_t) de ω , d'extrémité φ , et dont le hamiltonien est la restriction à I d'un arc différentiable $(h_t) : \mathbb{R} \longrightarrow E(M)$, périodique de période 1 . Les points fixes de φ sont donc en bijection avec les solutions de période 1 du système différentiel (sur M) $\frac{d}{dt}x(t) = \xi_t(x(t))$, où $i_{\xi_t}\omega = dh_t$. Or, ces solutions sont exactement les zéros de la 1-forme fermée α définie sur l'espace $\Omega(M)$ des lacets $\gamma : I \to M$ de classe H_1 par

$$\alpha(\gamma)(\delta) = \int_0^1 (\omega(\gamma'(t),\delta(t)) - dh_t(\gamma(t)).\,\delta(t))dt \tag{3}$$

pour tout $\delta \in T_\gamma\Omega(M)$, c'est-à-dire tout $\delta : I \to TM$ de classe H_1 se projetant suivant γ . Si $(M,\omega) = (\mathbb{T}^{2n},\omega_n)$, la restriction α_0 de α à la composante $\Omega_0(M)$ de $\Omega(M)$ formée des lacets homotopes à des points est de la forme $\alpha_0 = dF$, où F est une fonction sur $\Omega_0(M)$, et, surtout, la classique méthode de Lyapounov-Schmidt permet de voir que les points critiques de F sont en bijection avec ceux d'une fonction f sur $M \times \mathbb{R}^N$, possédant les propriétés requises pour conclure.

Dans ce qui précède, l'hypothèse de périodicité de (h_t) a une importance psychologique extrême : c'est vraisemblablement elle qui a suggéré à Conley et Zehnder l'usage de méthodes mises au point pour dénombrer les orbites périodiques de systèmes hamiltoniens. En revanche, du point de vue logique, cette hypothèse de périodicité est rigoureusement inutile, remarque qui permet, suivant [8], de *recopier* la preuve de Conley et Zehnder pour l'appliquer à un problème qui n'a plus aucun rapport avec la recherche d'orbites périodiques :

(2.1.3) Formulation du problème variationnel : Posons $M = \mathbb{T}^n$, $X = T^*\mathbb{T}^n$, $\sigma = d\lambda_M$, et désignons par $q : \mathbb{C}^n \to X$ le revêtement déduit du revêtement canonique $T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow T^*M$ par l'isomorphisme (0.3.1), qui vérifie donc $q(\mathbb{R}^n) = \Sigma_M$ et $q^*\sigma = \sigma_n$. D'après le théorème 0.4.2 (ii), il existe une isotopie hamiltonienne (φ_t) telle que l'isotopie $(j_t) = (\varphi_t \circ 0_M)$ vérifie $j_1 = j$, et admettant un hamiltonien (h_t) à support compact. Soit Γ l'espace des chemins $\gamma : I \to X$ de classe H_1 qui ont leurs extrémités dans $j_0(M)$; *les points de* $j_0(M) \cap j_1(M)$ *sont évidemment en bijection avec* les chemins $\gamma : I \to X$, de la forme $\gamma(t) = \varphi_t(x)$ avec $x \in j_0(M)$ et $\varphi_1(x) \in j_0(M)$, c'est-à-dire (un chemin de classe H_1 étant une primitive de sa dérivée) avec les $\gamma \in \Gamma$ solutions du système différentiel $i_{\gamma'(t)}\sigma = dh_t(\gamma(t))$ - ce sont *les zéros de la* 1-*forme* α *définie sur* Γ *par* (3).

Lemme.– La 1-*forme* α *est exacte, de primitive* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *donnée par* $f(\gamma) = \int_0^1(-\gamma^*\lambda_M - h_t(\gamma(t))dt)$. □

Soit $\tilde{\Gamma}$ l'espace vectoriel des chemins $u : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de classe H_1 qui ont leurs extrémités dans $\mathbb{R}^n$, et soit $q_* : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ le revêtement $u \mapsto q \circ u$. Si λ désigne la primitive de σ_n définie par $\lambda(z) = i_z\sigma_n(z)/2$, on vérifie que $\tilde{f} = f \circ q_*$ est donnée par

$$\tilde{f}(u) = \int_0^1(-u^*\lambda - h_t(q(u(t)))dt) . \tag{4}$$

(2.1.4) Réduction à la dimension finie : Notons $(z,z') \longrightarrow (z|z') = \mathrm{Re}(z.\bar{z}')$ le produit euclidien standard sur $\mathbb{C}^n$, et munissons $H = L_2(I,\mathbb{C}^n)$ de sa structure d'espace hilbertien réel, définie par le produit scalaire $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle = \int_0^1(u(t)|v(t))dt$. Le sous-espace $\tilde{\Gamma}$ est dense dans H. Soient $A : \tilde{\Gamma} \longrightarrow H$ l'opérateur linéaire défini par $Au = -i\dot{u}$, et $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto \int_0^1 h_t(q(u(t)))dt$; comme on a $\sigma_n(z)(h,h') = (h|ih')$ pour $z, h, h' \in \mathbb{C}^n$, la formule (4) s'écrit

