Astérisque

BERNARD MAUREY

Sous-espaces l^p des espaces de Banach

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki, exp. nº 608, p. 199-215

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__199_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 608 Février 1983

SOUS-ESPACES ℓ^p DES ESPACES DE BANACH

par Bernard MAUREY

On désigne par ℓ_n^p l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$. La distance de Banach-Mazur $d(E,F)$ de deux espaces de Banach E et F est définie par

$$d(E,F) = \inf\{\|T\| . \|T^{-1}\| ; T \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } F\} .$$

On présente dans cet exposé un certain nombre de résultats sur l'existence de sous-espaces isomorphes à ℓ_n^p ou à ℓ^p dans les espaces de Banach généraux. La section 0 introduit quelques notations et les renseignements "de base" sur les plongements de ℓ^p dans L^q . La section 1 contient les résultats sur les ℓ_n^p ; elle est divisée en deux parties : la section 1.1 présente des résultats dont la démonstration utilise des méthodes du type géométrie intégrale ou de nature probabiliste, qui font toutes appel à des phénomènes de "concentration de la mesure". On énonce en particulier le théorème déjà ancien (1961) de Dvoretzky sur les "sections presque sphériques des corps convexes". Sous une forme affaiblie, il indique que tout espace de Banach de dimension infinie contient une suite de sous-espaces (X_n) telle que $\lim_n d(X_n,\ell_n^2) = 1$. Il s'agit bien sûr d'une propriété de structure fondamentale, qui a de nombreuses conséquences. Elle sert par exemple à démontrer le théorème de Lindenstrauss et Tzafriri [41] selon lequel un espace de Banach dont tous les sous-espaces fermés sont complémentés est isomorphe à un espace de Hilbert.

La section 1.2 présente des résultats sur l'existence de sous-espaces ℓ_n^p qui utilisent des méthodes de type combinatoire. La section 2 est consacrée aux problèmes de dimension infinie (recherche de sous-espaces isomorphes à ℓ^p). Enfin la section 3 contient quelques indications succintes sur certaines démonstrations, le plus souvent dans des cas très particuliers, mais qui je l'espère peuvent mettre le lecteur "dans l'ambiance" de cette partie de la géométrie des espaces de Banach.

0. Plongements de ℓ^p dans L^q

Le plongement le plus simple de ℓ_n^2 dans les espaces L^p est obtenu de la façon suivante : soient S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et μ_{n-1} l'unique probabilité invariante par rotation sur S_{n-1} .

Si on désigne par L l'espace (de dimension n) des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^n$ on voit immédiatement que pour tout $p \in [1,\infty]$ la norme de $L^p(S_{n-1},\mu_{n-1})$ induit sur L un multiple de la norme euclidienne.

Par ailleurs pour $p \in]0,2]$ il existe une probabilité ν_p sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est $t \longrightarrow e^{-|t|^p}$. Soit (f_i) une suite de variables aléatoires (v.a.) indépendantes de loi ν_p (on dit qu'une v.a. réelle f définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, admet la loi ν si $P\{f \in B\} = \nu(B)$ pour tout borélien B de $\mathbb{R}$. Dans le cas où $\nu = \nu_p$, on dit que f est une v.a. p-stable). On voit sans peine que si $\sum_i |c_i|^p = 1$, la v.a. $\sum_i c_i f_i$ admet aussi la même loi ν_p , d'où il résulte que $\int |\sum_i c_i f_i|^q dP = \int |f_1|^q dP$, quantité qui est finie lorsque $0 < q < p < 2$, ou bien si $p = 2$, $q < \infty$. On obtient donc

$$\text{si } 0 < q < p < 2 , \quad \forall (c_i) , \quad \|\sum_i c_i f_i\|_q = K(p,q).(\sum_i |c_i|^p)^{1/p}$$

et

$$\text{si } p = 2 , q < \infty , \quad \forall (c_i) , \quad \|\sum_i c_i f_i\|_q = K(q).(\sum_i |c_i|^2)^{1/2} .$$

Autrement dit, ℓ^p est isométrique à un sous-espace de L^q si $0 < q \leq p < 2$, et ℓ^2 est isométrique à un sous-espace de L^q pour tout q . Plus généralement, on peut remplacer ℓ^p par L^p (cf. [11]) dans l'énoncé précédent.

1. Étude en dimension finie

1.1. Résultats utilisant un phénomène de "concentration de la mesure"

Nous commencerons par énoncer le théorème de Dvoretzky [16], en fait dans une version améliorée due à V. Milman [48].

THÉORÈME 1.1.1.— *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c(\varepsilon) > 0$ *tel que tout espace normé* X *de dimension* n *contienne un sous-espace* Y *de dimension* k *avec* $k \geq c(\varepsilon) \operatorname{Log} n$ *et* $d(Y,\ell^2_k) \leq 1 + \varepsilon$.

(La version originale [16] donnait $\sqrt{\operatorname{Log} n}$ au lieu de $\operatorname{Log} n$.)

Il est assez facile de voir (cf. [24] proposition 3.2) que l'estimation en $\operatorname{Log} n$ est la meilleure possible en général (on ne peut pas faire mieux dans ℓ^∞_n). Par contre des résultats surprenants par la "grosseur" de Y ont été obtenus par Figiel, Lindenstrauss et Milman [24] pour certaines classes particulières d'espaces X (et indépendamment par Kashin [36] lorsque $X = \ell^1_n$ dans 1.1.2).

THÉORÈME 1.1.2.— *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c(\varepsilon) > 0$ *tel que tout sous-espace de dimension* n X *de* L^p , $1 \leq p \leq 2$, *contienne un sous-espace* Y *de dimension* k *avec* $k \geq c(\varepsilon)n$ *et* $d(Y,\ell^2_k) \leq 1 + \varepsilon$.

Plus généralement on peut remplacer L^p par un espace de cotype 2 dans l'énoncé du théorème 1.1.2 ([24], theorem 5.2).

Les démonstrations de [48] et [24] utilisent l'inégalité isopérimétrique pour les sous-ensembles de la sphère S_{n-1} ([40], [63]), et la notion de médiane : si f est une fonction réelle continue sur S_{n-1} on appelle médiane de f sur S_{n-1} l'unique réel c tel que les deux ensembles $\{f \geq c\}$ et $\{f \leq c\}$ aient une mesure $\geq 1/2$ pour μ_{n-1}. Les théorèmes 1.1.1 et 1.1.2 découlent du résultat suivant de [24].

THÉORÈME 1.1.3.— *Soient φ une semi-norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\varphi(x) \leq \|x\|_2$ et m la médiane de φ sur S_{n-1}. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier k tel que $1+k < c(\varepsilon)nm^2$ il existe un sous-espace Y de dimension k tel que*

$$\forall x \in Y , \quad (1-\varepsilon)m \leq \frac{\varphi(x)}{\|x\|_2} \leq (1+\varepsilon)m .$$

On peut prendre $c(\varepsilon) = \varepsilon^3(32(1+\varepsilon))^{-1}$.

On trouvera une esquisse de démonstration en 3.1. Pour passer du théorème 1.1.3 aux précédents, il suffit de savoir minorer la médiane m dans diverses situations. A cet effet, il est généralement plus facile d'évaluer $\int \varphi d\mu_{n-1}$, et d'utiliser l'inégalité $\int \varphi d\mu_{n-1} \leq m + \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ qui résulte du lemme 3.1.1.

Indiquons la démonstration du théorème 1.1.2 dans le cas particulier où $X = \ell_n^p$, $1 \leq p \leq 2$. On considère sur $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_p(x) = n^{1/2-1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_2 .$$

Comme φ_p est une fonction croissante de p, il suffit de minorer $\int \varphi_1 d\mu_{n-1} = \sqrt{n}\int |x_1| d\mu_{n-1}(x) \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, donc $m_p \geq m_1 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $1 \leq p \leq 2$.

Pour le théorème 1.1.1 on utilise le lemme de Dvoretzky-Rogers [17] qui implique l'énoncé suivant (cf. [24], (4.2)) : si E est un espace vectoriel de dimension n muni d'une norme φ, il existe une norme euclidienne $\|.\|_2$ sur E telle que $\varphi(x) \leq \|x\|_2$ et une base orthonormée $(u_1,\ldots,u_n)$ dans E telle que $\varphi(u_j) \geq 1/2$ si $1 \leq j \leq 9n/25$. On en déduit

$$\int \varphi d\mu_{n-1} \geq \frac{1}{2}\int \sup_{j\leq 9n/25} |x_j| d\mu_{n-1}(x) \geq \gamma\sqrt{\frac{\operatorname{Log} n}{n}},$$ où γ est une constante universelle.

Les sous-espaces hilbertiens de ℓ_n^1 obtenus par le théorème 1.1.2 sont assez mystérieux. On peut en donner une description un peu plus intuitive grâce au résultat suivant, dû à G. Schechtman [62].

THÉORÈME 1.1.4.— *Soient n et k tels que $n \geq 16(\sqrt{2}-1)^{-2}(k \operatorname{Log} 19 + 2 \operatorname{Log} 2)$. Plus de la moitié des matrices $n \times k$ A à coefficients ± 1 vérifient*

$$\forall x \in \ell_k^2 , \quad \frac{1}{4}\|x\|_2 \leq n^{-1}\|Ax\|_1 \leq 4\|x\|_2 .$$

(où on considère A comme un opérateur de ℓ_k^2 dans ℓ_n^1).

Ce résultat utilise encore un argument de concentration, avec S_{n-1} remplacée par $\Omega = \{-1,1\}^{n\times k}$, et l'inégalité isopérimétrique remplacée par une inégalité exponentielle sur les grandes déviations dans la loi des grands nombres, voir quelques détails en 3.2. À ma connaissance, les inégalités exponentielles des probabilités ont été introduites dans la géométrie des espaces de Banach par Bennett, Goodman et Newman dans [5] où ils ont déterminé la taille des ℓ_k^2 plongeables dans ℓ_n^q , $2 \leq q < \infty$.

Passons maintenant aux plongements de ℓ_n^p dans certains espaces de Banach pour $p \neq 2$. Bien entendu, il n'y a pas de théorème de Dvoretzky pour $p \neq 2$: si on fixe $p \neq 2$ et un espace de Banach E , il n'y a pas en général de suite (X_n) de sous-espaces de E telles que $\sup_n d(X_n, \ell_n^p) < \infty$. (Prendre $E = \ell^2$! Plus généralement, des obstructions immédiates pour cette question sont fournies par les notions de type et de cotype, cf. [47].)

Puisque ℓ^p se plonge isométriquement dans L^1 si $1 \leq p \leq 2$, il en résulte assez facilement que ℓ_k^p se plonge $(1+\varepsilon)$-isomorphiquement dans ℓ_n^1 pour n assez grand. Toutefois des estimations précises sur les rapports de k et de n n'ont été obtenues que récemment par Johnson et Schechtman [34]. A nouveau k est étonnamment grand, puisqu'on peut le prendre proportionnel à n .

THÉORÈME 1.1.5 ([34]).— *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $1 \leq r \leq p < 2$. *Il existe* $c(\varepsilon,r,p) > 0$ *tel que pour tout* n *l'espace* ℓ_n^r *contienne un sous-espace* Y *de dimension* k *, avec* $k \geq c(\varepsilon,r,p).n$ *et* $d(Y,\ell_k^p) \leq 1+\varepsilon$.

Ce résultat a été généralisé par G. Pisier sous la forme suivante : soient $p \in \,]1,2]$ et (f_i) une suite de v.a. indépendantes p-stables, avec $E|f_i| = 1$ pour tout i (où Ef désigne l'espérance de la v.a. f). Si X est un espace normé, de dimension finie ou infinie, on introduit la quantité

$$M_p(X) = \sup\{E\|n^{-1/p}.\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\| \ ; \ n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ \|x_i\| \leq 1\} .$$

(On dit que X est de type p-stable si $M_p(X) < \infty$, cf. [47].)

THÉORÈME 1.1.6 ([56]).— *Soient* $p \in \,]1,2[$ *et* q *tel que* $1/p + 1/q = 1$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c(\varepsilon,p) > 0$ *tel que pour tout espace normé* X *et tout entier* $k \leq c(\varepsilon,p)(M_p(X))^q$ *, il existe un sous-espace* Y *de dimension* k *de* X *tel que* $d(Y,\ell_k^p) \leq 1+\varepsilon$

La démonstration utilise une représentation des v.a. stables à partir du processus de Poisson, ainsi qu'une inégalité exponentielle pour une classe de martingales à accroissements bornés (voir 3.3). Le résultat de Pisier est vrai pour $p = 2$, avec une démonstration différente mais plus simple. Il redonne l'existence de "gros" sous-espaces hilbertiens de ℓ_n^1 , mais ne donne rien si $X = \ell^2$!

Pour déduire 1.1.5 de 1.1.6 dans le cas $r = 1$, il suffit de noter que $M_p(\ell_n^1) \geq E\|n^{-1/p}.\sum_{i=1}^{n} f_i e_i\|_1 = n^{1/q}$ si $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de ℓ_n^1 .

Le théorème 1.1.6 permet de retrouver un résultat de [47]. Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Si on désigne par p_X le sup des réels $p \in]1,2]$ tels que X soit de type p-stable, il existe une suite de sous-espaces X_n de X telle que $\lim_n d(X_n, \ell_n^{p_X}) = 1$. En fait p_x est aussi la plus petite valeur de q telle que X contienne une suite de sous-espaces X_n telle que $\sup_n d(X_n, \ell_n^q) < \infty$.

1.1.7. <u>Autres résultats</u>

Benyamini et Gordon [6] ont étudié des factorisations aléatoires de l'identité de ℓ_n^2 à travers un espace X de dimension finie. On cherche à obtenir de cette façon, non seulement un sous-espace Y de X presque hilbertien, mais l'estimation de la norme d'une projection de X sur Y . Cet article utilise un résultat très intéressant de S. Chevet [13] qui provient de la théorie des processus gaussiens, et en particulier du lemme de Slepian [64].

Amir et Milman [3] ont utilisé le théorème de Dvoretzky et des méthodes probabilistes analogues à celles de 1.1.4 pour trouver des suites inconditionnelles dans les espaces de dimension finie.

Mentionnons encore les résultats de Kashin [36], Szarek et Tomczak-Jaegerman [67] sur les décompositions d'espaces de dimension finie en somme de deux sous-espaces presque hilbertiens, les résultats de Gluskin [26] sur le diamètre de l'ensemble des espaces normés de dimension n , et encore [23], [25], [32], [54], [68].

1.2. <u>Résultats utilisant des méthodes combinatoires</u>

Commençons par un résultat dû à J.-L. Krivine ([37], [39]) :

THÉORÈME 1.2.1.— *Soit* (x_i) *une suite de vecteurs d'un espace normé engendrant un sous-espace de dimension infinie. Il existe* $p \in [1,\infty]$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier* k *on puisse trouver* k *combinaisons linéaires des* (x_i) , *soient* $y_1^k, \dots, y_k^k$, *formées à partir de* k *paquets successifs disjoints de la suite* (x_i) , *de façon que*

$$\forall (\alpha_j) \in \mathbb{R}^k \ , \quad (1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^k |\alpha_j|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{j=1}^k \alpha_j y_j^k\right\| \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^k |\alpha_j|^p\right)^{1/p} .$$

Si on compare aux résultats de la section précédente, on note que l'on a une information supplémentaire sur la position du ℓ_k^p par rapport à la suite donnée (x_i) , mais en revanche on perd les informations quantitatives du type 1.1.5. Le qualificatif "combinatoire" s'applique assez bien à la démonstration originale de [37], il est plus contestable pour les versions plus récentes [39]. Une idée-clef de la démonstration peut être expliquée ainsi : supposons que X soit un espace invariant par réarrangement de fonctions mesurables sur $[0,\infty[$, contenant la fonction $f(x) = x^{-1/p}$, avec $\|f\| = 1$. Si $(f_1,\dots,f_n)$ sont des fonctions de X à supports disjoints, ayant la même distribution que f (c'est-à-dire que $|f_i|$ et

$|f|$ ont la même réarrangée décroissante), $\sum_{j=1}^{k} c_j f_j$ a la même distribution que f lorsque $\sum_{j=1}^{k} |c_j|^p = 1$, donc $\|\sum_{j=1}^{k} c_j f_j\| = (\sum_{j=1}^{k} |c_j|^p)^{1/p}$ (cf. [44], theorem 2f2). La première partie du travail consiste à remplacer la suite (x_i) par une structure asymptotique plus régulière, presque aussi agréable qu'un espace invariant par réarrangement. Cette partie utilise des idées de Brunel et Sucheston [12], liées au lemme combinatoire de Ramsey. Même dans le cas d'un espace invariant par réarrangement, il n'y a pas de raison pour que $x^{-1/p} \in X$ pour un $p \in [1,\infty]$. Voir 3.4 à ce sujet.

Les résultats qui suivent concernent le cas particulier des sous-espaces ℓ_k^1 . Le premier est dû à V. Milman [49].

THÉORÈME 1.2.2.— *Soient* $(e_1,\ldots,e_n)$ *des fonctions sur un ensemble* S , *ne prenant que les valeurs* ± 1 . *Il existe* $I \subset \{1,\ldots,n\}$ *tel que*

$$\forall (c_i)\ ,\quad \|\sum_{i\in I} c_i e_i\|_\infty = \sum_{i\in I} |c_i| \quad \text{et} \quad \operatorname{card} I \geq \frac{\gamma M^2}{n \operatorname{Log} n}\ ,$$

où γ *est une constante universelle et* $M = 2^{-n} \sum_{\pm} \|\sum_{i=1}^{n} \pm e_i\|_\infty$.

Le théorème de Milman s'appuie sur un lemme combinatoire de Sauer ([61], voir lemme 3.5.1 plus loin). Il a été inspiré par un résultat de Pisier [55] sur les ensembles de Sidon, qui utilisait, lui, une méthode aléatoire.

Le résultat suivant a été démontré récemment par J. Elton [20]. Il s'apparente au théorème 1.2.2 (l'outil de base est encore le lemme de Sauer) mais sa démonstration est plus délicate. Il améliore considérablement un résultat plus ancien de Pisier [53].

THÉORÈME 1.2.3.— *Pour tout* $\delta \in]0,1]$ *il existe* $c(\delta) > 0$ *tel que si* $(e_1,\ldots,e_n)$ *sont des vecteurs de norme* 1 *dans un espace normé réel vérifiant* $2^{-n} \sum_{\pm} \|\sum_{i=1}^{n} \pm e_i\| \geq \delta n$, *on puisse trouver* $I \subset \{1,\ldots,n\}$ *avec* $\operatorname{Card} I \geq c(\delta).n$ *et* $\forall (c_i)$,
$\|\sum_{i\in I} c_i e_i\| \geq c(\delta) . \sum_{i\in I} |c_i|$.

Le théorème d'Elton vient d'être généralisé au cas complexe par A. Pajor [51]. La démonstration nécessite de nouveaux lemmes combinatoires qui étendent le lemme de Sauer. Mentionnons encore les résultats d'Alon et Milman [2] sur les sous-ℓ_k^∞ qui utilisent un autre lemme du type Sauer.

2. Problèmes de dimension infinie

On peut chercher dans quelle mesure les résultats sur ℓ_n^p s'étendent en dimension infinie, c'est-à-dire en remplaçant ℓ_n^p par ℓ^p . Il est clair tout d'abord que le théorème de Dvoretzky ne s'étend pas de cette façon (par exemple ℓ^1 ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ^2 , puisque les faiblement compacts de ℓ^1

sont compacts). On a cependant cru longtemps que la réponse au "problème du sous-ℓ^p" - tout espace de Banach de dimension infinie contient-il un ℓ^p ou c_0 ? - pouvait être positive, jusqu'à ce que Tsirelson donne un exemple d'un espace réflexif qui ne contient aucun sous-espace isomorphe à un ℓ^p ([69] ou [43], example 2.e.1).

Pour un espace de Banach, le fait de ne pas contenir de sous-espace isomorphe à ℓ^1 ou à c_0 exprime un certain degré de régularité (en considérant que ℓ^2 possède la régularité idéale). Par exemple, James a montré qu'un espace à base inconditionnelle est réflexif si et seulement s'il ne contient pas ℓ^1 ou c_0 ([31]). Des résultats remarquables de Rosenthal [58] et Odell-Rosenthal [50] ont mis en lumière une propriété fondamentale de structure des espaces qui ne contiennent pas ℓ^1.

Pour introduire ces résultats, commençons par une remarque très simple : soit (e_n) la base canonique de ℓ^1. Il est évident que pour toute sous-suite (e_{n_k}) de (e_n), il existe $x^* \in \ell^\infty$ tel que $\langle x^*, e_{n_k}\rangle$ ne converge pas quand $k \to \infty$. La suite (e_n) n'a donc pas de sous-suite de Cauchy-faible (on dit que $(x_n) \in X$ est de Cauchy faible si $\lim_n \langle x^*, x_n\rangle$ existe pour tout $x^* \in X^*$, dual de X, autrement dit si (x_n) converge vers un $x^{**} \in X^{**}$ pour $\sigma(X^{**}, X^*)$). Par conséquent, les points adhérents à la suite (e_n) dans $\sigma(\ell^{1**}, \ell^1)$ ne peuvent pas être obtenus comme limites de sous-suites de (e_n). Les résultats de Rosenthal et Odell-Rosenthal sont des sortes de réciproques :

THÉORÈME 2.1 ([58] dans le cas réel, Dor [15] dans le cas complexe).— *Si* (x_n) *est une suite bornée dans un espace de Banach, elle admet une sous-suite de Cauchy faible ou une sous-suite* (x_{n_k}) *équivalente à la base canonique de* ℓ^1 *(c'est-à-dire qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\|\sum_k c_k x_{n_k}\| \geq \delta \sum_k |c_k|$ *, pour tous les* (c_k) *).*

On peut reformuler ce théorème en disant que toute suite (f_n) de fonctions continues sur un compact K telle que $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ admet, soit une sous-suite qui converge simplement sur K, soit une sous-suite équivalente à la base de ℓ^1. Si par exemple (f_n) est orthonormée dans $L^2(K,\mu)$, elle ne peut avoir de sous-suite simplement convergente (appliquer le théorème de Lebesgue) donc elle admet des sous-suites équivalentes à la base de ℓ^1 (pour la norme de $C(K)$). Si les (f_n) sont une suite de caractères d'un groupe compact abélien, on obtient une démonstration abstraite de l'existence d'ensembles de Sidon.

THÉORÈME 2.2 ([50]).— *Soit* X *un espace de Banach séparable. Si* X *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* ℓ^1 *, tout élément de* X^{**} *est limite pour* $\sigma(X^{**}, X^*)$ *d'une suite d'éléments de* X *.*

Farahat [21] (voir aussi [43], theorem 2.e.5) a montré que l'on peut utiliser la propriété de Ramsey des sous-ensembles analytiques de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ ([19], voir 3.6.) pour la démonstration du théorème 2.1. Le théorème 2.2 a été généralisé par

Rosenthal [59] et Bourgain-Fremlin-Talagrand [7] à l'étude des ensembles de fonctions de première classe de Baire compacts pour la convergence simple. Les propriétés spéciales des espaces qui ne contiennent pas ℓ^1 , données par les théorèmes 2.1 et 2.2 sont utilisées très souvent. Citons par exemple l'application à la théorie isométrique de la dualité donnée par Godefroy dans [27].

Revenons au "problème du sous-ℓ^p ". La réponse au problème général étant négative, on doit chercher si elle devient positive dans certaines classes particulières d'espaces de Banach. Il y a en fait peu de résultats du type " X contient un sous-espace isomorphe à un ℓ^p , pour un $p \in]1,\infty[$ " sans que p apparaîsse plus ou moins clairement dans la définition de X . L'un de ces rares résultats concerne les espaces d'Orlicz de suites : si φ est une fonction convexe croissante sur $[0,+\infty[$, nulle en 0 , on désigne par ℓ^φ l'espace des suites numériques (c_n) telles que $\sum_n \varphi(\varepsilon|c_n|) < \infty$ pour au moins un $\varepsilon > 0$. Lindenstrauss et Tzafriri ont montré dans [42] que tout espace ℓ^φ contient un ℓ^p ou c_0 . La démonstration utilise le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff pour montrer qu'un certain convexe compact de $C[0,1]$ contient x^p pour un p . D'une certaine façon, ce résultat est l'ancêtre d'un théorème remarquable de D. Aldous [1] pour les sous-espaces de L^1 . En effet, dans le cas où $\varphi(x)/x^2$ est décroissante, ℓ^φ est isomorphe à un sous-espace de L^1 (cf. [10]).

THÉORÈME 2.3 ([1]).— *Tout sous-espace de dimension infinie de* L^1 *contient un sous-espace isomorphe à* ℓ^p *, pour un* $p \in [1,2]$ (*et même* $(1+\varepsilon)$*-isomorphe, pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné*).

Kadec et Pelczynski ont montré depuis longtemps qu'un sous-espace non réflexif de L^1 contient ℓ^1 ([35]), le vrai problème se pose donc pour un sous-espace réflexif. La démonstration de 2.3 suit les idées du théorème 1.2.1 de Krivine jusqu'à un certain point. Malheureusement (et c'est faux en général d'après Tsirelson) les différents ℓ^p_n de Krivine n'ont aucune raison de se recoller pour former un ℓ^p .

Le théorème d'Aldous a été généralisé dans [38] à une classe d'espaces appelés espaces de Banach stables, mais le "problème du sous-ℓ^p " n'est pas encore bien compris en général. Par ailleurs le théorème d'Aldous a été précisé par Guerre et Lévy [28]. D'après les résultats de Rosenthal [57], l'indice p_X introduit plus haut (commentaires du théorème 1.1.6) est égal pour un sous-espace X de L^1 au sup des valeurs $q \le 2$ telles que X puisse se plonger dans L^q . Comme par ailleurs ℓ^p ne se plonge pas dans L^q si $p < q \le 2$, on voit que X ne peut contenir ℓ^p que si $p_X \le p \le 2$. Or précisément Guerre et Lévy montrent que tout sous-espace X de dimension infinie de L^1 contient un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à ℓ^{p_X} .

Terminons cette section par quelques problèmes ouverts dans la "théorie infinie-dimensionnelle". Les deux premiers sont des affaiblissements du "problème du sous-ℓ^p ".

Problème 2.4.— Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Contient-il toujours ℓ^1 , c_0 ou un sous-espace réflexif ?

On connait quelques réponses partielles, par exemple lorsque E^{**} est séparable [33]. Voir aussi [18].

Problème 2.5.— Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Contient-il toujours une suite inconditionnelle infinie, c'est-à-dire une suite (x_n) telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout entier n et qu'il existe C pour lequel $\|\sum_n \pm a_n x_n\| \le C\|\sum_n a_n x_n\|$ pour tout choix des (a_n) et des $\pm$.

Le résultat fini-dimensionnel de J. Elton (1.2.3) a été suscité par un problème infini-dimensionnel tiré de [8], [60].

Problème 2.6.— Soit T un opérateur linéaire de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans un espace de Banach X tel que $|f| = 1 \Rightarrow \|Tf\| \ge 1$. L'espace X contient-il un sous-espace isomorphe à L^1 ?

Mentionnons pour finir un problème curieux qui semble difficile et pour lequel presqu'aucun résultat partiel n'est connu. Ce problème est connu comme "problème de la distorsion".

Problème 2.7.— Soit E un espace isomorphe à ℓ^2 . Contient-il pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-espace E_ε tel que $d(E_\varepsilon,\ell^2) \le 1+\varepsilon$?

On peut poser la même question pour ℓ^p . La réponse est oui, et est assez facile, pour ℓ^1 et c_0 (James [30]). Pour ℓ^p , $1 < p \le 2$, la réponse est oui si E est isométrique à un sous-espace de L^1 . Cela résulte du théorème d'Aldous, mais avait été démontré antérieurement par Dacunha-Castelle et Krivine [14].

3. Esquisses de quelques démonstrations

3.1. Théorème de Figiel-Lindenstrauss-Milman (1.1.3)

On utilise la conséquence suivante de l'inégalité isopérimétrique pour S_{n-1} .

Lemme 3.1.1.— *Soit* $A \subset S_{n-1}$, *avec* $\mu_{n-1}(A) \ge 1/2$. *On a* $\mu_{n-1}((A_\varepsilon)^c) \le 2e^{-n\varepsilon^2/2}$, *où* $A_\varepsilon = \{x \in S_{n-1} ; d(x,A) \le \varepsilon\}$, d *étant la distance géodésique sur* S_{n-1} *et où* B^c *désigne le complémentaire de* B .

Lemme 3.1.2.— *Soient* φ *une fonction* 1-*lipschitzienne sur* S_{n-1} *et* m *sa médiane. Si* K *est* $< \frac{1}{4}\exp(n\varepsilon^2 m^2/2)$ *et si* $(y_1,\dots,y_K)$ *sont des points de* S_{n-1} , *il existe une isométrie* U *de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $\varphi(Uy_i) \in [(1-\varepsilon)m,(1+\varepsilon)m]$ *pour tout* $i = 1,2,\dots,K$.

Démonstration.— On a $\{\varphi > (1+\varepsilon)m\} \subset (A_{\varepsilon m})^c$ où $A = \{\varphi \le m\}$, et de même pour l'autre inégalité, donc $\mu_{n-1}\{\varphi \notin [(1-\varepsilon)m,(1+\varepsilon)m]\} \le 4e^{-n\varepsilon^2 m^2/2}$. Par ailleurs si ν_n désigne la probabilité de Haar sur le groupe orthogonal, on a pour $y \in S_{n-1}$ et B borélien de S_{n-1}, $\nu_n\{U ; U(y) \in B\} = \mu_{n-1}(B)$ donc

$$\nu_n\{U ; \exists i \in \{1,\ldots,K\} \text{ t.q. } \varphi(Uy_i) \notin [(1-\varepsilon)m,(1+\varepsilon)m]\} \leq 4Ke^{-n\varepsilon^2m^2/2} .$$

Le lemme suivant est classique, on l'obtient par des considérations de volume.

Lemme 3.1.3.— *Pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $y_1,\ldots,y_K \in S_{k-1}$ *avec* $S_{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{K} B(y_j,\delta)$ *et* $K \leq (1 + 2/\delta)^k \leq e^{2k/\delta}$.

La démonstration de 1.1.3 découle des trois lemmes précédents. Considérons $\mathbb{R}^k$ comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$, et soit $(y_j)_{j=1}^K$ une famille de points de S_{k-1} vérifiant le lemme 3.1.3 pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Posons $R = \{y_j ; j = 1,\ldots,K\}$. D'après le lemme 3.1.2 il existe U tel que $\varphi(Uy) \in [(1-\frac{\varepsilon}{2})m,(1+\frac{\varepsilon}{2})m]$ pour tout $y \in R$, à condition que

$$e^{4(1+\varepsilon)k/\varepsilon} < \frac{1}{4}e^{n\varepsilon^2m^2/8},$$

ce qui est garanti par la condition de l'énoncé de 1.1.3. Si $z \in S_{k-1}$, on peut écrire $z = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i x_i$, avec $|\lambda_i| \leq \delta^i$ et $x_i \in R$, donc $\varphi(Uz) \leq \frac{1+\varepsilon/2}{1-\delta}m = (1+\varepsilon)m$. On a donc $\sup\{\varphi(Ux) ; x \in S_{k-1}\} \leq (1+\varepsilon)m$. Par ailleurs il existe $y \in R$ tel que $\|z-y\| \leq \delta$, donc $\varphi(Uz) \geq \varphi(Uy) - \varphi(U(y-z)) \geq (1-\frac{\varepsilon}{2}-\delta(1+\varepsilon))m = (1-\varepsilon)m$, ce qui prouve 1.1.3, en prenant pour Y l'image de $\mathbb{R}^k$ par U .

3.2. Théorème de Schechtman (1.1.4)

À $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j}) \in \Omega = \{-1,+1\}^{n\times k}$ on associe la matrice $A_\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})$. On munit Ω de sa probabilité naturelle P . Pour $x \in S_{k-1}$ on considère la v.a. sur Ω

$$Z_x(\varepsilon) = \|A_\varepsilon(x)\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_{i,j}x_j\right| .$$

D'après le raisonnement de 3.1 il suffit de démontrer une inégalité de la forme :

$$P\{\varepsilon ; Z_x(\varepsilon) \notin [\tfrac{n}{2},2n]\} \leq e^{-\gamma k} .$$

On voit que Z_x est une somme de v.a. indépendantes et de même loi que $|X| = \left|\sum_{j=1}^{k}x_j\varepsilon_j\right|$, les (ε_j) étant des variables de Bernoulli. On a pour tout λ réel

$$Ee^{\lambda(Z_x-EZ_x)} = \left(Ee^{\lambda(|X|-E|X|)}\right)^n .$$

On peut voir que $Ee^{\lambda(|X|-E|X|)} \leq e^{\lambda^2}$, donc $Ee^{\lambda(Z_x-EZ_x)} \leq e^{n\lambda^2}$, d'où résulte $P(|Z_x - EZ_x| > c) \leq 2e^{-c^2/4n}$. Par ailleurs l'inégalité de Khintchine [66] fournit $\frac{n}{\sqrt{2}} \leq EZ_x \leq n$, ce qui permet de conclure.

3.3. Théorème de Pisier (1.1.5)

Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ des vecteurs de norme ≤ 1 dans un espace normé X , (f_i) une suite de v.a. indépendantes p-stables, avec $E|f_i| = c_p$ à préciser.

Lemme 3.3.1.— *Soit* $(Z_j)_{j=1}^{\infty}$ *une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans* X , *prenant les valeurs* $\pm x_i$ *avec probabilité* $\frac{1}{2n}$. *Il existe une v.a.* S *à valeurs dans* X , *de même loi que* $n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, *telle que*

$$E\|S - \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p} Z_j\| \leq K(p) .$$

Le lecteur familier avec les manipulations sur le processus de Poisson se convaincra plus ou moins aisément que $S = \sum_{j=1}^{\infty} T_j^{-1/p} Z_j$, où les (T_j) sont les temps de saut d'un processus de Poisson indépendant des (Z_j) et pour un c_p convenable, a la même loi que $n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$. Il suffit alors de calculer $E\sum_{j=1}^{\infty} |T_j^{-1/p} - j^{-1/p}| = K(p) < \infty$ pour $p \in]1,2[$.

Lemme 3.3.2.— *Soit* (U_j) *une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans la boule unité d'un espace de Banach, telle que* $U = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p} U_j$ *converge. On a pour tout* $c > 0$ *et* $1 < p \leq 2$

$$P\{|\,\|U\| - E\|U\|\,| > c\} \leq 2\exp(-\gamma_p . c^q) ,$$

où $1/q + 1/p = 1$.

Ce lemme utilise une variante du lemme d'Azuma [4]. On peut en trouver la démonstration détaillée dans [34].

Pour terminer la démonstration de 1.1.6 on considère $V = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p} Z_j$, et on introduit des copies indépendantes $S_1,\ldots,S_k$, et $V_1,\ldots,V_k$ de S et de V respectivement, avec $E\|V_i - S_i\| \leq K$ pour chaque i . Soient (α_i) tels que $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^p = 1$. La v.a. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i S_i$ a la même loi que S , et $E\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (V_i - S_i)\| \leq K k^{1/q}$, donc en posant $M = E\|S\|$, on aura $|E\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i\| - M| \leq \frac{\varepsilon M}{2}$ si $k \leq (\frac{\varepsilon M}{2K})^q$, et on peut déduire du lemme 3.3.2 l'inégalité

$$P\{|\,\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i\| - E\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i\|\,| > \frac{\varepsilon M}{2}\} \leq 2\exp(-\gamma(\frac{\varepsilon M}{2})^q) ,$$

ce qui permettra de conclure comme en 3.2.

3.4. Théorème de Krivine (1.2.1)

Soit X un espace de fonctions mesurables complexes sur $[0,\infty[$ tel que $f \in X$, $|g| \leq |f| \Rightarrow (g \in X$ et $\|g\| \leq \|f\|)$ et $f \in X \Leftrightarrow f^* \in X$ avec $\|f\| = \|f^*\|$, où f^* désigne la réarrangée décroissante de $|f|$. Posons pour $\lambda > 0$

$$D_\lambda f(x) = f(x/\lambda) .$$

On peut faire les observations suivantes :

a) $D_\lambda D_\mu = D_{\lambda\mu}$ et pour $\lambda \geq 1$, $\|f\| \leq \|D_\lambda f\| \leq \lambda \|f\|$.

b) Si les (g_i) sont à supports disjoints, et si g_i a la même distribution que $D_{c_i} f$, Σg_i a la même distribution que $D_{\Sigma c_i} f$.

c) Pour $\lambda \geq 1$, le rayon spectral de D_λ est de la forme λ^ρ , avec $0 \leq \rho \leq 1$.

Le nombre ρ est égal à l'un des indices de Boyd de X [9]. Soit $\lambda_0 > 1$ fixé. Si α est un point frontière de $\mathrm{Sp}\, D_{\lambda_0}$, il existe dans X une suite (f_n) telle que $\|f_n\| = 1$ et $D_{\lambda_0} f_n - \alpha f_n \longrightarrow 0$ (cf. [38], proposition IV.1). Comme $|D_\lambda f| = D_\lambda |f|$, on peut supposer $f_n \geq 0$ et $\alpha = \lambda_0^\rho$. On peut choisir n_0 assez grand pour avoir, en posant $f_{n_0} = f$:

$$\|D_\mu f - \mu^\rho f\| \leq \varepsilon/k \quad \text{si} \quad \mu \in \{\lambda_0^m \,;\, m \in \mathbb{Z},\ |m| \leq M\} = B\ .$$

Posons $p = \frac{1}{\rho}$. Soient (g_j), $j = 1,\ldots,k$ des fonctions à supports disjoints ayant la même distribution que f. Si $\sum_{j=1}^{k} |c_j|^p = 1$, on peut approcher, lorsque $\lambda_0 - 1$ est assez petit et M assez grand, $|c_j|$ par $\mu_j^\rho \in B^\rho$ de façon que $|c_j| \leq \mu_j^\rho$ et $1 \leq \mu = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \leq 1 + \varepsilon$, $\sum_{j=1}^{k} \big||c_j| - \mu_j^\rho\big| \leq \varepsilon$.

On peut alors remplacer, avec une perturbation de norme $\leq \varepsilon/k$, chaque $\mu_j^\rho g_j$ par une fonction h_j de même support ayant la même distribution que $D_{\mu_j} f$, donc d'après b) $1 \leq \|D_\mu f\| = \|\sum_{j=1}^{k} h_j\| \leq \mu \leq 1 + \varepsilon$, ce qui donne finalement

$$(1 - 2\varepsilon) \leq \|\sum_{j=1}^{k} c_j g_j\| \leq (1 + 3\varepsilon)\ .$$

3.5. Théorème de Milman (1.2.2)

Le théorème 1.2.2 utilise le lemme de Sauer [61].

Lemme 3.5.1.– *Si* $A \subset \{-1,+1\}^n$ *est tel que* $\mathrm{Card}\, A > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k-1} = \varphi(n,k)$ *il existe* $I \subset \{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{Card}\, I \geq k$ *tel que* $P_I A = \{-1,+1\}^I$, *où* P_I *désigne la projection de* $\{-1,+1\}^n$ *sur* $\{-1,+1\}^I$.

On considère alors $\Phi : S \longrightarrow \{-1,+1\}^n$ définie par $\Phi(t) = (e_i(t))_{i=1}^n$, et on pose $A = \Phi(S)$. On a

$$M = \int_0^1 \sup_{\varepsilon \in A} \Big|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i r_i(s)\Big| ds\ ,$$

où (r_i) désigne la suite des fonctions de Rademacher. L'estimation classique $P\{s \,;\, |\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i r_i| > c\sqrt{n}\} \leq 2e^{-c^2/2}$ permet de voir que $\frac{M}{4n}\, e^{M^2/8n} \leq \mathrm{Card}\, A$. On utilise alors le lemme de Sauer et l'estimation $\varphi(n,k) \leq \frac{n^n}{(n-k)^{n-k} k^k}$ pour trouver I, avec $\mathrm{Card}\, I \geq \frac{\gamma M^2}{n \,\mathrm{Log}\, n}$ tel que $P_I A = \{-1,+1\}^I$. Le résultat en découle.

3.6. Théorème de Rosenthal (2.1) (d'après [21])

On peut utiliser la propriété de Ramsey [19]. Désignons par $\mathcal{P}_\infty(X)$ l'ensemble des parties infinies de X. Soit $A \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, analytique si on munit $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ de la topologie induite par la topologie produit de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Il existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}_\infty(M) \subset A$ ou bien $\mathcal{P}_\infty(M) \subset A^c$.

Démontrons 2.1 dans le cas particulier d'une suite (f_n) de fonctions sur un ensemble S, ne prenant que les valeurs ± 1, avec la norme du sup. Pour $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, notons $k(M)$ le k-ième élément de M pour l'ordre de $\mathbb{N}$, $k = 1,2,\ldots$. Considérons

$$A = \{M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \; ; \forall n \; , \; \exists t \in S \; , \; f_{k(M)}(t) = (-1)^k \; , \; k = 1,2,\ldots,n\} \; .$$

On voit que A est fermé. Il existe donc $M_0 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}_\infty(M_0) \subset A$ ou $\mathcal{P}_\infty(M_0) \subset A^c$. Si $(f_n)_{n \in M_0}$ n'est pas simplement convergente, il existe $M_1 \subset M_0$ et $t \in S$ tels que $f_{k(M_1)}(t) = (-1)^k$ pour tout k, donc $M_1 \in A$, donc on doit avoir $\mathcal{P}_\infty(M_0) \subset A$ dans ce cas. Considérons

$$M_2 = \{(2k)(M_0) \; ; \; k = 1,2,\ldots\} \quad ,$$

et posons $n_k = (2k)(M_0)$.

Pour toute suite (ε_k) donnée, où $\varepsilon_k = \pm 1$ on peut trouver M_3 tel que $M_2 \subset M_3 \subset M_0$ et tel que $n_h = k(M_3) \Rightarrow (-1)^{k(M_3)} = \varepsilon_h$. Il existe donc pour tout m un point $t \in S$ tel que $f_{n_k}(t) = \varepsilon_k$ pour $k \leq m$, d'où résulte :

$$\forall (a_k) \; , \quad \|\sum_k a_k f_{n_k}\|_\infty = \sum_k |a_k| \; .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.J. ALDOUS - *Subspaces of* L^1 *via random measures*, Trans. Amer. Mat. Soc. 267(1981), 445-463.

[2] N. ALON and V.D. MILMAN - *Embedding of* ℓ_∞^k *in finite dimensional Banach spaces*, à paraître.

[3] D. AMIR and V.D. MILMAN - *Unconditional and symmetric sets in* n*-dimensional normed spaces*, Israel J. Math. 37(1980), 3-20.

[4] K. AZUMA - *Weighted sums of certain dependent random variables*, Tohoku Math. J. 19(1967), 357-367.

[5] G. BENNETT, V. GOODMAN, C.M. NEWMAN - *Norms of random matrices*, Pacific J. Math. 59(1975), 359-365.

[6] Y. BENYAMINI and Y. GORDON - *Random factorization of operators between Banach spaces*, Journal d'Analyse Mathématique 39(1981), 45-74.

[7] J. BOURGAIN, D.H. FREMLIN and M. TALAGRAND - *Pointwise compact sets of Baire measurable functions*, Amer. J. Math. 100(1978), 845-886.

[8] J. BOURGAIN and H.P. ROSENTHAL - *Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory*, à paraître.

[9] D.W. BOYD - *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Canadian J. Math. 21(1969), 1245-1254.

[10] J. BRETAGNOLLE et D. DACUNHA-CASTELLE - *Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces* L^p , Ann. Ecole Normale Sup. 2(1969), 437-480.

[11] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE - *Lois stables et espaces* L^p , Ann. Inst. H. Poincaré 2(1966), 231-259.

[12] A. BRUNEL and L. SUCHESTON - *On* B-*convex Banach spaces*, Math. System Th. 7 (1974), 294-299.

[13] S. CHEVET - *Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans* $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, exposé 19(1977-78), Ecole Polytechnique.

[14] D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE - *Sous-espaces de* L^1 , Israel J. Math. 26(1977), 320-351.

[15] L. DOR - *On sequences spanning a complex* ℓ_1*-space*, Proc. Amer. Mat. Soc. 47 (1975), 515-516.

[16] A. DVORETZKY - *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Symp. on linear spaces, Jerusalem (1961), 123-160.

[17] A. DVORETZKY and C.A. ROGERS - *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36(1950), 192-197.

[18] G.A. EDGAR and R.F. WHEELER - *Topological properties of Banach spaces*, à paraître.

[19] E. ELLENTUCK - *A new proof that analytic sets are Ramsey*, J. Symbolic Logic 39(1974), 163-165.

[20] J. ELTON - *Sign embeddings of* ℓ_1^n , à paraître.

[21] J. FARAHAT - *Espaces de Banach contenant* ℓ_1 *, d'après H.P. Rosenthal*, Séminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique 1973-74.

[22] T. FIGIEL - *A short proof of Dvoretzky's theorem*, Compositio Math. 33(1976), 297-301.

[23] T. FIGIEL and W.B. JOHNSON - *Large subspaces of* ℓ_∞^n *and estimates of the Gordon-Lewis constant*, Israel J. Math. 37(1980), 92-112.

[24] T. FIGIEL, J. LINDENSTRAUSS and V.D. MILMAN - *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. 139(1977), 53-94.

[25] T. FIGIEL and N. TOMCZAK-JAEGERMANN - *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. 33(1979), 155-171.

[26] E. GLUSKIN - *The diameter of Minkowski compactum is approximately equal to* n , Funct. Anal. Appl. 15(1981), 57-58 (traduit du russe).

[27] G. GODEFROY - *Points de Namioka, espaces normants, applications à la théorie isométrique de la dualité*, Israel J. Math. 38(1981), 209-220.

[28] S. GUERRE et M. LÉVY - *Espaces ℓ^p dans les sous-espaces de* L^1 , Trans. Amer. Mat. Soc. (1983).

[29] R. HAYDON - *Some more characterizations of Banach spaces containing* ℓ_1 , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80(1976), 269-276.

[30] R.C. JAMES - *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. 80(1964), 542-550.

[31] R.C. JAMES - *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52(1950), 518-527.

[32] W.B. JOHNSON and J. LINDENSTRAUSS - *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, à paraître.

[33] W.B. JOHNSON and H.P. ROSENTHAL - *On* w*-*basic sequences and their applications to the study of Banach spaces*, Studia Math. 43(1972), 77-92.

[34] W.B. JOHNSON and G. SCHECHTMAN - *Embedding* ℓ_p^m *into* ℓ_1^n , à paraître dans Acta Math..

[35] M. KADEC and A. PELCZYNSKI - *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces* L_p , Studia Math. 21(1962), 161-176.

[36] B. KASHIN - *Diameters of some finite dimensional sets and of some classes of smooth functions*, Izv. A.N.S.S.R. Ser. Mat. 41(1977), 334-351 (russe).

[37] J.-L. KRIVINE - *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. 104(1976), 1-29.

[38] J.-L. KRIVINE et B. MAUREY - *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. 39 (1981), 273-295.

[39] H. LEMBERG - *Nouvelle démonstration d'un théorème de J.-L. Krivine sur la finie représentation de* ℓ_p *dans un espace de Banach*, Israel J. Math. 39 (1981), 341-348.

[40] P. LÉVY - Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars 1951.

[41] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI - *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. 9(1971), 263-269.

[42] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI - *On Orlicz sequence spaces*, Israel J. Math. 10(1971), 379-390.

[43] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI - Classical Banach spaces I, Sequence spaces, Ergebnisse 92, Springer 1977.

[44] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFRIRI - Classical Banach spaces II, Function Spaces, Ergebnisse 97, Springer 1979.

[45] M.B. MARCUS and G. PISIER - *Characterizations of almost surely continuous* p-*stable random Fourier series and strongly stationary processes*, à paraître.

[46] B. MAUREY - *Construction de suites symétriques*, C.R.A.S. Paris 288(1979), 679-681.

[47] B. MAUREY et G. PISIER - *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. 58 (1976), 45-90.

[48] V.D. MILMAN - *New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*, Funct. Anal. Appl. 5(1971), 28-37 (traduit du russe).

[49] V.D. MILMAN - *Some remarks about embeddings of* ℓ_1^k *in finite dimensional spaces*, Israel J. Math. 43(1982), 129-138.

[50] E. ODELL and H.P. ROSENTHAL - *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing* ℓ_1 , Israel J. Math. 20(1975), 375-384.

[51] A. PAJOR - *Plongement de* ℓ_n^1 *dans les espaces de Banach complexes*, à paraître.

[52] A. PELCZYNSKI - *Geometry of finite dimensional Banach spaces and operator ideals*, Notes in Banach spaces, University of Texas Press.

[53] G. PISIER - *Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de* ℓ_n^1 , C.R.A.S. Paris 277(1973), 991-993.

[54] G. PISIER - *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. 115(1982), 375-392.

[55] G. PISIER - *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, Advances in Math. (supplementary studies) vol. 7B(1981), 685.

[56] G. PISIER - *On the dimension of the* ℓ_p^n*-subspaces of Banach spaces, for* $1 \leq p < 2$, Trans. Amer. Mat. Soc. (1983).

[57] H.P. ROSENTHAL - *On subspaces of* L^p , Ann. of Math. 97(1973), 344-373.

[58] H.P. ROSENTHAL - *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71(1974), 2411-2413.

[59] H.P. ROSENTHAL - *Pointwise compact subsets of the first Baire class*, Amer. J. Math. 99(1977), 362-378.

[60] H.P. ROSENTHAL - *Sign-embeddings of* L^1 , à paraître.

[61] N. SAUER - *On the density of families of sets*, Journal of combinatorial Theory 13(1972), 145-147.

[62] G. SCHECHTMAN - *Random embeddings of euclidean spaces in sequence spaces*, Israel J. Math. 40(1981), 187-192.

[63] E. SCHMIDT - *Die Brunn-Minkowski Ungleichung*, Math. Nachr. 1(1948), 81-157.

[64] D. SLEPIAN - *The one-sided barrier problem for gaussian noise*, Bell System Tech. J. 41(1962), 463-501.

[65] A. SZANKOWSKI - *On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*, Israel J. Math. 17(1974), 325-338.

[66] S. SZAREK - *On the best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math. 58(1976), 197-208.

[67] S. SZAREK and N. TOMCZAK-JAEGERMANN - *On nearly euclidean decomposition for some classes of Banach spaces,* Compositio Math. 40(1980), 367-385.

[68] S. SZAREK - *The finite dimensional basis problem with an appendix on nets of Grassman manifold,* à paraître.

[69] B.S. TSIRELSON - *Not every Banach space contains ℓ_p or c_o ,* Funct. Anal. Appl. 8(1974), 138-141 (traduit du russe).

[70] L. TZAFRIRI - *On Banach spaces with unconditional bases,* Israel J. Math. 17 (1974), 84-93.

Bernard MAUREY

Université de Paris VII
UER de Mathématiques
Tour 45-55 - 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05