THIERRY FACK

**$K$-théorie bivariante de Kasparov**

*Astérisque*, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 605, p. 149-166
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__149_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 605 Février 1983

# K-THÉORIE BIVARIANTE DE KASPAROV

par Thierry FACK

## 0. INTRODUCTION

L'étude des invariants homologiques ou homotopiques des variétés a montré le rôle important du foncteur de K-théorie. Ainsi, pour les invariants qui s'expriment comme indice d'un opérateur elliptique, le théorème d'Atiyah-Singer [3] utilise ce foncteur de façon cruciale.

La considération du foncteur de K-théorie pour les $C^*$-algèbres a des origines diverses. En voici une. Soit $X$ un complexe de Poincaré fini de dimension $n$ muni d'un fibré vectoriel $E$ et posons $\pi = \pi_1(X)$. Soit $(M,f,F)$ un triplet formé i) d'une variété compacte orientée $M$ de dimension $n$, ii) d'une application continue $f : M \to X$ de degré 1, iii) d'une trivialisation stable $F$ du fibré $T(M) \oplus f^*(E)$. Le problème suivant est classique en chirurgie(cf.[25]) : existe-t'il une variété à bord $N$ de dimension $n+1$, une application continue $g : N \to X$ et une trivialisation stable $G$ de $T(N) \oplus g^*(E)$ telles que :

i) $\partial N = M \cup (-M)$, ii) $g$ prolonge $f$ et $g|_{-M}$ est une équivalence d'homotopie, iii) $G$ prolonge $F$.

Pour $n = 4k \neq 0$, l'obstruction à l'existence de $(N,g,G)$ est défini par Wall [25] comme un élément $\theta(M,f,F)$ du groupe de chirurgie $L_n^{\mathbb{Z}}(\pi)$. On a dans $L_n^{\mathbb{Q}}(\pi)$ : $$\theta(M,f,F) = \sigma(M) - \sigma(X)$$

où $\sigma(M) \in L_n^{\mathbb{Q}}(\pi)$ est un invariant d'homotopie défini <u>purement algébriquement</u> par Miščhenko [16] à partir du complexe des cochaînes sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de $M$, considéré comme module sur $\mathbb{Q}(\pi)$. Lorsque l'on remplace $\mathbb{Q}(\pi)$ par la $C^*$-algèbre réduite $C_r^*(\pi)$ du groupe $\pi$, la construction de Miščhenko fournit un élément du groupe de Grothendieck $K_h(C_r^*(\pi))$ pour la catégorie des formes hermitiennes non dégénérées sur les $C_r^*(\pi)$ - modules projectifs de type fini. Or on a

<u>Proposition</u> ([18])

$K_h(C_r^*(\pi))$ est isomorphe à $K_0(C_r^*(\pi))$.

Ainsi s'introduit la K-théorie des $C^*$-algèbres. Elle s'impose dans l'étude de la K-théorie de l'espace des feuilles d'un feuilletage au moyen de la $C^*$-algèbre associée.

Nous exposons ci-dessous la construction du bifoncteur $KK(A,B)$ de Kasparov, où $A$ et $B$ sont des $C^*$-algèbres (*). Ce foncteur se réduit au foncteur de K-théorie (resp. de K-homologie) quand $A = \mathbb{C}$ [resp. $B = \mathbb{C}$). Son intérêt est de mettre en évidence les relations entre K-théories de $C^*$-algèbres différentes grâce à l'existence d'un cup-produit

$$KK(A,B) \times KK(B,C) \longrightarrow KK(A,C).$$

## 1. DÉFINITION DES GROUPES DE KASPAROV

1.1. Soit $A$ une $C^*$-algèbre. On définit $K_0(A)$ comme dans [15] et on pose $K_n(A) = K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n))$. On obtient une théorie covariante et périodique de période 2.

Pour $A = C_0(X)$ ($X$ localement compact), $K_0(A) = K^0(X)$ est engendré dans la description d'Atiyah-Singer [3] par les classes de triplets $(E,F,\sigma)$ où $E,F$ sont des fibrés vectoriels complexes et $\sigma : E \to F$ un morphisme qui soit un isomorphisme en dehors d'un compact.

Dans ce type de description, la fonctorialité qui apparaît naturellement n'a qu'un intérêt limité; par contre, la fonctorialité "dans le bon sens", i.e. la flèche de Gysin $f! : K^*(X) \to K^*(Y)$ associée à toute application K - orientée $f: X \to Y$ entre variétés, est malaisée à décrire. Ainsi, lorsque $X$ est un ouvert de $Y$ et $f$ l'inclusion naturelle, l'image par $f!$ d'un complexe sur $X$ se définit en trivialisant ce complexe à l'infini sur $X$ avant de le "pousser en avant" sur $Y$. Cette difficulté, liée à la trop grande rigidité de la notion de fibré vectoriel, disparait lorsqu'on lui substitue celle champ continu d'espaces de Hilbert, intermédiaire entre les notions de fibré et de faisceau. Ainsi tout fibré hermitien sur $X$, vu comme champ continu d'espaces de Hilbert sur $X$, se prolonge canoniquement à $Y$ en prenant les fibres nulles dans le complémentaire de $X$.

Ceci conduit à remplacer la notion de module projectif de type fini sur une $C^*$-algèbre par celle de $C^*$-module.

1.2. - Définition

Un $C^*$-module sur une $C^*$-algèbre $A$ est un module à droite $\mathcal{E}$ sur $A$ muni d'un produit scalaire.

$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (\xi,\eta) \longmapsto \langle \xi|\eta\rangle \in A$ antilinéaire en $\xi$, linéaire en $\eta$, et vérifiant

i) $\langle \xi|\eta a\rangle = \langle \xi|\eta\rangle a$ $(a \in A)$, ii) $\langle \xi|\eta\rangle = \langle \eta|\xi\rangle^*$,

iii) $\langle \xi|\xi\rangle \in A_+$ et $\langle \xi|\xi\rangle = 0 \Longrightarrow \xi = 0$, iv) $\mathcal{E}$ est complet pour la norme

(*) Toutes les $C^*$-algèbres considérées seront supposées séparables.

$$\|\xi\| = \|\langle \xi | \xi \rangle\|^{1/2} \quad (*)$$

Pour $A = C_0(X)$ , la notion de $C^*$-module coïncide avec celle de champ continu d'espaces de Hilbert sur $X$ : à tout champ on associe le module des sections continues tendant vers 0 à l'infini.