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{2}\langle Au,u\rangle - \Phi(u) . \tag{4 bis}$$

L'opérateur non borné A est auto-adjoint pour $\langle .,. \rangle$, son spectre est formé des valeurs propres πm, $m \in \mathbb{Z}$, et, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre πm est $E_m = u_m\mathbb{R}^n$, où $u_m(t) = e^{tmi\pi}$ pour $t \in I$. L'espace H est somme directe hilbertienne des E_m ; si l'on note $Y_N = \bigoplus_{|m|>N} E_m$, $N \in \mathbb{N}$, l'image de A est l'orthogonal Y_0 de son noyau E_0. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, l'application $B_N : Y_N \longrightarrow Y_N \cap \widetilde{\Gamma}$ inverse de $A|Y_N \cap \widetilde{\Gamma}$ est un opérateur compact de Y_N : tout $v \in Y_N$ s'écrit de manière unique $v = \sum_{|m|>N} u_m a_m$, $a_m \in \mathbb{R}^n$, et l'on a alors

(5) $$B_N v = \sum_{|m|>N} u_m a_m / \pi m .$$

Lemme.— Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $N \geq N_0$ *et tout* $z \in Z_N = \bigoplus_{|m|\leq N} E_m$, *si l'on identifie* $\widetilde{\Gamma} = Z_N \oplus (Y_N \cap \widetilde{\Gamma})$ *à* $Z_N \times (Y_N \cap \widetilde{\Gamma})$, *l'équation*

(6) $$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(z,y) = 0$$

admette une unique solution $y = v(z) \in Y_N \cap \widetilde{\Gamma}$. *En outre, l'application* $v : Z_N \longrightarrow Y_N$ *ainsi définie est bornée ainsi que sa dérivée.*

Démonstration.— Si P_N désigne la projection orthogonale de H sur Y_N , (6) équivaut à

(6 bis) $$y = B_N P_N \nabla\Phi(z+y) \quad \text{et} \quad y \in Y_N ,$$

où $\nabla\Phi$ est le gradient de Φ pour $<.,.>$, c'est-à-dire que $\nabla\Phi(u)(t) = \nabla(h_t \circ q)(u(t))$, où $\nabla(h_t \circ q)$ est le gradient de $h_t \circ q$ pour $(.|.)$. L'hypothèse faite sur (h_t) *implique que* $\nabla\Phi$ *et sa dérivée soient bornées* ; d'après (5), il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $N \geq N_0$, l'application $y \longmapsto B_N P_N \nabla\Phi(z+y)$ soit pour chaque $z \in Z_N$ une contraction stricte de Y_N . L'existence et l'unicité de v étant ainsi prouvées, sa différentiabilité résulte du théorème des fonctions implicites ; enfin, v et sa dérivée sont bornées d'après ce qui vient d'être dit de $\nabla\Phi$. □

COROLLAIRE.— *Un entier* $N \geq N_0$ *étant choisi, posons* $E^+ = \bigoplus_{0<m\leq N} E_m$, $E^- = \bigoplus_{0<m\leq N} E_{-m}$, *et, pour chaque* $z \in Z_N$, *soient* z_+ , z_- *et* z_0 *ses projections orthogonales sur* E^+ , E^- *et* E_0 *respectivement. On identifie* $q_*(Z_N) \subset \Gamma$ *à* $M \times E^+ \times E^-$ *par l'application* $q_* z \longmapsto (q(z_0), z_+, z_-)$. *Les points critiques de* f *sont en bijection avec ceux de la fonction* g *sur* $M \times E^+ \times E^-$ *définie, modulo cette identification, par*

(7) $$g(q \circ z) = \widetilde{f}(z+v(z)) = \frac{1}{2}(<Az,z> + <Av(z),v(z)>) - \Phi(z+v(z)) .$$ □

(2.2) <u>Partie topologique de la démonstration</u> (<u>cas des tores</u>)

A peu près n'importe quel argument classique du calcul des variations nous permettrait maintenant de conclure : Conley et Zehnder utilisent la théorie de Conley ([11], [28]), sans doute la meilleure approche de ces problèmes ; suivant Weinstein [30], nous allons plutôt nous ramener à la situation familière du théorème de Morse-Lyusternik-Schnirelmann.

Sous les hypothèses du corollaire 2.1.4, *on définit une norme euclidienne* $|.|$ *sur* $E^+ \oplus E^-$ *par*

$$|z|^2 = <Az_+,z_+> - <Az_-,z_-> .$$

Soient g_0 et h les deux fonctions sur $q_*(Z_N)$ données par

$$g_0(\gamma) = |\gamma_+|^2 - |\gamma_-|^2 \quad \text{et} \quad h(\gamma) = g(\gamma) - g_0(\gamma) \ ,$$

où l'on a noté γ_+ et γ_- les projections de $\gamma \in q_*(Z_N) = M \times E^+ \times E^-$ sur E^+ et E^-. Du fait que $\nabla\Phi$ et v sont bornées ainsi que leurs dérivées premières, il résulte de (7) que *la dérivée de* h *est bornée*. Par conséquent, si $\vartheta : \mathbb{R} \to [0,1]$ est telle que $\vartheta^{-1}(1) =]-\infty,1]$ et $\vartheta^{-1}(0) = [4,\infty[$, et si $s \in]0,1]$ est assez petit, *la fonction* g_1 *définie sur* q_*Z_N *par*

(8) $$g_1(\gamma) = g_0(\gamma) + \vartheta(s^2|(\gamma_+,\gamma_-)|^2)h(\gamma)$$

a les mêmes points critiques que g , *et ceux-ci sont contenus dans*

(9) $$g_1^{-1}(]-b,b[) = g_0^{-1}(]-b,b[) \ , \qquad \text{où} \quad b = 9/s^2.$$

Soient S^+ la sphère $\{(x,t) : |x|^2 + |t-1|^2 = 1\} \subset E^+ \times \mathbb{R}$, et $h^+ : S^+ \to \mathbb{R}$ la fonction-hauteur $(x,t) \mapsto t$. On définit un difféomorphisme φ^+ de $B^+ = \{z : s|z| \leq 3\} \subset E^+$ sur $(h^+)^{-1}(]-\infty,1])$, envoyant $|.|^2$ sur bh^+ par $\varphi^+(z) = (\lambda^+(z)z , \frac{|z|^2}{b})$ et $\lambda^+ : B^+ \longrightarrow]0,\infty[$. Les notations S^- et h^- étant définies de même à partir de E^- , on obtient un difféomorphisme φ^- de $B^- = \{z : s|z| \leq 6\} \subset E^-$ sur $(h^-)^{-1}(]-\infty,1])$, envoyant $|.|^2$ sur $4bh^-$, par $\varphi^-(z) = (\lambda^-(z)z , \frac{|z|^2}{4b})$ et $\lambda^- : B^- \longrightarrow]0,\infty[$. Si $\varphi : M \times B^+ \times B^- \longrightarrow M \times S^+ \times S^-$ est donné par $\varphi(x,y,z) = (x,\varphi^+(y),\varphi^-(z))$, soit g_2 la fonction sur $M \times S^+ \times S^-$ définie par

(10) $$\begin{cases} g_2 \circ \varphi = g_1|M \times B^+ \times B^- \\ g_2(x,y,z) = b(h^+(y) - 4h^-(z)) \quad \text{pour} \quad \max\{h^+(y),h^-(z)\} \geq 1 \ . \end{cases}$$

Il est clair que g_2 *est différentiable, et a pour points critiques*

- Les trois variétés $M \times \{(0,0)\} \times \{(0,2)\}$, $M \times \{(0,2)\} \times \{(0,2)\}$ et $M \times \{(0,2)\} \times \{(0,0)\}$, correspondant respectivement aux valeurs critiques $-8b$, $-6b$ et $2b$.

- Les images par φ des points critiques de g_2 (c'est-à-dire de g), contenues d'après (9) dans $g_2^{-1}(]-b,b[)$.

Si l'on note $V_a = g_2^{-1}(]-\infty,a])$ pour $a \in \mathbb{R}$, le théorème de Morse affirme que g *possède au moins* $SB(V_b,V_{-b})$ *points critiques, comptés avec leur multiplicité* - l'entier $SB(V_b,V_{-b})$ étant défini comme dans (1.2.1), mais à partir de la cohomologie réelle relative $H^\bullet(V_b,V_{-b})$. Or, si $h : S^+ \times S^- \to \mathbb{R}$ est donnée par $h(y,z) = b(h^+(y) - 4h^-(z))$, il résulte de (8), (9) et (10) que

$$V_b = M \times W_b \quad \text{et} \quad V_{-b} = M \times W_{-b} \ , \qquad \text{où} \quad W_a = h^{-1}(]-\infty,a]) \ .$$

Du fait que $h^{-1}([-b,b])$ contient un seul point critique de h , d'indice $nN = \dim S^+ = \dim S^- = p$, on a ([19], p. 188)

$$H^q(W_b,W_{-b}) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad q \neq p \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad q = p \ , \end{cases}$$

et l'isomorphisme de Künneth ([19], p. 196)

$$H^\bullet(W_b, W_{-b}) \otimes H^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(V_b, V_{-b})$$

montre que $SB(V_b, V_{-b}) = 2^n$, d'où (1.2.5) dans les cas génériques. On termine en remplaçant dans ce qui précède l'argument de Morse par celui de Lyusternik-Schnirelmann. □

(2.3) Idée de la démonstration pour les variétés plates générales

Il ne sera question que du théorème 1.2.5, le cas du théorème 1.2.3 étant tout à fait semblable (de manière précise, on prouverait de même que *la conjecture 1.2.2 est vraie lorsqu'il existe sur* M *une métrique riemannienne plate pour laquelle* ω *est représentée par une structure presque complexe*). Pour toute variété riemannienne M compacte et plate, il existe ([14], tome 4, p. 393) un revêtement $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ envoyant la métrique standard de $\mathbb{R}^n$ sur celle de M. Soit $\pi : H_1(I,M) \longrightarrow M$ la projection $\gamma \longmapsto \gamma(0)$. Nous allons identifier π à une fibration vectorielle, de fibre $\pi^{-1}(a) = L_2(I,T_aM)$: à chaque $\gamma : I \to M$ d'origine a, associons son *développement de Cartan* $C\gamma : I \longrightarrow T_aM$, défini comme suit : pour chaque t, on obtient $C\gamma(t)$ par transport parallèle de $\gamma'(t)$ le long de γ. En d'autres termes, si $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et si $\tilde{a} = \tilde{\gamma}(0)$, on a $C\gamma(t) = T_{\tilde{a}}p.\tilde{\gamma}'(t)$, ce qui prouve que $\gamma \longmapsto C\gamma$ est une bijection de $H_1(I,M)$ sur $TM \otimes L_2$ où $L_2 = L_2(I,\mathbb{R})$.

Soient Γ l'espace des chemins $\gamma \in H_1(I,T^*M)$ à extrémités dans Σ_M, et $H_{1c} = \{\gamma \in H_1(I,\mathbb{R}) : \gamma(0) = \gamma(1) = 0\}$. On définit de même une bijection $C' : \Gamma \longrightarrow (TM \otimes L_2) \oplus_M (T^*M \otimes H_{1c})$ par $C'\gamma = (C\tau_*\gamma, B\gamma)$, où $\tau : T^*M \longrightarrow M$ est la projection canonique et $B\gamma(t) \in T^*_{\tau(\gamma(0))}M$ s'obtient pour chaque t par transport parallèle de $\gamma(t)$ le long de $\tau \circ \gamma$.

Pour tout $a \in M$, notons $v \to v^\#$ l'isomorphisme de T_aM sur T^*_aM défini par la métrique, et $\xi \longmapsto \xi_b$ son inverse. On définit une structure complexe J_a sur $T_aM \oplus T^*_aM$ par $J_a(v,\xi) = (-\xi_b, v^\#)$. En remplaçant chaque élément de $T_aM \otimes L_2$, $a \in M$, par sa primitive de moyenne nulle et en utilisant la structure presque complexe J, on déduit finalement de C' un isomorphisme de M-fibrés

$$\begin{cases} C'' : \Gamma \longrightarrow TM \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma_0 \text{ , où} \\ \Gamma_0 = \{\gamma \in H_1(I,\mathbb{C}) : \operatorname{Im} \gamma(0) = \operatorname{Im} \gamma(1) = \operatorname{Re}\int_0^1 \gamma(t)\,dt = 0\} \text{ .} \end{cases}$$

Soit $q : \mathbb{C}^n \longrightarrow T^*M$ le revêtement déduit de p grâce à l'identification (0.3.1), évidemment tel que $q(\mathbb{R}^n) = \Sigma_M$ et $q^*d\lambda_M = \sigma_n$. Avec les notations de (2.1.3)-(2.1.4), pour tout $\tilde{\gamma} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \otimes u_m \in \tilde{\Gamma}$, $a_m \in \mathbb{R}^n$, on a

$$C''(q \circ \tilde{\gamma}) = \sum_{m\neq 0} (T_{\tilde{\gamma}(0)}p.a_m) \otimes u_m \text{ .}$$

Le même argument que dans (2.1.3)-(2.1.4) montre l'existence d'un entier $N \geq 0$ tel que les points d'intersection cherchés soient en bijection avec les points critiques d'une fonction

$$g : TM \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{0<|m|\leq N} \mathbb{R}u_m \to \mathbb{R} .$$

En remplaçant dans (2.2) l'isomorphisme de Künneth par l'isomorphisme de Thom, on conclut comme précédemment. □

Remarque.– Pour les variétés plates, l'isomorphisme C'' pourrait être construit plus rapidement à l'aide de l'exponentielle, mais la méthode employée est tout à fait générale, l'hypothèse de platitude n'intervenant que dans la réduction à la dimension finie.

3. CONSÉQUENCES, REMARQUES ET QUESTIONS

(3.1) Cas des surfaces

(3.1.1) Surfaces sans bord. D'après Moser [26], toute structure symplectique ω sur $\mathbb{T}^2$ est isomorphe à $\lambda\omega_1$ pour un réel $\lambda \neq 0$, d'où l'on déduit par (1.2.3) que *la conjecture* 1.2.2 *est vraie si* $M = \mathbb{T}^2$. Toujours d'après Moser, le théorème de classification des surfaces de Riemann entraîne le résultat suivant : pour toute forme-volume ω sur une surface compacte M de genre > 1 , il existe un revêtement q de M par le disque de Poincaré $\mathbb{D}$ tel que $q^*\omega$ soit le volume de $\mathbb{D}$ pour sa métrique hyperbolique standard, et qu'en outre celle-ci passe au quotient par q . Il est probablement possible d'en déduire, par une variante de (2.3), la conjecture 1.2.2 pour les surfaces de genre > 1 . Une démonstration entièrement différente de ce résultat a été proposée par Eliashberg [16]. Le théorème 1.2.2 (voir aussi (3.1.2)) invite à se demander s'il ne s'agit pas d'une propriété *purement topologique* (Kerékjártó [25] avait d'ailleurs annoncé quelque chose d'avoisinant). De manière précise, soient $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ et $p_1 : M_1 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to M$ et $p_2 : M_2 = \mathbb{C}/i\mathbb{Z} \to M$ les projections canoniques. Etant donnée l'extrémité φ d'une isotopie (φ_t) de ω_1 , soit $\tilde{\varphi}_j$, $j = 1,2$, l'extrémité de l'isotopie de M_j obtenue en relevant (φ_t) par p_j . Désignons par C_1 le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset M_1$, par C_2 le cercle $i\mathbb{R}/i\mathbb{Z} \subset M_2$, et par $C_j^!$, $j = 1,2$, un autre relèvement de $p_j(C_j)$ par p_j tel que $C_j \cap \tilde{\varphi}_j(C_j^!) = C_j \cap C_j^! = \emptyset$. Il est clair (cf. (0.4.2) (ii) (b)) que φ *est homologue à l'identité si et seulement si (en changeant éventuellement d'isotopie* (φ_t)), *pour* $j = 1,2$, *les deux anneaux sur* M_j *limités par* C_j *et* $C_j^!$ *d'une part, par* C_j *et* $\tilde{\varphi}_j(C_j^!)$ *d'autre part, ont la même aire pour* $p_j^*|\omega_1|$. Si l'on prend cette propriété pour définition, elle a un sens pour tout *homéomorphisme* φ de M , *homotope* à l'identité et préservant la *mesure* $|\omega_1|$; nous dirons alors que φ est un *automorphisme continu de* $|\omega_1|$ *homologue à l'identité*. Enfin, rien n'empêche de remplacer dans cette définition $|\omega_1|$ par une autre mesure positive finie, ce qui nous permet enfin d'énoncer la

CONJECTURE.– *Soit* μ *une mesure positive finie sur le tore* $\mathbb{T}^2$, *chargeant les ouverts non vides. Tout automorphisme continu de* μ , *homologue à l'identité, admet* *au moins trois points fixes.* □

Le lecteur intéressé pourra trouver dans [17] une définition topologique plus propre et plus générale de l'invariant de Calabi en dimension 2 .

(3.1.2) Le théorème de Poincaré-Birkhoff. Soient $\mathbb{A}$ l'anneau $\mathbb{T}^1 \times I$ et $p : \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ son revêtement universel standard, où $\tilde{\mathbb{A}}$ désigne le ruban $\mathbb{R} \times I$. Une *distorsion de* $\mathbb{A}$ est un homéomorphisme φ qui se relève par p suivant un homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\mathbb{A}}$ possédant la propriété suivante : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{\varphi}(\vartheta,j) = (\tilde{\varphi}_j(\vartheta),j)$ pour $j = 0,1$, avec $\tilde{\varphi}_0(\vartheta) < \vartheta < \tilde{\varphi}_1(\vartheta)$. L'origine de tout ce qui précède est le résultat suivant, dont Birkhoff [5] et Chenciner [9] ont d'ailleurs établi de bien meilleures versions :

THÉORÈME.— *Toute distorsion* φ *de* $\mathbb{A}$, *préservant une mesure positive finie* μ *qui charge les ouverts non vides, a au moins deux points fixes.*

Ce théorème est issu de [27], la démonstration donnée dans [25] étant sans doute la plus conforme aux idées de Poincaré. □

PROPOSITION.— *Le théorème précédent serait une conséquence de la conjecture* 3.1.1, *sous l'hypothèse supplémentaire suivante : pour* $j = 0,1$, *l'homéomorphisme* φ_j *de* $\mathbb{T}^1$ *au-dessous de* $\tilde{\varphi}_j$ *est de la forme* $\varphi_j = \psi_j^{-1} \circ R_j \circ \psi_j$, *où* ψ_j *est un homéomorphisme de* $\mathbb{T}^1$ *et* R_j *une rotation (le théorème de Denjoy* [21] *affirme que c'est le cas dès que* φ_j *est un* C^2*-difféomorphisme, de nombre de rotation irrationnel).*

Démonstration.— L'idée est de recoller deux exemplaires de l'anneau $\mathbb{A}$ pour en faire un tore, et de considérer l'homéomorphisme de ce tore égal à φ sur chacun des deux anneaux. Comme on n'obtient pas en général ainsi un homéomorphisme homologue à l'identité, il faut "épaissir" un peu les bords de $\mathbb{A}$. De manière précise, soient a et b deux réels ≥ 0 , $J = [-1-a-b\,,\,1+a+b]$, $\sigma : \mathbb{T}^1 \times J \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times J$ la symétrie $(\vartheta,t) \longmapsto (\vartheta,-t)$ et $\tilde{\Phi}_{a,b}$ l'homéomorphisme σ-invariant de $\mathbb{T}^1 \times J$ défini par

$$\tilde{\Phi}_{a,b}(\vartheta,t) = \begin{cases} (\varphi_0(\vartheta),t) & \text{pour } 0 \leq t \leq a \\ \varphi(\vartheta,t-a) + (0,a) & \text{pour } a \leq t \leq 1+a \\ (\varphi_1(\vartheta),t) & \text{pour } 1+a \leq t \leq 1+a+b\,. \end{cases}$$

Soient m la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^1$, $\tilde{m}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $\tilde{\nu}_{a,b}$ la mesure σ-invariante sur $\mathbb{T}^1 \times J$ égale à $\psi_0^* m \otimes \tilde{m}$ sur $\mathbb{T}^1 \times [0,a]$, à $\psi_1^* m \otimes \tilde{m}$ sur $\mathbb{T}^1 \times [1+a,1+a+b]$ et à $\tau_{a*}\mu$ sur $\mathbb{T}^1 \times [a,1+a]$, où $\tau_a(\vartheta,t) = (\vartheta,t+a)$. En identifiant les bords de $\mathbb{T}^1 \times J$ par σ , on obtient un tore $\mathbb{T}$, on déduit de $\tilde{\nu}_{a,b}$ une mesure finie $\nu_{a,b}$ sur $\mathbb{T}$ qui charge les ouverts non vides, et l'on déduit de $\tilde{\Phi}_{a,b}$ un $\Phi_{a,b} \in \mathrm{Aut}(\nu_{a,b})$. On peut évidemment choisir a et b de façon que $\Phi_{a,b}$ soit homologue à l'identité, φ étant une distorsion (et donc homotope à l'identité). Si $\Phi_{a,b}$ a un point fixe dans un des "bords épaissis", l'hypothèse supplémentaire sur φ implique que le bord correspondant de $\mathbb{A}$ est composé de points fixes de φ . Sinon, les trois points fixes de $\Phi_{a,b}$ sont au moins quatre, et φ a deux points fixes dans l'intérieur de $\mathbb{A}$. □

Un argument voisin du précédent montre que *le théorème de Conley-Zehnder* (1.2.3) *implique le théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable : tout automorphisme d'une structure symplectique sur* $\mathbb{A}$ *qui est une distorsion a au moins deux points fixes* (voir aussi (3.1.4)).

(3.1.3) Application aux orbites périodiques. Nous allons voir maintenant pourquoi Poincaré et Birkhoff se sont intéressés à ces problèmes (et, accessoirement, pourquoi l'hypothèse supplémentaire de la proposition 3.1.2 n'a guère ici d'importance) : soit a un point fixe d'un automorphisme local φ d'une structure symplectique σ sur une surface S . D'après le *théorème de Darboux* [29], on ne perd rien à supposer que $(S,\sigma,a) = (\mathbb{C},\sigma_1,0)$. On dit que 0 est un *point fixe elliptique de* φ lorsque les valeurs propres de la différentielle $D\varphi(0)$ sont imaginaires (auquel cas elles sont forcément de module 1 , ce qui permet d'exprimer $D\varphi(0)$ comme la rotation $z \longmapsto e^{2\pi i\omega_0}z$, $0 < \omega_0 < 1$). Le *théorème des courbes invariantes de Kolmogorov-Arnold-Moser* affirme en (très) gros la chose suivante : *si* φ *est "assez générique", il existe un ensemble* $\Omega \not\ni \omega_0$ *d'irrationnels, de borne inférieure ou supérieure* ω_0 *, et une famille* $(C_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *de cercles plongés disjoints entourant l'origine dans* $\mathbb{C}$ *, possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Quand* ω *tend vers* ω_0 *,* C_ω *tend vers* $\{0\}$ *en ressemblant de plus en plus à un cercle de centre* 0 .

(ii) *Pour tout* $\omega \in \Omega$ *, on a* $\varphi(C_\omega) = C_\omega$ *, et il existe un difféomorphisme de* C_ω *sur* $\mathbb{S}_1$ *envoyant* $\varphi|C_\omega$ *sur la rotation* $z \longmapsto e^{2\pi i\omega}z$.

Etant donnés $\omega < \omega'$ dans Ω , soit $\mathbb{A}_{\omega,\omega'}$ l'anneau bordé par C_ω et $C_{\omega'}$. Si ω et ω' sont assez proches de ω_0 , alors, pour tout rationnel $p/q \in]\omega,\omega'[$, $\varphi^q|\mathbb{A}_{\omega,\omega'}$ est une distorsion, et le théorème 3.1.2 montre donc que φ possède deux orbites de période q entre C_ω et $C_{\omega'}$. Comme 0 est un point fixe isolé de φ (d'après le théorème d'inversion locale), on en déduit le résultat suivant : *quels que soient* ω *et* ω' *, assez proches de* ω_0 *, il y a une infinité d'orbites périodiques de* φ *entre* C_ω *et* $C_{\omega'}$. Je renvoie aux travaux récents d'Herman ([22], [23], [24]) pour des énoncés (très) précis du théorème des courbes invariantes, et à [3] pour le classique lien avec les orbites périodiques des systèmes hamiltoniens.

(3.1.4) *Remarque.— La conjecture* (1.2.6) *impliquerait, elle aussi, le théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable*. En effet, étant donnée une distorsion φ de $\mathbb{A}$ conservant une structure symplectique σ , on peut [26] remplacer $\mathbb{A}$ par la couronne $C = \{z : 1 \le |z| \le 2\} \subset \mathbb{C}$ et σ par la restriction de σ_1 . Le graphe de φ et celui de id_C sont deux couronnes C_1 et C_2 dans $\mathbb{C}^2$, lagrangiennes exactes (3.2.1) pour $\overset{2}{\sigma}_1$. Il n'est pas trop difficile de construire une immersion lagrangienne exacte j de $\mathbb{T}^2$ dans $(\mathbb{C}^2,\overset{2}{\sigma}_1)$ telle que $j(\mathbb{T}^2)$ contienne C_1 et C_2

et ait pour seules auto-intersections les points de $C_1 \cap C_2$. Comme $\overset{2}{\sigma}_1$ et σ_2 sont évidemment isomorphes, on en déduit l'implication annoncée, au moins au niveau de l'existence d'un point fixe. □

(3.2) Cas des grandes dimensions

(3.2.1) Revenons à la définition de l'invariant S de Calabi (2.1.1) : une structure symplectique sur une variété compacte sans bord ne peut évidemment pas être exacte, mais, sur une variété compacte à bord M (comme $\mathbb{A}$), une structure symplectique ω peut au contraire avoir une primitive λ . Avec les notations de (2.1.1), on montre alors aisément [4] que, *pour tout* $\varphi \in G_\omega$, *la classe de cohomologie de* $\varphi^*\lambda - \lambda$ *s'identifie à* $S(\varphi)$. Un $\varphi \in G_\omega$ tel que $\varphi^*\lambda - \lambda$ soit exacte est dit *globalement canonique* dans la littérature classique. Un argument d'aire évident montre que, *si* $M = \mathbb{A}$, *tout élément de* G_ω *- et donc toute distorsion - est globalement canonique*, ce qui permet la construction (3.1.4). En dimension plus grande, il n'en va plus ainsi, et une bonne généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable serait sans doute la

CONJECTURE [2].— *Soit* σ *la restriction de* $d\lambda_{\mathbb{T}^n}$ *au sous-fibré en boules-unité* $M \approx \mathbb{T}^n \times \mathbb{B}^n$ *de* $T^*\mathbb{T}^n$, *et soit* φ *un automorphisme globalement canonique de* σ , *admettant un relèvement* $\tilde{\varphi}$ *au revêtement universel standard* $\tilde{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}^n$ *de* M *qui possède la propriété suivante : pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *les deux sphères* $S_x = \{x\} \times \partial\mathbb{B}^n$ *et* $\tilde{\varphi}(S_x)$ *sont enlacées dans* $\mathbb{R}^n \times \partial\mathbb{B}^n$. *Alors* φ *a au moins* $n+1$ *points fixes, et, génériquement, au moins* 2^n . □

Il n'est pas impossible que cette conjecture soit en fait une conséquence du théorème de Conley et Zehnder pour $n > 1$ comme pour $n = 1$. C'est de toutes façons le cas de l'énoncé moins général démontré dans [12].

(3.2.2) Un peu de science-fiction. Conley et Zehnder [13] pensent pouvoir démontrer la conjecture 1.2.2 en général par la même méthode, en utilisant (à fond, cette fois) la théorie de Conley ([11], [28]) : l'impossibilité d'une réduction directe à la dimension finie les obligerait, semble-t-il, à recourir aux méthodes de continuité mises au point par Conley ([11], chapitre 4), et qui ont déjà fait leurs preuves en Analyse ([10], [28]). Si cette idée marche pour la conjecture 1.2.2, elle s'appliquera très vraisemblablement à la conjecture 1.2.4 (dont on peut cependant se demander si elle ne serait pas accessible sans quitter la dimension finie), et peut-être à la conjecture 1.2.6.

Il semble d'ailleurs que, si l'on savait véritablement faire de la "topologie différentielle symplectique", la conjecture 1.2.6 contiendrait une bonne partie des autres. En voici donc pour conclure des versions de plus en plus optimistes dans le cas du tore :

I. *Tout tore lagrangien (plongé) de* σ_n *contient le bord d'un disque plongé*

$\mathbb{D}_2 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^n$ *tel que* $j^*\sigma_n$ *soit une structure symplectique.*

La formule de Cauchy dans le n-disque $(\mathbb{D}_2)^n$ exprime que le tore lagrangien $(\mathbb{S}_1)^n$ "borde" l'intérieur de $(\mathbb{D}_2)^n$. L'argument d'aire qui prouve (1.2.6) si $n = 1$ serait généralisé par

II (Schoenfliess complexe).— *Tout tore lagrangien (plongé) de* σ_n *"borde" l'intérieur d'un* n-*disque.*

Remerciements : Cet exposé a bénéficié

- d'un séjour de son auteur au Brésil (Universidade Federal de São Carlos et IMPA), financé par le CNPq et la FAPESP ;
- de conversations avec Daniel Bennequin, Alain Chenciner et Albert Fathi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN - Foundations of Mechanics, 2nd edition, Benjamin, 1978.

[2] V.I. ARNOLD - *Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique*, C.R. Acad. Sci. Paris; t. 261 (novembre 1965), Groupe 1, 3719-3722.

[3] V.I. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la Mécanique classique, Mir, Moscou, 1976.

[4] A. BANYAGA - *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helvetici 53(1978), 174-227.

[5] G.D. BIRKHOFF - *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Mathematica 47(1925), 297-311.

[6] R. BOTT - *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. (new series) of the A.M.S. Vol. 7, n° 2 (septembre 1982), 331-358.

[7] E. CALABI - *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in Analysis (Symposium in honour of S. Bochner), Princeton University Press (1970), 1-26.

[8] M. CHAPERON - *A theorem on Lagrangian intersections*, prépublication, Ecole Polytechnique, février 1983.

[9] A. CHENCINER - *Sur un énoncé dissipatif du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 294 (février 1982), Groupe 1, 243-245, et *Points périodiques de longues périodes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de* $\mathbb{R}^2$, ibidem (mai 1982), 661-663.

[10] C.C. CONLEY, J.A. SMOLLER - *Sur l'existence et la structure des ondes de choc en magnétohydrodynamique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 277 (septembre 1973), Série A, 387-389.

[11] C.C. CONLEY - Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS regional conference series in math. n° 38, A.M.S., 1978.

[12] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold*, à paraître aux Inventiones Mathematicae.

[13] C.C. CONLEY - Lettre, mars 1983.

[14] J. DIEUDONNÉ - Éléments d'Analyse (tomes 4 et 9), Gauthier-Villars, Paris, 1982.

[15] A. DOUADY - *Noeuds et structures de contact en dimension* 3 [*d'après Daniel Bennequin*], Séminaire Bourbaki, exposé n° 604, février 1983, à paraître dans Astérisque.

[16] Ya. M. ELIASHBERG - *Estimates of the number of fixed points of area-preserving mappings*, Université de Syktyvkar, 1978.

[17] A. FATHI - Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. t. 13(1980), 45-93.

[18] A. FATHI - Topologie de la dimension 2 , cours de troisième cycle, Orsay, 1980-81, à paraître.

[19] C. GODBILLON - Éléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1971.

[20] M.R. HERMAN - *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. Inst. Fourier 23-2(1974), 75-86.

[21] M.R. HERMAN - *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S. 49(1979), 5-233.

[22] M.R. HERMAN - Cours à l'E.N.S., 1980, rédigé par J.B. Boost, à paraître dans Astérisque.

[23] M.R. HERMAN - Introduction à l'étude des courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, prépublication, Ecole Polytechnique, à paraître dans Astérisque.

[24] M.R. HERMAN - *Le théorème des courbes invariantes en classe* C^3 , manuscrit, 1982.

[25] B. de KERÉKJÁRTÓ - *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, Acta Szeged 4(1928), 86-102.

[26] J. MOSER - *On the volume element of a manifold*, Trans. A.M.S. 120(1965), 286-294.

[27] H. POINCARÉ - *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti d. Circ. Mat. di Palermo 33(1912), 375-407.

[28] J.A. SMOLLER - Shock Waves and reaction-diffusion Equations, Springer, 1983.

[29] A. WEINSTEIN - *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Math. 6(1971), 329-345.

[30] A. WEINSTEIN - C^0 *perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, preprint, University of California, Berkeley, mai 1983.

Addendum (juillet 1983)

Soit h un difféomorphisme d'une variété M. Rappelons qu'une *orbite périodique* de h est une partie *finie* P de M, de la forme $P = \{h^m(x) : m \in \mathbb{Z}\}$ pour un $x \in M$; le cardinal m de P s'appelle sa *période primitive*, et l'on dit que P est *non dégénérée* lorsque 1 n'est pas valeur propre de l'automorphisme linéaire $T_x h^m$ de $T_x M$ (condition évidemment indépendante du choix de $x \in P$). En utilisant un argument d'indice [32], Conley et Zehnder viennent [33] d'établir le résultat suivant, formulé plus précisément dans [33], théorème 2 :

THÉORÈME.— *Soit* h *un automorphisme de* ω_n , *homologue à l'identité, et dont toutes les orbites périodiques sont non dégénérées. Il existe alors une suite* (m_k) *d'entiers, tendant vers* $+\infty$, *telle que* h *admette pour tout* k *au moins deux orbites périodiques de période primitive* m_k . □

Comme nous l'avons vu dans (2.1.2), ce résultat admet [33] une formulation équivalente en termes d'orbites périodiques d'un système hamiltonien dépendant du temps sur $\mathbb{T}^{2n}$, ce qui montre bien les liens étroits entre le présent exposé et [31].

[31] H. BERESTYCKI - *Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens*, exposé au Séminaire Bourbaki n° 603, février 1983.

[32] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations*, à paraître dans Comm. Pure and Appl. Math.

[33] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *Note on subharmonic solutions of a Hamiltonian vectorfield*, prépublication, juin 1983.

Marc CHAPERON

C.N.R.S.

& Centre de Mathématiques
École Polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX