Astérisque

Arnaud Beauville

Surfaces $K3$

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 609, p. 217-229
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__217_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 609 Juin 1983

SURFACES K3

par Arnaud BEAUVILLE

Introduction

Les surfaces K3 (ainsi nommées par A. Weil "à cause de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire") sont les surfaces complexes compactes simplement connexes dont le fibré canonique est trivial. Elles occupent une position centrale dans la théorie des surfaces.

Dès 1958, Weil suggérait que les surfaces K3 devraient être entièrement classifiées par la donnée des périodes d'une 2-forme holomorphe non nulle sur la surface [W]. La réalisation de ce programme commence avec le théorème de Torelli pour les surfaces K3 projectives, démontré par Pjateckii-Šapiro et Šafarevič en 1970 [P-Š], puis étendu aux surfaces K3 kählériennes par Burns et Rapoport en 1975 [B-R]. Une version simplifiée de ces résultats, complétant quelques lacunes de [P-Š], est exposée dans [L-P].

La surjectivité de l'application des périodes a été démontrée dans le cadre projectif par Kulikov [K] en 1977 ; la démonstration, parfois imprécise, est clarifiée dans [P-P]. Le résultat a été étendu aux surfaces kählériennes par Todorov [T] ; Looijenga en a donné dans [L] une version plus simple, indépendante du théorème de Kulikov-Persson-Pinkham. Enfin Siu a récemment démontré que toute surface K3 est kählérienne [S], achevant ainsi la réalisation du programme de Weil.

Cet exposé est consacré à un résumé de la démonstration de ces résultats. La première partie est inspirée de [L-P], avec quelques simplifications. La seconde suit de près [L]. Enfin la troisième reprend les idées de Siu, en y incorporant un résultat de Gauduchon.

Faute de place, je n'ai pas développé les applications : description de divers espaces de modules, étude des automorphismes, surfaces d'Enriques, etc... Je renvoie à [X] pour quelques-unes de ces applications ainsi que pour une version détaillée de ce qui suit. Je n'ai pas mentionné non plus l'approche de Kulikov-Persson-Pinkham, bien qu'elle présente un grand intérêt pour la géométrie birationnelle des variétés de dimension 3.

1. Préliminaires

DÉFINITION.— *Une* surface K3 *est une surface complexe compacte (lisse), simplement connexe, dont le fibré canonique est trivial.*

a) Exemples : surfaces K3 projectives

Les surfaces quartiques (lisses) dans $\mathbb{P}^3$, les intersections complètes d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^4$ ou de trois quadriques dans $\mathbb{P}^5$ sont des surfaces K3. Plus généralement, pour chaque entier $g \geq 3$, il existe une famille de surfaces K3 de degré $(2g-2)$ dans $\mathbb{P}^g$. Chacune de ces familles dépend de 19 modules.

b) Exemple : surfaces de Kummer

Soit A un tore complexe de dimension 2. L'involution $\sigma : a \mapsto -a$ de A a 16 points fixes isolés, qui sont les points d'ordre 2 de A . Soit $\varepsilon : \hat{A} \to A$ l'éclatement de ces 16 points. Alors σ s'étend en une involution $\hat{\sigma}$ de $\hat{A}$, dont le lieu des points fixes est un diviseur lisse. La surface quotient $S = \hat{A}/\hat{\sigma}$ est une surface K3, appelée *surface de Kummer* associée à A . Le revêtement $\pi : \hat{A} \to S$ est ramifié le long de 16 courbes rationnelles lisses $(C_i)_{1\leq i\leq 16}$. Ceci entraîne que la somme des C_i est divisible par 2 dans $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Inversement, soit S une surface K3 contenant 16 courbes rationnelles lisses disjointes C_i dont la somme est divisible par 2 dans $H^2(S,\mathbb{Z})$. Alors S *est une surface de Kummer*. En effet on peut former le revêtement double $\pi : \hat{A} \to S$ ramifié le long des C_i , puis contracter les 16 courbes exceptionnelles $\pi^{-1}(C_i)$ pour obtenir une surface lisse A ; comme le fibré canonique de A est trivial et $\chi(\mathcal{O}_A) = 0$, la classification des surfaces montre que A est un tore complexe. Ainsi S est la surface de Kummer associée à A .

c) Périodes

Soit S une surface K3. Le groupe $H^2(S,\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 22, muni d'une forme quadratique entière unimodulaire (définie par le cup-produit). Cette forme est paire (formule de Wu), de signature $(3,19)$. Il en résulte que $H^2(S,\mathbb{Z})$ est isomorphe au $\mathbb{Z}$-module quadratique $L = (-E_8)^2 \oplus H^3$, où H désigne le plan hyperbolique et E_8 le réseau bien connu.

DÉFINITION.— *On appelle* surface K3 marquée *un couple* (S,σ) , *où* S *est une surface* K3 *et* $\sigma : H^2(S,\mathbb{Z}) \to L$ *une isométrie.*

Notons $H^{2,0}$ le sous-espace de $H^2(S,\mathbb{C})$ formé des classes de 2-formes holomorphes ; il est de dimension 1 puisque $\Omega^2_S = \mathcal{O}_S$. La droite $\sigma_{\mathbb{C}}(H^{2,0}) \subset L_{\mathbb{C}}$ est appelée la *période* de (S,σ) . Elle définit un point du *domaine des périodes* $\Omega \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ défini par les équations

$$\omega^2 = 0 \quad , \quad \omega.\bar{\omega} > 0 \ .$$

Si l'on choisit une base $(e_i)_{1\leq i\leq 22}$ de L , ce qui permet d'identifier

$\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ à $\mathbb{P}^{21}$, et si l'on pose $\gamma_i = {}^t\sigma(e_i^*) \in H_2(S,\mathbb{Z})$, la période de (S,σ) n'est autre que le point de $\mathbb{P}^{21}$ de coordonnées homogènes $(\int_{\gamma_1}\omega,\dots,\int_{\gamma_{22}}\omega)$, pour $\omega \in H^0(S,\Omega_S^2)$, $\omega \neq 0$.