Posons $H_A = \ell^2 \otimes A = \{(\xi_n) \mid \xi_n \in A \text{ et} \sum_n \xi_n^* \xi_n \text{ converge dans } A\}$ ; c'est un $C^*$-module qui joue un rôle analogue à l'espace de Hilbert de dimension $\aleph_0$ quand on remplace $\mathbb{C}$ par une $C^*$-algèbre $A$ .

1.3. Théorème [12]

Pour tout $C^*$-module (séparable) $\mathcal{E}$ sur $A$ , on a

$$\mathcal{E} \oplus H_A \approx H_A$$

Soit $\mathcal{E}_i$ $(i = 1,2)$ un $C^*$-module sur $A_i$ . Lorsque $\mathcal{E}_2$ est un $(A_1,A_2)$ bimodule, on définit le $C^*$-module $\mathcal{E}_1 \otimes_{A_1} \mathcal{E}_2$ sur $A_2$ en complétant le produit tensoriel algébrique $\mathcal{E}_1 \odot_{A_1} \mathcal{E}_2$ pour le produit scalaire $\langle \xi_1 \otimes \xi_2 | \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_2 | \langle \xi_1 | \eta_1 \rangle \eta_2 \rangle$ . Ceci permet de parler de $C^*$-module induit, d'"évaluation au temps t" d'un $C^*$-module sur $A \otimes \mathcal{C}[0,1]$, etc..

1.4. Il est ainsi naturel de décrire $K^*(X)$ à partir de triplets $(E,F,T)$ où $E,F$ sont des champs continus d'espaces de Hilbert sur $X$ et $T \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$ (**) un morphisme vérifiant une certaine condition de finitude. Pour $K^0(X)$ ($X$ compact) , cette condition est facile à préciser puisque l'on sait d'après [1] exhauster ce groupe à partir de triplets $(E = X \times H, F = X \times H, T)$ où $T$ est une application continue de $X$ dans l'espace des opérateurs de Fredholm sur l'espace de Hilbert séparable $H$ . Dans ce cas, on demande l'existence de $S \in \mathrm{Hom}(F,E)$ tel que

$$S_x T_x - \mathrm{id}_{E_x} \text{ et } T_x S_x - \mathrm{id}_{F_x} \text{ soient compacts pour tout } x \in X .$$

En contractant les inversibles de l'algèbre de Calkin sur les unitaires, on peut même se limiter à demander que $TT^* - 1$ et $T^*T - 1$ soient des applications continues de $X$ dans l'algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts sur $H$ . Pour formuler ces conditions dans le cadre des $C^*$-modules, il suffit de définir les notions d'endomorphisme et d'endomorphisme compact.

(*) Tous les modules considérés seront supposés séparables (comme espaces de Banach).

(**) i.e. $T_x \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$ et $T_x \xi_x \to 0$ $(x \to \infty)$ pour toute section continue $\xi$ nulle à l'infini.

1.5. Définition [12]

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux $C^*$-modules sur $A$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ l'ensemble des applications $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ telles qu'il existe $T^* : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ vérifiant

$$\langle T\xi_1 | \xi_2\rangle = \langle \xi_1 | T^*\xi_2\rangle \qquad (\xi_1 \in \mathcal{E}_1 \ , \ \xi_2 \in \mathcal{E}_2)$$

Pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $T^*$ est unique et $T$ est un endomorphisme de $A$-modules tel que $\|T\| = \inf\{c \in \mathbb{R}_+ \mid \langle T\xi | T\xi\rangle \leq c^2 \langle \xi | \xi\rangle$ pour tout $\xi \in \mathcal{E}_1\}$ soit fini. $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est alors une $C^*$-algèbre.

Soient $\xi_1 \in \mathcal{E}_1$, $\xi_2 \in \mathcal{E}_2$, et posons

$$\theta_{\xi_2, \xi_1}(\eta) = \xi_2 \langle \xi_1 | \eta\rangle \quad (\eta \in \mathcal{E}_1).$$

Les opérateurs de rang 1 ainsi définis engendrent un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ que l'on note $\mathcal{K}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. $\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est un idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dont les éléments sont les opérateurs compacts relativement à $\mathcal{E}$. Le groupe $K_0(A)$ se décrit alors à partir de triplets $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, T)$ où les $\mathcal{E}_i$ sont des $C^*$-modules sur $A$ et où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ vérifie

$$T^*T - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1), \qquad TT^* - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2).$$

De même, $K_1(A)$ se décrit à partir des couples $(\mathcal{E}, P)$ où $\mathcal{E}$ est un $C^*$-module sur $A$ et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ vérifie $P = P^*$ et $P^2 - P \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

1.6. Généralisant la notion d'opérateur elliptique, Atiyah propose dans [2] de décrire le groupe de K-homologie analytique $K_0(X)$ pour $X$ compact à partir de triplets $(H_1, H_2, T)$ où i) les $H_i$ sont des espaces de Hilbert munis de structures de module à gauche sur $C(X)$, ii) $T : H_1 \to H_2$ est un opérateur de Fredholm tel que $[T, f]$ soit compact pour toute $f \in C(X)$. Parallèlement, motivés par le problème de la classification des opérateurs essentiellement normaux à équivalence unitaire modulo les opérateurs compacts, Brown, Douglas et Fillmore introduisent [5] le foncteur de K-homologie $\mathrm{Ext}(X)$ $(= K_1(X))$. Pour toute $C^*$-algèbre $A$, ils définissent $\mathrm{Ext}(A)$ comme le quotient de l'ensemble des morphismes injectifs

$$\rho : A \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{K}) = M(\mathcal{K})/\mathcal{K} \qquad (*)$$

(préservant l'unité si $A$ est unitale) par la relation d'équivalence

$$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \text{ il existe un unitaire } U \in \mathcal{O}(\mathcal{K}) \text{ tel que } \rho_1 = \mathrm{Ad}\,U \cdot \rho_2$$

(*) $M(\mathcal{K})$ est l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{K}$ (voir [21]).

c'est un groupe lorsque $A$ est nucléaire. La relation avec le formalisme d'Atiyah est la suivante. Pour $A$ nucléaire et unitale, tout homomorphisme injectif $\rho : A \to O(\mathcal{K})$ admet un relèvement complètement positif $\tilde{\rho} : A \to M(\mathcal{K})$ ([6]). D'après [24], il existe un homomorphisme unital $\pi : A \to M_2(\mathbb{C}) \otimes M(\mathcal{K})$ tel que

$$(\forall x \in A) \quad \tilde{\rho}(x) = P\pi(x)P \quad , \quad \text{où} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Identifions $M_2(\mathbb{C}) \otimes M(\mathcal{K})$ à $\mathcal{L}(H)$ où $H$ est l'espace de Hilbert séparable. La représentation $\pi$ définit une action à gauche de $A$ sur $H$ et la relation $\rho(xx^*) = \rho(x)\rho(x)^*$ implique que

$$[P,a] \in \mathcal{K} \qquad \text{pour tout } a \in A .$$

On a ainsi associé à $\rho$ un couple $(H,P)$ où $H$ est un espace de Hilbert muni d'une structure de $A$-module à gauche et $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur commutant à $A$ modulo les opérateurs compacts.

1.7. Les descriptions de $K_0(A)$ et de $\mathrm{Ell}(X)$ rappelées ci-dessus conduisent à décrire $KK^0(A,B)$ à partir de triplets $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, T)$ où les $\mathcal{E}_i$ sont des $C^*$- modules à droite sur $B$ munis d'actions à gauche de $A$, et où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ vérifie

i) $a(T^*T - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1)$ et $a(TT^* - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_2)$ $(a \in A)$

ii) $Ta - aT \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ $(a \in A)$ .

La donnée d'un tel triplet équivaut à celle du module gradué $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ et de $F = \begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ qui apparaît comme un opérateur de degré 1 vérifiant

i) $a(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ $(a \in A)$

ii) $[F,a] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ $(a \in A)$

On décrit de même $KK^1(A,B)$ à partir de couples $(\mathcal{E}, P)$ où $\mathcal{E}$ est un $C^*$-module sur $B$ avec action à gauche de $A$, et où $P \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ vérifie

i) $P = P^*$ et $a(P^2 - P) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ $(a \in A)$

ii) $[P,a] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ $(a \in A)$ .

Quitte à remplacer $A$ par l'algèbre graduée $A \hat{\otimes} C_1$, où $C_1$ est l'algèbre de Clifford graduée de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, on obtient pour $KK^1(A,B)$ une description formellement analogue à celle de $KK^0(A,B)$. Au couple $(\mathcal{E}, P)$ on associe l'élément $(\tilde{\mathcal{E}}, F)$ où $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ est naturellement gradué, l'action à gauche de $a \hat{\otimes} 1 + b \hat{\otimes} \alpha$ $(a,b \in A$, $\alpha \in C_1$, $\alpha^2 = -1)$ étant la multiplication par $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

et $F = i\begin{bmatrix} 0 & -P \\ P & 0 \end{bmatrix}$. Pour tout $a \in A$, le commutateur gradué $[F,a]$ est alors compact.

On dira qu'un $C^*$-module $\mathcal{E}$ sur une $C^*$ - algèbre graduée $B = B^{(o)} \oplus B^{(1)}$ est gradué s'il est somme directe de sous espaces vectoriels fermés $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(o)} \oplus \mathcal{E}^{(1)}$ tels que $\mathcal{E}^{(i)} B^{(j)} \subset \mathcal{E}^{(i+j)}$ et $\langle \mathcal{E}^{(i)} | \mathcal{E}^{(j)} \rangle \subset B^{(i+j)}$ - $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est alors naturellement graduée. Les notions de commutateur gradué, d'homomorphisme gradué, de produit tensoriel gradué de $C^*$ - algèbres ou de modules gradués, etc... ont un sens évident (voir [13]).

1.8. On appelle $(A,B)$ - <u>bimodule de Kasparov</u> tout couple $(\mathcal{E},F)$ où $\mathcal{E}$ est un $C^*$-module gradué sur $B$ sur lequel $A$ agit à gauche par un homomorphisme gradué $A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$, et où $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est un opérateur de degré 1 vérifiant

i) $\forall a \in A$, $\quad a(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$

ii) $\forall a \in A$, $\quad [F,a] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Notons $\mathcal{E}(A,B)$ l'ensemble des $(A,B)$ - bimodules de Kasparov et $\mathcal{D}(A,B)$ l'ensemble de ceux qui vérifient $a(F^2 - 1) = [F,a] = 0 \quad (\forall a \in A)$.

Un élément de $\mathcal{E}(A, B \otimes C[0,1])$ est donné par une famille $(\mathcal{E}_t, F_t) \in \mathcal{E}(A,B)$ ; c'est par définition une <u>homotopie</u> entre $(\mathcal{E}_o, F_o)$ et $(\mathcal{E}_1, F_1)$. Si $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}$ et si $t \to F_t$ est normiquement continue, on dit que l'homotopie est <u>opératorielle</u>.

On note $KK(A,B)$, (resp. $\widetilde{KK}(A,B)$) le quotient de $\mathcal{E}(A,B)$ par la relation d'homotopie (resp. par la relation d'équivalence engendrée par l'addition d'éléments de $\mathcal{D}(A,B)$ et l'homotopie opératorielle). L'addition naturelle sur $\mathcal{E}(A,B)$ induit une addition sur $KK(A,B)$ et $\widetilde{KK}(A,B)$. On a :

1.9. <u>Proposition</u> [13]

$KK(A,B)$ et $\widetilde{KK}(A,B)$ sont des groupes abéliens.

Le groupe $KK(A,B)$ est un quotient de $\widetilde{KK}(A,B)$. Nous verrons plus loin qu'ils sont égaux.

Pour $A,B$ trivialement graduées, on pose $KK^o(A,B) = KK(A,B)$ et $KK^1(A,B) = KK(A \hat{\otimes} C_1, B)$. On a

$$KK^o(\mathbb{C},B) = K_o(B) \text{ et, si } A \text{ est nucléaire,}$$
$$KK^1(A,\mathbb{C}) = Ext(A) \qquad ([13]).$$

## 2. PROPRIETES FONCTORIELLES - EXEMPLES

2.1. $KK(A,B)$ est trivialement contravariant en $A$ - Il est covariant en $B$ car tout homomorphisme $f : B_1 \to B_2$ de $C^*$- algèbres graduées définit un homomorphisme

$$f_* : KK(A,B_1) \to KK(A,B_2)$$

par $\quad f_*(\mathcal{E},F) = (\mathcal{E} \hat{\otimes}_{B_1} B_2 \; , \; F \hat{\otimes} 1)$

2.2. Toute $C^*$ - algèbre auxiliaire $D$ définit un homomorphisme d'ampliation

$$\tau_D : KK(A,B) \longrightarrow KK(A \hat{\otimes} D \; , \; B \hat{\otimes} D)$$

par $\quad \tau_D\,(\mathcal{E},F) = (\mathcal{E} \hat{\otimes} D \; , \; F \hat{\otimes} 1)$

2.3. <u>Exemples</u>

2.3.1. Tout homomorphisme $f : A \to B$ définit de façon naturelle un élément de $KK^0(A,B)$. De même, toute représentation compacte de $A$ dans un espace de Hilbert $H$ définit un élément de $KK^0(A,\mathbb{C}) = K^0(A)$.

2.3.2. Tout opérateur pseudo différentiel elliptique $P$ d'ordre $0$ sur une variété compacte $X$ définit un élément de $KK^0(C(X),\mathbb{C})$ donné par

$$\mathcal{E}^{(0)} = L^2(X) \quad , \quad \mathcal{E}^{(1)} = L^2(X) \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{bmatrix}$$

où $Q$ est une paramétrix pour $P$.

Plus généralement, toute famille continue $(P_y)_{y \in Y}$ à support compact d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques d'ordre $0$ sur $X$, indexée par un espace localement compact $Y$, définit un élément de $KK\,(C_0(X)\;,\;C_0(Y))$ (cf.[10]).

2.3.3. Toute application continue et K-orientée $f : X \to Y$ entre variétés définit un élément $f! \in KK(X,Y)$ ne dépendant que de la classe d'homotopie K-orientée de $f$. Soit $d$ une métrique riemanienne sur $Y$ telle que :

$$\forall (y,z) \in Y \times Y \; , \; d(y,z) < 1 \Rightarrow \exists !\; X(y,z) \in T_y Y \quad \text{tel que}$$

$$\| X(y,z) \| < 1 \quad \text{et} \quad \exp_y X(y,z) = z \; .$$

Soit $X_y = \{x \in X \mid d(f(x),y) < 1\}$ et posons

$$H_y^{\pm} = L^2(X_y, S^{\pm})$$

où $S$ est le fibré gradué des spineurs sur $TX \oplus f^*(TY)$.

On définit $f!$ comme une famille continue $(H_y, D_y)$ où

$D_y$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 0 sur $X_y$ de symbôle principal

$$\sigma_y(x,\xi) = \text{multiplication de Clifford par } \left(M^{1/2}(f(x),y)\xi, (1-M(f(x),y))^{1/2}\frac{X(f(x),y)}{\|X(f(x),y)\|}\right)$$

($\xi \in T_x(X)$, $\|\xi\| = 1$) où $M$ est une fonction $C^\infty$ sur $Y \times Y$, égale à 1 au voisinage de la diagonale, à support inclus dans $\{(y,z) \in Y \times Y \mid d(y,z) < 1\}$.

## 3. LE CUP - PRODUIT DE KASPAROV

3.1. Théorème (cf. [13], thm. 4 et 5, §4)

Il existe une opération de cup-produit

$$KK(A, B_1 \hat{\otimes} D) \times KK(D \hat{\otimes} B_2, C) \longrightarrow KK(A \hat{\otimes} B_2, B_1 \hat{\otimes} C)\text{, notée } (x,y) \mapsto x \otimes_D y\text{,}$$

qui est bilinéaire, associative, contravariante en $A, B_2$, covariante en $B_1$, $C$, et vérifie

i) $f_*(x_1) \otimes_{D_1} x_2 = x_1 \otimes_D f^*(x_2)$ si $f : D \to D_1$

ii) $\tau_{D_1}(x_1 \otimes_D x_2) = \tau_{D_1}(x_1) \otimes_{D \hat{\otimes} D_1} \tau_{D_1}(x_2)$

iii) $x \otimes_{\mathbb{C}} 1_{KK(\mathbb{C},\mathbb{C})} = 1_{KK(\mathbb{C},\mathbb{C})} \otimes_{\mathbb{C}} x = x$ pour $x \in KK(A,B)$.

La principale difficulté de cette construction est illustrée par l'exemple suivant : Soit $(\mathcal{E}_X, F_X)$ l'élément de $KK(C(X), \mathbb{C})$ associé à un opérateur $P_X$ elliptique d'ordre 0 sur une variété compacte $X$, dont le symbôle principal vérifie

$$\sigma(P_X)\,\sigma(P_X)^* = \sigma(P_X)^*\,\sigma(P_X) = 1$$

sur le fibré cotangent en sphères. Considérons de même $(\mathcal{E}_Y, F_Y)$.
Formellement, le cup-produit $(\mathcal{E}, F)$ est donné par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_X \hat{\otimes} \mathcal{E}_Y = L^2(X \times Y) \oplus L^2(X \times Y)$$

$$F = F_X \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} F_Y = \begin{bmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{bmatrix}\text{, où } P = \begin{bmatrix} 1 \otimes P_Y, & P_X^* \otimes 1 \\ P_X \otimes 1, & -1 \otimes P_Y^* \end{bmatrix}.$$

$(\mathcal{E}, F)$ n'est pas un bimodule de Kasparov pour la même raison qui fait que $P_X \otimes 1$ n'est pas pseudo-différentiel d'ordre 0. Cependant, $\Delta_X^{1/2} P_X \otimes 1$(*) est <u>elliptique d'ordre 1</u> d'après [3], et on peut donner un sens à $F$ en divisant par $(\Delta_X \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_Y)^{1/2}$ l'opérateur d'ordre 1

$$\begin{bmatrix} 1 \otimes \Delta_Y^{1/2} P_Y, & \Delta_X^{1/2} P_X^* \otimes 1 \\ \Delta_X^{1/2} P_X \otimes 1, & -1 \otimes \Delta_Y^{1/2} P^* \end{bmatrix}$$

Ceci revient à calculer $M^{1/2}(F_X \hat{\otimes} 1) + N^{1/2}(1 \hat{\otimes} F_Y)$ où, avec un léger abus de notations,

(*) $\Delta_X = 1 +$ Laplacien usuel de $X$, pour une métrique riemanienne fixée.

$$M = (\Delta_x \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_y)^{-1} (\Delta_x \otimes 1)$$
$$N = (\Delta_x \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_y)^{-1} (1 \otimes \Delta_y) .$$

La construction générale du cup-produit s'inspire de cette méthode - Posant - sous les hypothèses du théorème -

$$x \otimes_D y = \tau_{B_2}(x) \otimes_{B_1 \hat{\otimes} D \hat{\otimes} A_2} \tau_{B_1}(y)$$

on se ramène à définir le cup-produit

$$KK(A,B) \times KK(B,C) \longrightarrow KK(A,C)$$
$$[(\mathcal{E}_B, F_A), (\mathcal{E}_C, F_B)] \longmapsto (\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \hat{\otimes}_B \mathcal{E}_C, F) .$$

Ici, $1 \hat{\otimes} F_B$ n'a pas de sens car $F_B$ ne commute pas à l'action de $B$. Son substitut naturel est une $F_B$ - connexion au sens suivant :

3.2. Définition (cf. [10])

On dit que $G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est une $F_B$ - connexion si l'on a :

$$T_\xi \circ F_B - (-1)^{\partial\xi \partial F_B} G \circ T_\xi \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_C, \mathcal{E})$$
$$F_B \circ T_\xi^* - (-1)^{\partial\xi \partial F_B} T_\xi^* \circ G \in \mathcal{K}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_C) \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{E}_B$$

où $T_\xi(\eta) = \xi \otimes_B \eta$

Si $F_B$ commute à $B$, $1 \hat{\otimes} F_B$ est une $F_B$ - connexion - Sinon on construit une $F_B$ - connexion en trivialisant $\mathcal{E}_B$ grâce à 1.3.

On a $\mathcal{E}_B = PH_{\tilde{B}}$ où $P$ est un projecteur, d'où

$$\mathcal{E}_B \hat{\otimes}_B \mathcal{E}_C = (P \hat{\otimes} 1)(H_{\tilde{B}} \hat{\otimes}_{\tilde{B}} \mathcal{E}_C) = (P \hat{\otimes}_B 1)(H \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_C)$$

et $(P \hat{\otimes}_B 1)(1 \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} F_B)(P \hat{\otimes}_B 1)$ est une $F_B$ - connexion -

3.3. Soit alors $G$ une $F_B$ - connexion et cherchons $F$ sous la forme

$F = M^{1/2}(F_A \hat{\otimes} 1) + N^{1/2} G$ , où $M, N$ sont positifs de degré 0 . Il est facile de voir que $(\mathcal{E}, F)$ est un bimodule de Kasparov si l'on suppose

i) $M$ commute à $F_A \hat{\otimes} 1$ , $G$ , $A \hat{\otimes} 1$ modulo $\mathcal{K}(\mathcal{E})$,

ii) $M(\mathcal{K}(\mathcal{E}_B) \hat{\otimes} 1) \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$,

iii) $N(G^2 - 1)$, $N[G, a \hat{\otimes} 1]$ $(a \in A)$ et $N[G, F_A \hat{\otimes} 1]$ sont compacts,

iv) $M + N = 1$ .

Notons $E_1$ la $C^*$ - algèbre engendrée par $\mathcal{K}(\mathcal{E}_B)\hat{\otimes} 1$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ .
Soit $E_2$ la $C^*$ - algèbre engendrée par $G^2 - 1$ , $[G,F_A\hat{\otimes} 1]$ , $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ et $[G,a\hat{\otimes} 1]$ pour a parcourant une partie dénombrable dense $\mathcal{G}$ de $A$ . Considérons les dérivations bornées

$$\delta_1(X) = [X,F_A\hat{\otimes} 1] \ , \quad \delta_2(X) = [X,G] \ , \quad \delta_a(X) = [X,a\hat{\otimes} 1] \qquad (a\in\mathcal{G})$$

on a

3.4. <u>Théorème</u> ([13])

Il existe $M,N \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ positifs, de degré 0 , tels que :

i) $\delta(M) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ pour $\delta = \delta_1, \delta_2$ et $\delta_a$ $(a \in\mathcal{G})$

ii) $M E_1 \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$

iii) $N E_2 \subset \mathcal{K}(\mathcal{E})$

iv) $M + N = 1$ .

Ceci permet de construire le cup-produit $(\mathcal{E},F)$ . Il est entièrement caractérisé par le

3.5. <u>Théorème</u> ([10])

Soient $(\mathcal{E}_B,F_A)$ , $(\mathcal{E}_C,F_B)$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_B\hat{\otimes}_B\mathcal{E}_C$ comme ci-dessus. Alors, il existe un bimodule de Kasparov $(\mathcal{E},F)$ , unique à homotopie opératorielle près, et vérifiant les conditions suivantes :

i) $F$ est une $F_B$ - connexion

ii) $(\forall a \in A)$ , $a[F_A\hat{\otimes} 1,F]a^* \geq 0 \pmod{\mathcal{K}(\mathcal{E})}$ .

L'application $[(\mathcal{E}_B,F_A),(\mathcal{E}_C,F_B)] \to (\mathcal{E},F)$

définit par passage au quotient une application

$$\widetilde{KK}(A,B) \times \widetilde{KK}(B,C) \to KK(A,C) \ .$$

3.6.<u>Corollaire</u> ([13] , [23])

$$\widetilde{KK}(A,B) = KK(A,B) \ .$$

<u>Preuve</u>. Soit $x = (x_t) \in \mathcal{E}(A,B\otimes C[0,1])$ . On a dans $\widetilde{KK}(A,B)$ :

$$\tilde{x}_t = \tilde{x} \otimes_{C[0,1]} e_t$$

où $e_t$ est l'élément de $\widetilde{KK}(C[0,1],\mathbb{C})$ correspondant à l'évaluation en $t \in [0,1]$ .
Mais $e_0 = e_1$ , d'où $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$ dans $\widetilde{KK}(A,B)$ . ∎

## 4. LE CUP-PRODUIT TOPOLOGIQUE ET SES APPLICATIONS

Posons $KK(X,Y) = KK(C_0(X), C_0(Y))$.

4.1. Théorème ([10]).

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications $C^\infty$ K-orientées. Alors, $g \circ f$ est K-orientée et on a

$$(g \circ f)! = f! \otimes_Y g!$$

Ceci implique le théorème de l'indice pour les variétés spin$^{\mathbb{C}}$ de dimension paire. Soit $D_E$ l'opérateur de Dirac à coefficients dans un fibré vectoriel $E$ sur une telle variété $X$. Son indice analytique est

$$\mathrm{Ind}_a (D_E) = [E] \otimes_X p! \quad \text{où} \quad p : X \to p^t .$$

L'indice topologique est obtenu en considérant un plongement $f : X \to \mathbb{R}^{2n}$ et en prenant l'image inverse de $f!(E)$ par l'isomorphisme de Bott, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_t (D_E) &= f!(E) \otimes_{\mathbb{R}^{2n}} g! \quad \text{où} \quad g : \mathbb{R}^{2n} \to p^t \\ &= [E] \otimes_X f! \otimes_{\mathbb{R}^{2n}} g! = \mathrm{Ind}_a (D_E) . \end{aligned}$$

4.2. Isomorphismes de Thom et de Bott

Soient $E$ un fibré vectoriel réel K-orienté sur une variété $M$, $\pi : E \to M$ la projection canonique et $s : M \to E$ la section $0$. On a trivialement $s! \otimes_E \pi! = 1$. L'homotopie naturelle $f_t$ entre $s\circ\pi$ et $\mathrm{id}_E$, bien qu'impropre, définit un élément $(f_t!)_t \in KK(C_0(E), C_0(E) \otimes C[0,1])$, de sorte que $\mathrm{id}_E! = (s\circ\pi)! = \pi! \otimes_M s!$. On en déduit un isomorphisme $K^*(M) \approx K^*(E)$.

Pour $E = \mathbb{C}$, $M = p^t$ et toute $C^*$ - algèbre $A$, les éléments

$\tau_A(s!) \in KK(A, A \otimes C_0(\mathbb{R}^2))$ et $\tau_A(\pi!) \in KK(A \otimes C_0(\mathbb{R}^2), A)$ sont "inverses" l'un de l'autre, d'où un isomorphisme

$$K_0(A) \approx K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) .$$

4.3. Soient $X$ un espace localement compact et $Y$ une variété $C^\infty$. On appelle correspondance de $X$ à $Y$ un triplet $(Z, E, f_X, f_Y)$ où $Z$ est une variété $C^\infty$, $E$ un fibré vectoriel complexe sur $Z$, $f_X : Z \to X$ une application continue propre et $f_Y : Z \to Y$ une application continue K-orientée ([10], voir aussi [4]). Une telle correspondance définit un élément $f_{X*}([E] \otimes_Z f_Y!) \in KK(X,Y)$, où $[E] \in KK(Z,Z)$. Cet élément ne dépend que de la classe de bordisme de $(Z, E, f_X, f_Y)$ (cf. [10]). Les correspondances de $X$ à $Y$ engendrent $KK(X,Y)$ ; elles permettent de donner une interprétation topologique simple du cup-produit. Soient $(Z_1,E_1,f_{X_1},f_{X_2}),(Z_2,E_2,g_{X_2},g_{X_3})$ et posons

$$Z = Z_1 \times_{X_2} Z_2 \quad , \quad E = pr_1^*(E_1) \times pr_2^*(E_2)$$
$$h_{X_1} = f_{X_1} \circ pr_1 \; , \quad h_{X_3} = g_{X_3} \circ pr_2 .$$

Quitte à perturber continûment $f_{X_2}$ et $g_{X_2}$, on peut les supposer $C^\infty$ et transverses; $(Z,E,h_{X_1},h_{X_3})$ est alors une correspondance appelée composée des deux premières.

Théorème ([10])

Le cup-produit des éléments associés aux correspondances $(Z_1,E_1,f_{X_1},f_{X_2})$ et $(Z_2,E_2,g_{X_2},g_{X_3})$ est associé à la composée de ces correspondances.

Dans ces cadres, tous les calculs de cup-produit peuvent s'effectuer au niveau géométrique.

En particulier, les correspondances

$$p^t \longleftarrow V \xrightarrow{\Delta} TV \times V \qquad \text{où } \Delta(x) = ((x,0),x) \quad \text{et}$$
$$V \times TV \xleftarrow{\delta} TV \longrightarrow p^t \qquad \text{où } \delta(x,X) = (x,(x,X))$$

définissent pour toute variété compacte $V$ des éléments $\sigma_V \in KK(p^t, TV \times V)$ et $P_V \in KK(V \times TV, p^t)$ vérifiant

$$\sigma_V \otimes_V P_V = 1_{TV} \quad \text{et} \quad \sigma_V \otimes_{TV} P_V = 1_V .$$

On en déduit des isomorphismes

$$KK(V,p^t) \xrightarrow{\sigma_V \otimes \tau_{TV}(\cdot)} KK(p^t,TV)$$
$$KK(p^t,V) \xrightarrow{\tau_{TV}(\cdot) \otimes P_V} KK(TV,p^t)$$

et, plus généralement, des isomorphismes

$$KK(A \otimes C(V),B) \approx KK(A, B \otimes C_0(TV))$$
$$KK(A, B \otimes C(V)) \approx KK(A \otimes C_0(TV),B) .$$

## 5. DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS

5.1. Soit $(V,F)$ une variété compacte feuilletée. Soit $P$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m$ sur $V$, elliptique le long des feuilles. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $P$ définit un champ d'opérateurs bornés

$$(P_s)_L \; : W^s(\tilde{L}) \longrightarrow W^{s-m}(\tilde{L}) \qquad (L \in V/F)$$

où $W^s(\tilde{L})$ est l'espace de Sobolev du revêtement d'holonomie $\tilde{L}$ de la feuille $L$. D'après [9], $(W^s, W^{s-m}, P_s)$ définit un élément de $K_*(C^*(V,F))$ (*), indépendant de $s$. C'est l'indice analytique $\mathrm{Ind}_a(P)$.

Lorsque $(V,F)$ possède une mesure transverse $\Lambda$ invariante par holonomie, on a, en notant $\mathrm{Tr}_\Lambda$ la trace associée (cf. [7]):

$$\mathrm{Tr}_\Lambda(\mathrm{Ind}_a(P)) = (-1)^{\frac{\dim F(\dim F+1)}{2}} \quad \langle \mathrm{ch}(\sigma_P)\mathrm{Td}(F_{\mathbb{C}}), [C] \rangle$$

où $\sigma_P$ est le symbôle principal de $P$ et $[C]$ le courant de Ruelle et Sullivan.

L'indice topologique se définit en utilisant un plongement auxiliaire $i : V \to \mathbb{R}^n$. Soit $\nu$ le fibré sur $V$ défini par $\nu_x = i_*(F_x)^\perp$ ; il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$N = \{(x,\xi) \in \nu \mid \|\xi\| < \varepsilon\}$$

soit une transversale ouverte pour le feuilletage de $V \times \mathbb{R}^n$ par $F \times \{0\}$. En " poussant en avant " champs continus $E$ d'espaces de Hilbert sur $N$ et endomorphismes $T$ de tels champs par

$$i!(E)_L = \ell^2(L \tilde{\cap} N, E) \quad ; \quad i!(T)\xi(x) = T_x \xi_x \quad (\xi \in \ell^2(L \tilde{\cap} N, E),\ x \in L \tilde{\cap} N)$$

on en déduit ([9]) une application

$$K^*(N) \longrightarrow K_*(C^*(V \times \mathbb{R}^n, F \times \{0\})) = K_*(C^*(V,F) \otimes C_0(\mathbb{R}^n))$$

et donc une flèche

$$\mathrm{Ind}_t : K^*(F^*) \longrightarrow K_*(C^*(V,F)) .$$

<u>Théorème</u> ([10])

Pour tout opérateur pseudo-différentiel elliptique $P$ le long des feuilles, de symbole principal $\sigma_P$, on a :

$$\mathrm{Ind}_a(P) = \mathrm{Ind}_t(\sigma_P)$$

la démonstration repose sur l'existence, pour toute flèche $C^\infty$ et K-orientée $f : M \to V/_F$ au sens de [9], d'un élément $f! \in KK(C_0(M), C^*(V,F))$ vérifiant

$$f! = j! \otimes_N i! \otimes_{\mathbb{R}^n} \beta^{-1} \qquad (\beta^{-1} = \text{élément de Bott de } KK(\mathbb{R}^n, p^t))$$

pour toute factorisation

(*) $C^*(V,F)$ est la $C^*$-algèbre associée à $(V,F)$ - Voir [9].

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & V/_F \\ j\downarrow & & \uparrow p \\ N & \xrightarrow{\quad i \quad} & V/_F \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

où $j$ est un plongement et $i$ est étale.

5.2. Ce théorème de l'indice motive fortement l'étude de la K-théorie des feuilletages. Pour les feuilletages provenant d'une action d'un groupe de Lie $G$ sur $V$ (*) , $C^*(V,F)$ s'identifie au produit croisé réduit $C_o(V) \rtimes G$ de $C_o(V)$ par $G$ et on a :

<u>Théorème</u>. ([8] , [11] et [14]).

Soit $G$ un groupe de Lie résoluble connexe simplement connexe de dimension $j$(mod 2) agissant continûment sur une $C^*$ - algèbre $A$ . Alors, on a

$$K_o(A \rtimes G) \approx K_j(A) .$$

Le cas du flot de Kronecker sur le 2 - tore est dû à Pimsner et Voiculescu [22] . On peut montrer que l'on a sous les hypothèses du théorème :

$$KK^i(A,B) \approx KK^{i+j}(A \rtimes G,B) \qquad \text{et}$$

$$KK^i(B,A) \approx KK^{i+j}(B,A \rtimes G) \qquad (\text{cf.}[11]) .$$

En particulier, $\mathrm{Ext}(A \rtimes \mathbb{R}) \approx \mathrm{Ext}(A \otimes C_o(\mathbb{R}))$ .

Pour les feuilletages à feuilles contractiles et à courbure sectionnelle négative (pour une métrique convenable sur le fibré $F$) , on sait (cf [9]) que $K^*(V)$ s'injecte dans $K_*(C^*(V,F))$ . Plus précisément, il existe un élément $\delta \in KK(C^*(V,F),C(V))$ dont la construction est reliée à celle utilisée par Miščenko pour prouver la conjecture de Novikov, et qui vérifie $\ell! \otimes_{C^*(V,F)} \delta = 1$ , où $\ell : V \to V/_F$ associe à tout point la feuille passant par ce point. L'égalité $\delta \otimes_V \ell! = 1$ est conjecturée par A. Connes.

5.3. <u>Conjecture de Novikov</u>

Soit $M$ une variété (**) de groupe fondamental $\pi$ . Soit $f : M \to B\pi$ une application classifiante pour le revêtement universel $\tilde{M}$ de $M$ . On appelle <u>haute signature de $M$</u> tout nombre de la forme

$\langle \mathbb{L}(M)\, f^*(x),[M]\rangle$ où $x \in H^*(B\pi,\mathbb{Q})$ et où $\mathbb{L}(M)$ désigne la classe totale de Hirzebruch - Pontriagin. La conjecture de Novikov est l'invariance par homotopie des hautes signatures, i.e :

(*) On suppose également que $V \times G$ s'identifie au graphe du feuilletage, ce qui peut ne pas se produire même dans le cas des flots.

(**) Par variété, nous entendons ici variété $C^\infty$ compacte connexe sans bord et orientée.

$$< L(M)f^*(x),[M]> = <L(N)\ (f\circ g)^*(x),[N]>$$

pour toute équivalence d'homotopie $g : N \to M$ préservant l'orientation.

Théorème [14].

La conjecture de Novikov est vraie pour tout sous-groupe discret $\pi$ d'un groupe de lie connexe.

Lorsque $B\pi$ est une variété riemanienne à courbure sectionnelle négative, ce résultat est dû à Miščenko [17] ; c'est le cas lorsque $\pi$ est un sous-groupe discret d'un groupe de lie semi-simple non compact.

L'idée naturelle est de considérer l'opérateur de signature sur $M$, à coefficients dans le fibré $f^*(E)$, pull-back du fibré universel

$$E = E(\pi) \times_\pi C_r^*(\pi) \text{ sur } B\pi \text{ , de fibre typique } B = C_r^*(\pi) .$$

Cet opérateur définit un élément de $KK(C(M), C_r^*(\pi))$ dont l'indice $\Sigma_f$ appartient à $K_o(C_r^*(\pi))$.

Théorème [14] .

Pour toute équivalence d'homotopie $g : N \to M$ préservant l'orientation, on a (*)

$$\Sigma_{f\circ g} = \Sigma_f \in K_o(C_r^*(\pi)) .$$

La démonstration consiste à identifier $\Sigma_f$ avec l'invariant d'homotopie $\sigma(M)$ défini par Miščenko ([16]) à partir du complexe de Poincaré des cochaînes sur $M$ à valeurs dans le système local $B$ de coefficients.

Notons que la platitude du fibré $f^*(E)$ n'est absolument pas contradictoire avec la non trivialité de son image par le caractère de chern $ch_B$ de Miščenko - Solov'ev [20] , d'où l'intérêt de $\Sigma_f$ donné à torsion près par la formule de Miscenko - Fomenko [19]

$$\Sigma_f = 2^n < L(M)ch_B(f^*(E)), [M]> \in K_o(B) \otimes \mathbb{Q} \text{ ,où } L(M) \text{ est la}$$

classe de Hirzebruch modifiée.

La conjecture de Novikov équivaut à l'invariance par homotopie de $f_*(L(M) \cap [M]) \in H_*(B\pi,\mathbb{Q})$, ou de son image inverse $\sigma_f \in K_*(B\pi)$ par le caractère

(*) en supposant $M$ de dimension $2n$ .

de Chern ch : $K_*(B\pi) \to H_*(B\pi,\mathbb{Q})$ . Lorsque $B\pi$ est une variété riemanienne à courbure sectionnelle négative, elle résulte de l'existence d'un homomorphisme injectif $\beta : K_*(B\pi) \longrightarrow K_*(C^*_r(\pi))$ tel que $\beta(\sigma_f) = \Sigma_f$ .

Supposons pour simplifier que $B\pi$ soit munie d'une structure spin$^{\mathbb{C}}$ . Alors $\beta$ est composée de l'isomorphisme de dualité de Poincaré et de l'application $K^*(B\pi) \to K_*(C^*_r(\pi))$ associée à l'élément $d \in KK(C_0(B\pi),C^*_r(\pi))$ suivant :

Soit $\mathcal{E}^\pm$ le $C^*_r(\pi)$-module obtenu en complétant l'espace des sections continues à support compact sur $\widetilde{B\pi}$ du fibré $S^\pm$ des spineurs pour le produit scalaire

$$<\xi,\eta> = \sum_{g\in\pi} <\xi g|\eta>\lambda_g \in C^*_r(\pi)$$

($\lambda$ est la représentation régulière gauche de $\pi$) . Soit $D : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ l'opérateur obtenu en relevant au dessus de tout ouvert trivialisant de $\widetilde{B\pi}$ l'opérateur de Dirac de symbôle principal la multiplication de Clifford par $\chi(\|\xi\|)\frac{\xi}{\|\xi\|}$ $(\xi\in T(B\pi))$ , où $\chi(t) = 0$ pour $t \in [0,\frac{1}{4}]$ , $\chi(t) = 1$ pour $t \geq \frac{1}{2}$ et $\chi(t) = 4t - 1$ sinon.

On définit ainsi un élément

$$d = (\mathcal{E}^+,\mathcal{E}^-,D) \in KK(C_0(B\pi),C^*_r(\pi)) .$$

Considérons maintenant $\widetilde{B\pi}$ comme l'ensemble des chemins d'origine un point $P$ et notons $p : \widetilde{B\pi} \to B\pi$ la projection canonique. Posons $H^\pm_x = \ell^2(p^{-1}(x),S^\pm)$ $(x\in B\pi)$ et soit $\Delta_x : H^+_x \to H^-_x$ défini par

$$\Delta_x\,\xi\,(\tilde{x}) = c(X(\tilde{x},P)')\,\xi(\tilde{x}) \qquad (\xi \in H^+_x)$$

où $c$ désigne la multiplication de Clifford et où $X(\tilde{x},P)'$ est l'unique vecteur tangent unité à la géodésique joignant $\tilde{x}$ à $P$ , que l'on annulle continûment au voisinage de $P$ par une fonction "cutt-off" . On définit ainsi un élément $\delta = (H^+, H^-, \Delta) \in KK(C^*_r(\pi)\ ,\ C_0(B\pi))$ et l'injectivité de $\beta$ résulte du

**Lemme**

$$d \otimes_{C^*_r(\pi)} \delta = 1_{KK(C_0(B\pi),C_0(B\pi))} .$$

BIBLIOGRAPHIE


[1] M.F. ATIYAH K-Theory. W.A. Benjamin, Inc. New-York-Amsterdam. 1967.

[2] M.F. ATIYAH Global theory of elliptic operators. Proc. Conf. on Functional Analysis and related topics. Univ. of Tokyo Press. Tokyo. 1970.

[3] M.F. ATIYAH and I.M. SINGER The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87 (1968). 484-530.

[4] P. BAUM and R. DOUGLAS K-homology and index theory. Proceedings of the Kingston AMS Summer Institute.

[5] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS and P.A. FILLMORE Extensions of $C^*$-algebras and K-homology. Ann. Math. (2). 105 (1977). 265-324.

[6] M.D. CHOI and E.G. EFFROS The completely positive lifting problem. Ann. Math. 104 (1976). 585-609.

[7] A. CONNES Sur la théorie non commutative de l'intégration. Lecture Notes in Math. 725. Springer (1979). 19-143.

[8] A. CONNES An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a $C^*$-algebra by an action of $\mathbb{R}$. Adv. in Math. 39 (1981).

[9] A. CONNES A survey of foliations and operator algebras. Proceedings of the Kingston AMS Summer Institute.

[10] A. CONNES and G. SKANDALIS The longitudinal index theorem for foliations. Preprint I.H.E.S. 1982.

[11] T. FACK and G. SKANDALIS Connes' Analogue of the Thom Isomorphism for the Kasparov groups. Inventiones Math. 64 (1981). 7-14.

[12] G.G. KASPAROV Hilbert $C^*$ modules: theorems of Stinespring and Voiculescu. Journal of Operator theory 4 (1980). 133-150.

[13] G.G. KASPAROV Operator K-functor and extensions of $C^*$-algebras. Math. USSR Izv. 16 (1981). 513-572.

[14] G.G. KASPAROV K-Theory, group $C^*$-algebras and higher signatures (Conspectus). Preprint Chernogolovka (1981).

[15] J. MILNOR Introduction to algebraic K-theory. Ann. of Math. Studies 72. Princeton Univ. Press. (1971).

[16] A.S. MIŠČENKO Homotopy invariants of non simply connected manifolds I. Rational invariants. Math. USSR Izv. 4 (1970). 506-519.

[17] A.S. MIŠČENKO Infinite dimensional representations of discrete groups and higher signatures. Math. USSR Izv. 8 (1974). 85-111.

[18] A.S. MIŠČENKO $C^*$-algebras and K-theory. Lectures Notes in Math. 763. Springer Verlag 1979. 262-274.

[19] A.S. MIŠČENKO and A.T. FOMENKO The index of elliptic operators over $C^*$-algebras. Math. USSR Izv. 15 (1980). 87-112.

[20] A.S. MIŠČENKO and J.P. SOLOV'EV On infinite dimensional representations of fundamental groups and formules of Hirzebruch type. Soviet Math. Dokl. 18 (1977). 767-771.

[21] G.K. PEDERSEN $C^*$-algebras and their automorphism groups. Acad. Press. 1979.

[22] M. PIMSNER and D. VOICULESCU Exact sequences for K groups and Ext groups of certain crossed product $C^*$-algebras. J. Operator theory, 4 (1980). 93-118.

[23] G. SKANDALIS Some remarks on Kasparov theory. Preprint 1982.

[24] W.F. STINESPRING Positive functions on $C^*$-algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955). 211-216.

[25] C.T.C. WALL Surgery on compact Manifolds. Acad. Press. 1970.

Thierry FACK

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu, Tour 45-46, 3e étage
F-75230 PARIS CEDEX 05