Il est important de noter que Ω *s'identifie à la grassmannienne* $G_2^+(L_{\mathbb{R}})$ *des 2-plans positifs orientés de* $L_{\mathbb{R}}$, par l'application qui associe à une droite complexe D le plan $(D \oplus \bar{D}) \cap L_{\mathbb{R}}$, orienté de façon que la base $(\mathrm{Re}(\omega),\mathrm{Im}(\omega))$ soit directe pour tout $\omega \in D$.

Soit maintenant $f : X \to U$ une famille lisse de surfaces K3. Un marquage de f est un isomorphisme isométrique σ du système localement constant $R^2f_*(\mathbb{Z})$ sur le système constant L_U ; il induit pour chaque $u \in U$ une isométrie $\sigma_u : H^2(X_u,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$. L'*application des périodes* $\wp : U \to \Omega$ associée à (f,σ) est définie par $\wp(u) = \sigma_u(H^{2,0}(X_u))$. Elle est holomorphe. Le résultat suivant est généralement attribué à Weil (qui l'attribue à Nirenberg) et à Andreotti :

<u>Théorème de Torelli local</u>.– *Soit* $o \in U$. *Si* $X \to U$ *est une déformation locale universelle de* X_o , *l'application des périodes* $\wp$ *est un isomorphisme local en* o .

On le démontre sans difficultés par un calcul direct ; on peut aussi appliquer un résultat général de Griffiths, qui calcule l'application tangente $T_o(\wp)$ ([Gr], prop. 1.20) : celle-ci s'identifie à l'homomorphisme

$$\lambda : H^1(X_o,T_{X_o}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^2(X_o,\Omega^2_{X_o}),H^1(X_o,\Omega^1_{X_o}))$$

déduit du cup-produit. Il est clair que λ est bijectif dans notre cas.

d) Surfaces K3 kählériennes

Nous dirons qu'une surface K3 est kählérienne si elle admet au moins une métrique kählérienne. Soit S une telle surface. Puisque la forme d'intersection sur $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S) = H^{1,1}(S) \cap H^2(S,\mathbb{R})$ est de signature $(1,19)$, l'ensemble des classes $x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ telles que $x^2 > 0$ a deux composantes connexes ; on note C_S celle de ces composantes qui contient les classes de Kähler. Soit Δ_S l'ensemble des classes de diviseurs effectifs de carré (-2) dans $H^2(S,\mathbb{Z})$; notons W_S le groupe d'automorphismes de $H^2(S,\mathbb{R})$ engendré par les réflexions $x \longmapsto x + (\delta.x)\delta$, pour $\delta \in \Delta_S$. Les hyperplans $\delta^\perp$, pour $\delta \in \Delta_S$, découpent un pavage du cône C_S ; on appelle chambres les composantes connexes de $C_S - \cup\,\delta^\perp$. La théorie générale des groupes engendrés par des réflexions (cf. [Bk], ch. 5) entraîne que *le groupe* W_S *opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de* C_S .

On appelle *chambre kählérienne*, et on note K_S , la chambre de C_S formée des $x \in C_S$ tels que $(x.\delta) > 0$ pour tout $\delta \in \Delta_S$. Comme toute courbe irréductible sur S est de carré (-2) ou ≥ 0 , K_S est aussi l'ensemble des $x \in C_S$ tels que $(x.d) > 0$ pour toute classe de diviseur effectif d .

PREMIÈRE PARTIE : LE THÉORÈME DE TORELLI

2. Le théorème de Torelli : énoncé

Soient S , S' deux surfaces K3 kählériennes, et $\varphi : H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S',\mathbb{Z})$ un isomorphisme. On dit que φ est une *isométrie de Hodge* si elle préserve le cup-produit et la structure de Hodge (c'est-à-dire si $\varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(S)) = H^{2,0}(S')$). On dit de plus que φ est *effective* si on a $\varphi(K_S) = K_{S'}$; il revient au même de dire qu'on a $\varphi(C_S) = C_{S'}$ et $\varphi(\Delta_S) = \Delta_{S'}$.

Il est clair que si $u : S' \rightarrow S$ est un isomorphisme, alors $u^* : H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S',\mathbb{Z})$ est une isométrie de Hodge effective. Inversement :

THÉORÈME 1.— *Soient* S , S' *deux surfaces K3 kählériennes, et soit* $\varphi : H^2(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S',\mathbb{Z})$ *une isométrie de Hodge effective. Il existe un unique isomorphisme* $u : S' \rightarrow S$ *tel que* $u^* = \varphi$.

COROLLAIRE.— *Soient* (S,σ) *et* (S',σ') *deux surfaces K3 kählériennes marquées admettant la même période. Alors* S *et* S' *sont isomorphes.*

En effet $\varphi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ est une isométrie de Hodge, et il existe $w \in W_S \times \{\pm 1\}$ tel que $\varphi \circ w$ soit une isométrie de Hodge effective.

Le théorème 1 résulte de trois énoncés indépendants :

PROPOSITION 1.— *Le théorème 1 est vrai lorsque* S *est une surface de Kummer.*

PROPOSITION 2.— *L'ensemble des périodes des surfaces de Kummer marquées est dense dans* Ω .

PROPOSITION 3.— *Soient* $f : X \rightarrow U$ *et* $f' : X' \rightarrow U$ *deux familles (lisses) de surfaces K3 kählériennes sur une variété analytique* U , *et* $\varphi : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2f'_*(\mathbb{Z})$ *un isomorphisme qui induit en chaque point une isométrie de Hodge. Soient* T *une partie de* U *et* o *un point d'accumulation de* T . *On suppose qu'il existe pour chaque* $t \in T$ *un isomorphisme* $u_t : X'_t \rightarrow X_t$ *tel que* $u_t^* = \varphi_t$. *Alors*

a) X_o *et* X'_o *sont isomorphes ;*

b) *si de plus l'isométrie* φ_o *est supposée effective, il existe un isomorphisme* $u_o : X'_o \rightarrow X_o$ *tel que* $u_o^* = \varphi_o$.

Indiquons comment le théorème 1 résulte de ces trois propositions. Soient $f : X \rightarrow U$ et $f' : X' \rightarrow U'$ des déformations locales universelles (familles de Kuranishi) pour S et S' , de sorte que $S = X_o$ $(o \in U)$ et $S' = X'_{o'}$ $(o' \in U')$. On peut supposer que les systèmes locaux $R^2f_*(\mathbb{Z})$ sur U et $R^2f'_*(\mathbb{Z})$ sur U' sont constants, et choisir des trivialisations $\sigma : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_U$ et $\sigma' : R^2f'_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_{U'}$ telles que $\sigma_o = \sigma'_o \circ \varphi$. On en déduit des applications des périodes $\wp : U \rightarrow \Omega$ et $\wp' : U' \rightarrow \Omega$ telles que $\wp(o) = \wp'(o')$. D'après le théorème de Torelli local (§ 1 c)), on peut identifier (U',o') à (U,o) de façon que les deux familles (f,σ) et (f',σ') aient même application des périodes. Ceci revient à dire que l'isomorphisme $\Phi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ de $R^2f_*(\mathbb{Z})$ dans $R^2f'_*(\mathbb{Z})$ induit en chaque point une isométrie de Hodge. La proposition 2 et la proposition 1 fournissent une partie dense T de U telle que X_t soit une surface de Kummer pour tout $t \in T$. On vérifie que l'isométrie de Hodge Φ_t est effective pour t assez voisin de o (puisque Φ_0 l'est) ; on déduit donc de la proposition 1 des isomorphismes $u_t : X'_t \to X_t$ tels que $u^*_t = \Phi_t$. La proposition 3 permet alors de conclure à l'existence de $u : S' \to S$ tel que $u^* = \varphi$. L'unicité de u résulte du lemme suivant, que l'on obtient facilement en utilisant les formules de Lefschetz topologiques et holomorphes :

Lemme.— *Tout automorphisme d'une surface K3 induisant l'identité en cohomologie est égal à l'identité.*

3. <u>Démonstration de la proposition 1</u> <u>(théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer)</u>

a) On remarque d'abord que S' est aussi une surface de Kummer : en effet, puisque φ est effective, il existe des courbes irréductibles $(C'_i)_{1\leq i\leq 16}$ sur S', de carré (-2), telles que $\varphi([C_i]) = [C'_i]$. Les C'_i sont alors des courbes rationnelles lisses sur S', disjointes, dont la somme est divisible par 2 dans $H^2(S',\mathbb{Z})$. Ainsi S' est une surface de Kummer (§ 1 b)).

Nous utiliserons pour la surface de Kummer S les notations A, ε, π ... introduites au § 1, et noterons A', ε', π' ... les données correspondantes pour S'.

b) Notons i l'homomorphisme $\pi_*\varepsilon^*$ de $H^2(A,\mathbb{Z})$ dans $H^2(S,\mathbb{Z})$. On vérifie aussitôt que i est injectif, compatible avec les structures de Hodge, et qu'on a $i(a).i(b) = 2a.b$ pour a,b dans $H^2(A,\mathbb{Z})$. On vérifie également (moins facilement) que l'image de i dans $H^2(S,\mathbb{Z})$ est l'orthogonal de l'ensemble des C_i. Par conséquent, φ induit une isométrie de Hodge $\psi : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^2(A,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"] & H^2(A',\mathbb{Z}) \arrow[d, "i'"] \\ H^2(S,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & H^2(S',\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

c) Il s'agit maintenant de montrer que ψ provient d'un isomorphisme de A' sur A, donc de donner pour les tores complexes un énoncé analogue à celui du théorème 1.

Observons d'abord que le $\mathbb{Z}$-module libre $H^2(A,\mathbb{Z})$ possède une *orientation* naturelle : en effet il est canoniquement isomorphe à $\Lambda^2H^1(A,\mathbb{Z})$, et $H^1(A,\mathbb{Z})$ est orienté par l'isomorphisme canonique $\Lambda^4H^1(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(A,\mathbb{Z})$.

PROPOSITION 4.— *Soient* A, A' *deux tores complexes de dimension* 2, *et soit* $\psi : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$ *une isométrie de Hodge respectant l'orientation. Il existe alors un isomorphisme* $v : A' \to A$ *tel que* $v^* = \pm\psi$.

La démonstration est essentiellement un exercice d'algèbre linéaire - cf. [Sh] pour une étude détaillée de la situation. Notons que la condition sur l'orientation est oubliée dans [P-Š], ce qui simplifie un peu abusivement la suite des opérations.

d) La partie délicate de la démonstration consiste à prouver que l'isométrie de Hodge ψ construite en b) préserve l'orientation. On observe que les courbes C_i sont indexées canoniquement par le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel A_2 des points d'ordre 2 de A, de même les C'_i sont indexées par A'_2. Par construction φ induit une application $\tilde{\varphi} : A_2 \longrightarrow A'_2$ telle que $\varphi([C_\alpha]) = [C'_{\tilde{\varphi}\alpha}]$ pour $\alpha \in A_2$. On montre alors que $\tilde{\varphi}$ est une *application affine* : cela résulte du fait que l'homomorphisme $c : \mathbb{F}_2^{A_2} \longrightarrow H^2(A,\mathbb{Z}/2)$ tel que $c(e_\alpha) = [C_\alpha]$ a pour noyau l'ensemble des fonctions affines sur A_2. Soit $\tau : A_2 \longrightarrow A'_2$ l'isomorphisme $\mathbb{F}_2$-linéaire associé à $\tilde{\varphi}$. En identifiant le dual de A_2 à $H^1(A,\mathbb{Z}/2)$, et de même pour A', on obtient un isomorphisme $\check{\tau} = {}^t\tau^{-1}$ de $H^1(A,\mathbb{Z}/2)$ dans $H^1(A',\mathbb{Z}/2)$. On démontre alors par un calcul direct que la réduction de ψ (mod. 2) est égale à $\check{\tau} \wedge \check{\tau}$. Il est facile de voir que cela entraîne que ψ préserve l'orientation.

e) Il résulte alors de la proposition 4 qu'il existe un isomorphisme $v : A' \longrightarrow A$ tel que $v^* = \pm\psi$; on a en fait $v^* = \psi$ puisque φ est effectif. On déduit de v un isomorphisme $u : S' \longrightarrow S$, et il faut vérifier que u^* coïncide avec φ. Sur la partie $i(H^2(A,\mathbb{Z}))$, cela se réduit à $v^* = \psi$. Sur les $[C_\alpha]$, cela signifie qu'on doit avoir $\tilde{\varphi}(\alpha) = u^{-1}(\alpha)$. Quitte à modifier v par une translation, on peut remplacer $\tilde{\varphi}$ par sa partie linéaire τ, et l'égalité résulte alors de la formule $\psi_2 = \check{\tau} \wedge \check{\tau}$ de d).

4. Densité des périodes des surfaces de Kummer

La démonstration de la proposition 2 utilise un énoncé de surjectivité pour certaines surfaces de Kummer, qui est aussi à la base de la démonstration de la surjectivité de l'application des périodes. Je vais tricher un peu en admettant un énoncé plus fort qu'il n'est nécessaire.

PROPOSITION 5 [I-S].— *Soit* P *un 2-plan positif orienté de* $L_{\mathbb{R}}$, *défini sur* $\mathbb{Q}$ *(c'est-à-dire tel que* $\dim_{\mathbb{Q}}(P \cap L_{\mathbb{Q}}) = 2$ *).*

a) *Il existe une surface K3 kählérienne marquée* (S,σ) *de période* P.

b) *Pour que* S *soit une surface de Kummer, il faut et il suffit qu'on ait* $x^2 \equiv 0$ (mod. 4) *pour tout* $x \in P \cap L$.

On démontre facilement l'existence de S dans le cas b), en construisant le tore complexe A à l'aide de sa période. On passe de là au cas général par un procédé d'"isogénies" entre surfaces K3.

On notera que les surfaces K3 construites dans la proposition sont très particulières : ce sont exactement celles dont le groupe de Picard est de rang maximal (égal à 20).

La proposition 2 résulte alors de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 6.— *L'ensemble des 2-plans* $P \subset L_{\mathbb{R}}$ *définis sur* $\mathbb{Q}$ *et tels que* $x^2 \equiv 0$ (mod. 4) *pour tout* $x \in P \cap L$ *est dense dans la grassmannienne des 2-plans de* $L_{\mathbb{R}}$.

On peut le démontrer soit en faisant appel à la théorie des groupes algébriques [B-R], soit de manière élémentaire [L-P].

5. Le "lemme principal" de Burns-Rapoport

Démontrons maintenant la proposition 3. Notons Γ_t le graphe de u_t dans $X_t \times X'_t$. La première étape consiste à montrer qu'une sous-suite de $(\Gamma_t)_{t \in T}$ converge (au sens des courants) vers un cycle analytique Γ_o de $X_o \times X'_o$. D'après un critère de Bishop [B], il suffit pour qu'il en soit ainsi qu'il existe une métrique hermitienne sur $X \times X'$ pour laquelle le volume des sous-variétés Γ_t soit *borné*.

On peut construire sur X (resp. X') une métrique hermitienne qui induit sur chaque fibre X_u (resp. X'_u) une métrique kählérienne, de forme fondamentale κ_u (resp. κ'_u). Munissons $X \times X'$ de la métrique produit. On a

$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} (pr_1^*\kappa_t + pr_2^*\kappa'_t)^2 = \int_{X_t} \kappa_t^2 + \int_{X'_t} \kappa_t'^2 + 2\int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^*\kappa_t \ .$$

Les deux premiers termes sont bornés puisqu'ils sont obtenus par restriction à T de fonctions continues sur U. Mais le même argument s'applique au troisième car

$$\int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^*\kappa_t = [\kappa'_t].\varphi_t([\kappa_t]) \ .$$

Désignons par p, p' les deux projections de $X_o \times X'_o$. Par passage à la limite, on a

$$p_*[\Gamma_o] = 1 \quad (\text{dans } H^0(X_o,\mathbb{Z})) \quad \text{et} \quad p'_*[\Gamma_o] = 1 \ .$$

Ceci entraîne deux possibilités pour Γ_o :

(i) $\Gamma_o = \Delta + \sum_i C_i \times C'_i$, où $p_*[\Delta] = 1$, $p'_*[\Delta] = 1$, et où les C_i (resp. C'_i) sont des courbes sur X_o (resp. X'_o) ;

(ii) $\Gamma_o = \Delta_1 + \Delta_2 + \sum_i C_i \times C'_i$, où $p_*[\Delta_1] = 1$, $p'_*[\Delta_1] = 0$, $p_*[\Delta_2] = 0$ et $p'_*[\Delta_2] = 1$.

Etant donnée une classe $c \in H^4(X_o \times X'_o,\mathbb{C})$, notons c_* l'homomorphisme de $H^2(X_o,\mathbb{C})$ dans $H^2(X'_o,\mathbb{C})$ défini par $c_*(x) = p'_*(c.p^*x)$. On a

$$[\Gamma_t]_* = u_t^* = \varphi_t \ ,$$

et par conséquent $[\Gamma_o]_* = \varphi_o$. Or on vérifie aussitôt qu'on aurait dans le cas (ii) $[\Gamma_o]_*(H^{2,0}(X_o)) = 0$, ce qui est impossible. On a donc

$$\Gamma_o = \Delta + \sum_{i \in I} C_i \times C'_i \ ,$$

où Δ est le graphe d'une application biméromorphe u_o de X'_o sur X_o. Comme ces surfaces sont minimales, u_o est un isomorphisme, ce qui prouve a).

Supposons maintenant φ_o effectif. Notons c_i, c'_i les classes de cohomologie de C_i, C'_i, de sorte qu'on a, pour $x \in H^2(X_o,\mathbb{R})$,

$\varphi_0(x) = [\Gamma_0]_*(x) = u_0^*(x) + \sum_{i\in I}(c_i.x)c_i'$.

Prenons $x \in K_X$. On a alors

$$\varphi_0(x) - u_0^*(x) = \sum_{i\in I} r_i c_i' ,$$

avec $r_i > 0$; et

$$0 = (\varphi_0(x))^2 - (u_0^*(x))^2 = (\varphi_0(x) + u_0^*(x)).\sum_{i\in I} r_i c_i' .$$

Comme $\varphi_0(x)$ et $u_0^*(x)$ sont dans K_X , on a nécessairement $I = \emptyset$, donc $u_0^* = \varphi_0$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3 et donc du théorème 1.

DEUXIÈME PARTIE : SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION DES PÉRIODES

6. Comment utiliser le théorème de Yau

Dans la suite nous identifions toujours Ω à la grassmannienne $G_2^+(L_{\mathbb{R}})$.

THÉORÈME 2.— (i) *Tout élément* P *de* Ω *est la période d'une surface* K3 *kählérienne marquée* (S,σ) .

(ii) *La chambre kählérienne* K_S (§ 1, d)) *est égale à l'ensemble des classes de Kähler de* S .

Vu la transitivité du groupe W_S sur les chambres de C_S (§ 1, d)), cet énoncé équivaut au suivant :

PROPOSITION 7.— *Soit* $P \in \Omega$, *et soit* k *un élément de* $L_{\mathbb{R}}$ *orthogonal à* P , *de carré* > 0 , *tel que* L *ne contienne pas d'élément de carré* (-2) *orthogonal à* P *et à* k . *Il existe alors une surface* K3 *marquée* (S,σ) , *de période* P , *telle que* $\sigma^{-1}(k)$ *soit une classe de Kähler.*

La partie de la démonstration qui utilise la géométrie différentielle (en particulier le théorème de Yau) est concentrée dans le lemme suivant :

Lemme.— Soit (S,σ) *une surface* K3 *marquée, de période* P , *et soit* k *l'image par* σ *d'une classe de Kähler de* S . *Posons* $E = P \oplus \mathbb{R}k$. *Pour toute décomposition orthogonale* $E = P' \oplus \mathbb{R}k'$, *il existe une surface* K3 *marquée* (S',σ') , *de période* P', *et une forme de Kähler* $\varkappa'$ *sur* S' *telle que* $\sigma'([\varkappa']) = k'$.

Soient S une surface K3 et g une métrique de Kähler-Einstein sur S, de classe $\sigma^{-1}(k)$ [Y]. Alors S admet une structure quaternionienne, c'est-à-dire que le corps des quaternions $\mathbb{H}$ opère sur le fibré tangent $T(S)$ par endomorphismes parallèles (en effet la représentation d'holonomie de S est isomorphe à la représentation identique de $SU(2)$ dans $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$; le commutant sur $\mathbb{R}$ de cette représentation est le corps $\mathbb{H}$). Les structures complexes parallèles pour g correspondent aux quaternions de carré (-1) , c'est-à-dire aux quaternions purs de norme 1 .

Notons (I,J,K) la base usuelle de l'espace $\mathbb{H}_0$ des quaternions purs ; on peut supposer que I induit la structure complexe donnée sur S . La forme de Kähler $\varkappa$ de g est donc définie par $\varkappa(U,V) = g(IU,V)$ (pour U , V champs de vecteurs sur S). Considérons les 2-formes réelles α , β définies par

$$\alpha(U,V) = g(JU,V) \ , \quad \beta(U,V) = g(KU,V) \ .$$

Posons $\omega = \alpha + i\beta$. On a alors $\omega(IU,V) = i\omega(U,V)$, de sorte que ω est une 2-forme parallèle de type $(2,0)$ sur S , donc holomorphe.

On définit donc un isomorphisme $\lambda : \mathbb{H}_0 \longrightarrow E$ en posant $\lambda(q) = \sigma([\gamma_q])$, où la 2-forme fermée γ_q est définie par $\gamma_q(U,V) = g(qU,V)$. Revenant à l'énoncé du lemme, il existe un quaternion pur I' de carré (-1) et un nombre réel $m > 0$ tels que $\lambda^{-1}(k') = mI'$. Alors la surface S , munie de la structure complexe I' , du marquage σ et de la métrique kählérienne mg , répond à la question.

7. Démonstration du théorème 2

Posons $rg_{\mathbb{Q}}(P) = \dim_{\mathbb{Q}}(P \cap L_{\mathbb{Q}})$. Nous allons démontrer la proposition 7 par récurrence descendante (et vite terminée !) sur $rg_{\mathbb{Q}}(P)$.

a) Si $rg_{\mathbb{Q}}(P) = 2$, on sait déjà (proposition 5) que P est la période d'une surface K3 marquée (S,σ) ; il s'agit dans ce cas de démontrer que l'ensemble des classes de Kähler de S est égal à K_S . Mais puisque P est défini sur $\mathbb{Q}$, il en est de même de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$, et par conséquent les points rationnels sont denses dans K_S . Or ces points sont des classes de $\mathbb{Q}$-diviseurs amples, donc des classes de Kähler. L'ensemble des classes de Kähler, qui est un cône convexe ouvert et dense dans K_S , est donc égal à K_S .

b) Supposons maintenant $rg_{\mathbb{Q}}(P) \leq 1$. Il existe un élément k_0 de $L_{\mathbb{Q}}$, arbitrairement proche de k , qui n'est orthogonal à aucun élément de carré (-2) de $L \cap P^{\perp}$, et tel que le 3-plan $E = P + \mathbb{R}k_0$ soit positif. On peut donc trouver une décomposition orthogonale

$$E = P_1 \oplus \mathbb{R}k_1$$

avec $rg_{\mathbb{Q}}(P_1) > rg_{\mathbb{Q}}(P)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une surface K3 marquée (S_1,σ_1) , de période P_1 , telle que $\sigma_1^{-1}(k_1)$ soit une classe de Kähler. Soit ℓ la projection de k_0 orthogonalement à P (dans E) ; le lemme entraîne l'existence d'une surface K3 marquée (S_ℓ,σ_ℓ) , de période P , telle que $\sigma_\ell^{-1}(\ell)$ soit une classe de Kähler de S_ℓ .

Comme ℓ est arbitrairement proche de k , on peut supposer qu'il se trouve dans la même chambre C de $P^{\perp}$. Il résulte alors du théorème 1 que toutes les surfaces (S_ℓ,σ_ℓ) sont isomorphes à une même surface marquée (S,σ) , de période P , telle que $\sigma^{-1}(\ell)$ soit une classe de Kähler, et $\sigma(K_S) = C$. On conclut ainsi que l'ensemble des images par σ des classes de Kähler est dense dans C , donc égal à C , et par conséquent qu'il contient k . La surface marquée (S,σ) répond donc à la question.

TROISIÈME PARTIE : TOUTE SURFACE K3 EST KÄHLÉRIENNE

8. Métriques hermitiennes standard

THÉORÈME 3.– *Toute surface K3 est kählérienne.*

COROLLAIRE.– *Pour qu'une surface complexe compacte soit kählérienne, il faut et il suffit que son premier nombre de Betti soit pair.*

En effet il résulte de la classification de Kodaira qu'une surface non algébrique avec b_1 pair est une K3 ou une surface elliptique. Ce dernier cas a été traité par Miyaoka [M].

Voici l'idée de la démonstration du théorème 3. Soit (S,σ) une surface K3 marquée. D'après le théorème 2 il existe une surface K3 *kählérienne* marquée (S',σ') ayant même période. Il s'agit alors d'adapter la démonstration du théorème 1 pour prouver que S et S' sont isomorphes. La difficulté essentielle est d'étendre le "lemme principal" de Burns-Rapoport au cas où l'une des surfaces n'est pas supposée kählérienne. L'idée de Siu est d'utiliser des métriques hermitiennes d'un type particulier, qui avaient déjà été étudiées par Gauduchon sous le nom de "métriques standard".

DÉFINITION.– *Une métrique hermitienne sur une surface complexe est dite* standard *si sa 2-forme fondamentale* $\varkappa$ *satisfait à* $\partial\bar\partial(\varkappa) = 0$.

Plus généralement, une métrique hermitienne sur une variété complexe de dimension m est dite standard si $\partial\bar\partial(\varkappa^{m-1}) = 0$. Je vais me borner ici au cas $m = 2$.

PROPOSITION 8 [G].– *Soient* S *une surface complexe compacte, et* h *une métrique hermitienne sur* S . *Il existe alors une métrique hermitienne standard conforme à* h , *unique à homothétie près.*

Soit $\varkappa$ la 2-forme fondamentale de h . Pour $f \in C^\infty(S,\mathbb{R})$, posons

$$D(f) = i\partial\bar\partial(f\varkappa)/\varkappa^2 \quad \text{et} \quad D^*(f) = (i\partial\bar\partial f \wedge \varkappa)/\varkappa^2 \ .$$

Alors D et D^* sont des opérateurs différentiels réels elliptiques du second ordre, à coefficients C^∞ . On vérifie aussitôt qu'ils sont adjoints formels l'un de l'autre. De plus l'opérateur D^* n'a pas de terme d'ordre zéro ; le principe du maximum entraîne que le noyau de D^* est formé des fonctions constantes, et que toute fonction non nulle de $\mathrm{Im}(D^*)$ prend des signes opposés sur S . Puisque D^* est la partie principale de D , on a

$$-\operatorname{ind}(D) = \operatorname{ind}(D^*) = \operatorname{ind}(D) \ ,$$

d'où $\operatorname{ind}(D) = 0$, et par conséquent $\dim \operatorname{Ker}(D) = \dim \operatorname{Ker}(D^*) = 1$.

Il existe donc une fonction non nulle f (et une seule à homothétie près) telle que $\partial\bar\partial(f\varkappa) = 0$. Comme l'orthogonal $\mathrm{Im}(D^*)$ de f dans $C^\infty(S,\mathbb{R})$ ne contient pas de fonction positive autre que 0 , on voit que f est de signe constant. Enfin une application élémentaire du principe du maximum montre que toute solution positive d'un opérateur elliptique du 2e ordre sur une variété compacte ne s'annule en aucun point.

Remarque.— Siu utilise une méthode différente, basée sur le théorème de Hahn-Banach, qui donne un résultat plus faible mais suffisant pour la suite.

Soient S une surface K3, et ω une 2-forme holomorphe non nulle sur S. Nous noterons encore $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ l'orthogonal de ω dans $H^2(S,\mathbb{R})$. Toute classe $x \in H^2(S,\mathbb{R})$ s'écrit donc $x = c[\omega] + k + \bar{c}[\bar{\omega}]$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $k \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$.

Lemme.— Soient S une surface K3, et $\varkappa$ la 2-forme fondamentale d'une métrique hermitienne standard sur S.

a) *Il existe une 2-forme réelle fermée ϑ sur S telle que $\varkappa = \vartheta^{1,1}$.*

b) *La composante k de $[\vartheta]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ est indépendante du choix de ϑ ; elle satisfait à $k^2 > 0$ et $k.[D] > 0$ pour tout diviseur effectif D sur S.*

c) *Si S est kählérienne, k appartient à la chambre kählérienne K_S.*

Prouvons a). Puisque $H^1(S,\Omega^2_S) = 0$, la forme $\bar{\partial}$-fermée $\partial\varkappa$ est $\bar{\partial}$-exacte ; il existe donc une forme α de type $(2,0)$ telle que $\partial\varkappa + \bar{\partial}\alpha = 0$. Il suffit de poser $\vartheta = \alpha + \varkappa + \bar{\alpha}$.

Observons que la forme α (donc aussi ϑ) est uniquement déterminée modulo $\mathbb{C}\omega$; par conséquent la composante k de $[\vartheta]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ est uniquement déterminée par $\varkappa$. On peut d'ailleurs choisir (de manière unique) ϑ de façon que $\int_S \vartheta\wedge\omega = 0$; on a alors $k = [\vartheta]$, et

$$k^2 = \int_S \vartheta\wedge\vartheta = 2\int_S \alpha\wedge\bar{\alpha} + \int_S \varkappa\wedge\varkappa > 0 ,$$

$$k.[D] = \int_D \vartheta = \int_D \varkappa > 0 ,$$

d'où b).

Supposons qu'il existe une forme de Kähler ξ sur S. Alors pour $0 \leq t \leq 1$, la forme $t\xi + (1-t)\vartheta$ est fermée et sa composante de type $(1,1)$ est positive non-dégénérée. On déduit de b) que le segment $[[\xi],k]$ dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ est contenu dans C_S, donc dans K_S, d'où c).

9. Démonstration du théorème 3

PROPOSITION 3'.— *La proposition 3 est encore vraie lorsque X_0 n'est pas supposée kählérienne.*

Dans la démonstration de la proposition 3, l'existence d'une métrique kählérienne sur X_0 a été utilisée uniquement pour borner le volume de Γ_t, et plus précisément l'intégrale $\int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u^*_t\varkappa_t$. Choisissons une métrique hermitienne sur X' induisant sur chaque fibre une métrique kählérienne, et une métrique sur X de la façon suivante : soient $\varkappa_0$ la 2-forme d'une métrique hermitienne standard sur X_0, et ϑ_0 une 2-forme fermée (réelle) sur X_0 telle que $\vartheta_0^{1,1} = \varkappa_0$. Quitte à réduire U, on peut étendre ϑ_0 en une 2-forme fermée ϑ sur X, de façon que la 2-forme $\varkappa_u = \vartheta_u^{1,1}$ soit positive non-dégénérée pour tout $u \in U$. On munit X d'une métrique hermitienne induisant sur chaque fibre X_u la métrique standard de forme fondamentale $\varkappa_u$. On a alors

$$\int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u_t^*\varkappa_t = \int_{X'_t} \varkappa'_t \wedge u_t^*\vartheta_t = [\varkappa'_t].\varphi_t[\vartheta_t] ,$$

et cette fonction de t est la restriction d'une fonction continue sur U, donc bornée au voisinage de o.

Démontrons maintenant le théorème 3. Soit (X_o,σ) une surface K3 marquée ; soient h_o une métrique hermitienne standard sur X_o, $\varkappa_o$ sa 2-forme fondamentale, et k_o la classe associée dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_o)$. D'après la proposition 7 il existe une surface K3 marquée (X'_o,σ') et une classe de Kähler $k'_o \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X'_o)$, telles que :

a) (X'_o,σ') a même période que (X_o,σ) ;

b) $\sigma(k_o) = \sigma'(k'_o)$.

On déduit de a) comme au § 2 qu'il existe des familles de Kuranishi $f : X \longrightarrow U$ et $f' : X' \longrightarrow U$ pour X_o et X'_o, et un isomorphisme $\varphi : R^2f_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow R^2f'_*(\mathbb{Z})$ induisant pour chaque $u \in U$ une isométrie de Hodge $\varphi_u : H^2(X_u,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X'_u,\mathbb{Z})$. De plus il existe une partie dense T de U telle que X_t et X'_t soient projectives pour $t \in T$. Il s'agit de montrer que φ_t est *effective* pour $t \in T$ assez proche de o : en effet on déduira alors du théorème 1 des isomorphismes $u_t : X'_t \longrightarrow X_t$ tels que $u_t^* = \varphi_t$, et la proposition 3' permettra de conclure que X_o est isomorphe à X'_o, donc kählérienne.

Soit ϑ'_o une forme de Kähler de classe k'_o, et soit ϑ_o une 2-forme réelle fermée sur X_o telle que $\vartheta_o^{1,1} = \varkappa_o$ et $[\vartheta_o] = k_o$. Quitte à réduire U, on peut étendre ϑ_o et ϑ'_o en des formes fermées ϑ sur X et ϑ' sur X', de façon que les composantes de type $(1,1)$ de ϑ_u et ϑ'_u soient positives non-dégénérées pour tout u. Notons k_u la projection de $[\vartheta_u]$ sur $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X_u)$ et k'_u la projection de $[\vartheta'_u]$ sur $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X'_u)$. On a par b) $\varphi_o(k_o) = k'_o$, d'où $\varphi_u([\vartheta_u]) = [\vartheta'_u]$ pour tout $u \in U$, et, puisque φ_u est une isométrie de Hodge, $\varphi_u(k_u) = k'_u$. On déduit alors du lemme que φ_u est effective lorsque X_u et X'_u sont kählériennes, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[B] E. BISHOP - *Conditions for the analyticity of certain sets*, Mich. Math. J. 11 (1964), 289-304.

[Bk] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6, Masson, Paris, 1981.

[B-R] D. BURNS, M. RAPOPORT - *On the Torelli problem for kählerian* K3 *surfaces*, Ann. Sci. ENS 8(1975), 235-274.

[G] P. GAUDUCHON - *Le théorème de l'excentricité nulle*, C.R. Acad. Sci. Paris 285 (1977), 387-390.

[Gr] P. GRIFFITHS - *Periods of integrals on algebraic manifolds*, II, Amer. J. of Math. 90(1968), 805-865.

[I-S] H. INOSE, T. SHIODA - *On singular* K3 *surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry, a collection of papers dedicated to K. Kodaira, Iwanami, Tokyo et C.U.P., Cambridge (1977), 119-136.

[K] V. KULIKOV - *Degenerations of* K3 *surfaces and Enriques surfaces*, Math. USSR Izvestija 11(1977), 957-989.

[L] E. LOOIJENGA - *A Torelli theorem for Kähler-Einstein* K3 *surfaces*, Springer Lect. Notes in Math. 892(1980), 107-112.

[L-P] E. LOOIJENGA, C. PETERS - *Torelli theorems for Kähler* K3 *surfaces*, Compositio Math. 42(1981), 145-186.

[M] Y. MIYAOKA - *Kähler metrics on elliptic surfaces*, Proc. Japan Acad. 50(1974), 533-536.

[P-P] U. PERSSON, H. PINKHAM - *Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle*, Ann. of Math. 113(1981), 45-66.

[P-Š] I. PJATECKII-ŠAPIRO, I.R. ŠAFAREVIČ - *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type* K3, Math. USSR Izvestija 5(1971), 547-588.

[S] Y.T. SIU - *Every* K3 *surface is Kähler*, Invent. Math. 73(1983), 139-150.

[Sh] T. SHIODA - *The period map of abelian surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 25 (1978), 47-59.

[T] A. TODOROV - *Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of* K3 *surfaces*, Inventiones Math. 61(1980), 251-265.

[W] A. WEIL - *Final report on contract* AF 18(603)-57 (1958), Collected papers, vol. 2, 390-395, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[X] Périodes des surfaces K3, Séminaire de géométrie de l'Ecole Polytechnique 1981-82, I, à paraître.

[Y] S.T. YAU - *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, I, Comm. Pure and Applied Math. 31(1978), 339-411.

Arnaud BEAUVILLE

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX