Astérisque

GUY MÉTIVIER

Équations aux dérivées partielles sur les groupes de Lie nilpotents

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki, exp. n° 583, p. 75-99

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__75_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 583 Novembre 1981

ÉQUATIONS AUX DÉRIVEES PARTIELLES SUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Guy MÉTIVIER

I - INTRODUCTION

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est bon de rappeler succintement l'origine de l'attention récente portée aux équations aux dérivées partielles sur les groupes nilpotents. Outre évidemment l'intérêt propre de la question il y a la remarque suivante :
de même qu'un opérateur $P(x, D_x)$ elliptique, peut être considéré au voisinage d'un point x_o comme une perturbation de l'opérateur à coefficients constants $P(x_o, D_x)$, certains opérateurs peuvent être modélisés par des opérateurs invariants sur un groupe nilpotent.
Cette remarque a été faite initialement par G.B. FOLLAND - E. STEIN [10] pour l'opérateur $\square_b$ et le groupe d'Heisenberg. Ensuite, sont apparus des théorèmes montrant comment certaines situations s'approchent de façon naturelle par des groupes nilpotents (L.P. ROTHSCHILD - E. STEIN [31], R. GOODMAN [11], L. HÖRMANDER - A. MELIN [18], G. METIVIER [23], L.P. ROTHSCHILD [28], B. HELFFER - J. NOURRIGAT [16] [17]).
On peut dire que l'idée d'utiliser les opérateurs invariants sur un groupe nilpotent comme modèles dans un certain nombre de problèmes, est maintenant devenue une idée standard.

Dans cet exposé, loin de vouloir dresser un catalogue des théorèmes existants, on voudrait montrer comment un certain nombre d'auteurs ont utilisé la théorie des représentations. L'idée d'utiliser cette théorie est extrêmement naturelle quand on connaît l'importance du rôle joué par la transformation de Fourier usuelle dans l'étude des opérateurs à coefficients constants (opérateurs invariants sur un groupe commutatif). Cet exposé comprendra en gros deux parties :

- dans la première, on montrera comment on peut construire explicitement les représentations irréductibles π, et comment on peut passer d'un opérateur P à $\pi(P)$ par une succession d'opérations aussi simples que transformation de Fourier partielle, changement de variables changement de fonction ; ceci occupera les §§ 3, 4 et 5. Au § 6, on montrera comment ce dévissage constitue l'ossature de la démonstration du théorème de B. HELFFER - J. NOURRIGAT [15].

- dans la deuxième partie (§§ 7, 8 et 9), on esquissera les problèmes de résolubilité. On verra comment on peut chercher à utiliser la formule de Plancherel pour résoudre l'équation $Pu = \varphi$, et comment intervient la notion de représentation générique.

II - NOTATIONS

Dans cet exposé, on appellera groupe un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. Si G est un groupe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie alors l'exponentielle est un difféomorphisme global de $\mathfrak{g}$ sur G ; on notera indifféremment exp x ou e^x l'exponentielle de $x \in \mathfrak{g}$.

On identifie $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ à l'algèbre des opérateurs différentiels sur G invariants à gauche. Dans les coordonnées exponentielles $P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est un opérateur différentiel à coefficients polynômiaux sur $\mathfrak{g}$, que l'on notera $\pi_o(P)$.

Les notations ad, Ad sont les notations classiques et G agit sur $\mathfrak{g}^*$ espace dual de $\mathfrak{g}$ par la formule $g.\,\xi = \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\,\xi$. Pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ on appellera tout simplement orbite de ξ, l'orbite de ξ pour cette action de G.

Dans certains cas on se donnera aussi une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots\ldots \oplus \mathfrak{g}_r$$

telle que :

$$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{j+k} \qquad \text{si } j + k \leq r$$

$$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] = (0) \qquad \text{si } j + k > r$$

On dira alors que $\mathfrak{g}$ est graduée et on munira $\mathfrak{g}$ d'un groupe d'automorphismes, appelés dilatations, δ_λ $(\lambda > 0)$, en posant $\delta_\lambda x = \lambda^j x$ pour $x \in \mathfrak{g}_j$. Ces dilatations s'étendent à l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et on notera $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{g})$ l'espace des éléments P de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ homogènes de degré m (c'est-à-dire vérifiant $\delta_\lambda P = \lambda^m P$, $\forall \lambda > 0$). On notera aussi $\mathfrak{U}^m(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j=0}^{m} \mathfrak{U}_j(\mathfrak{g})$.

Si π est une représentation unitaire de G dans l'espace de Hilbert H_π on notera $\mathcal{S}_\pi$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation et, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est graduée, H_π^m l'intersection des domaines des opérateurs $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{U}^m(\mathfrak{g})$, considérés comme opérateurs non bornés dans H.

Enfin pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ on notera B_ξ la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{g}$:

$$B_\xi (x,y) = \langle \xi , [x, y] \rangle_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}}$$

Pour $E \subset \mathfrak{g}$ $E^{\perp(\xi)}$ (ou simplement $E^\perp$ s'il n'y a pas de confusion) désignera l'orthogonal de E pour la forme B_ξ.

III - REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

Soit $\mathfrak{V}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\xi_{|[\mathfrak{V},\mathfrak{V}]} = 0$ ($\mathfrak{V}$ isotrope pour B_ξ). Alors $\chi : e^v \to e^{i \langle \xi, v \rangle}$ est une représentation scalaire unitaire du groupe $V = \exp \mathfrak{V}$ et on notera $\pi_{\xi,\mathfrak{V}}$ "la" représentation unitaire de G induite par χ .

Un moyen de réaliser π est le suivant : il existe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$ telle que :

i) $\forall\, j \leq k$ $\quad \mathfrak{v} \oplus X_1 \oplus \ldots \oplus X_j$ est une sous algèbre,

ii) l'application $(v, x_1, \ldots, x_k) \to e^v e^{x_1} \ldots e^{x_k}$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{v} \times X_1 \times \ldots \times X_k$ sur G,

iii) la mesure $dx_1 \ldots dx_n$ est invariante par G quand on identifie $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ à $_V\backslash G$

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X$ et tout $a \in \mathfrak{g}$, il existe $v(x,a) \in \mathfrak{v}$ et $\sigma(x,a) = (\sigma_1(x,a), \ldots, \sigma_k(x,a)) \in X$ tels que :

$$e^{x_1} \ldots e^{x_k} e^a = e^{v(x,a)} e^{\sigma_1(x,a)} \ldots e^{\sigma_k(x,a)}$$

(les applications v et σ sont polynômiales).

Alors on réalise $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ dans $L^2(X)$ en posant :

$$(3.1) \qquad (\pi_{\xi,\mathfrak{v}}(e^a) f)(x) = e^{i<\xi, v(x,a)>} f(\sigma(x,a)).$$

<u>Remarques</u> 3.1. - $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ ne dépend évidemment que de la restriction de ξ à $\mathfrak{v}$, et on introduit tout aussi bien $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ lorsque $\xi \in \mathfrak{v}^*$ est tel que $\xi_{|[\mathfrak{v},\mathfrak{v}]} = 0$.

3.2. - à une transformation unitaire près $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ ne dépend pas du choix des X_j (d'où la notation !).

3.3. - si l'on change $\mathfrak{v}$ en $\mathfrak{v}_1 = Ad(g^{-1})\mathfrak{v}$ pour un $g \in G$ et ξ en $\xi_1 = (Adg)^* \xi_1$, alors les représentations $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ et $\pi_{\xi_1,\mathfrak{v}_1}$ sont unitairement équivalentes. Helffer et Nourrigat [15] ont même précisé (dans le cas gradué) la nature de la transformation qui réalise l'équivalence entre $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ et $\pi_{\xi_1,\mathfrak{v}_1}$: d'abord, dans la construction ci-dessus, on peut choisir des espaces $X_1, \ldots, X_k$ communs ; ensuite si l'on définit les fonctions $w(x) \in \mathfrak{v}$ et $\tau(x) \in X$ par :

$$g\, e^{x_1} \dots e^{x_k} = e^{w(x)}\, e^{\tau_1(x)} \dots e^{\tau_k(x)}$$

et la transformation U dans $L^2(X)$ par :

$$(U\, f)(x) = e^{i<\xi, w(x)>}\, f(\tau(x))$$

alors U est unitaire et $U\pi_{\xi,\mathfrak{V}} = \pi_{\xi_1,\mathfrak{V}_1} U$.

Théorème (Kirillov [19])

i) $\pi_{\xi,\mathfrak{V}}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{V}$ est maximal isotrope pour B .

ii) deux représentations irréductibles $\pi_{\xi_1,\mathfrak{V}_1}$ et $\pi_{\xi_2,\mathfrak{V}_2}$ sont unitairement équivalentes si et seulement si ξ_1 et ξ_2 sont sur la même orbite.

iii) toute représentation unitaire irréductible est unitairement équivalente à l'une des représentations $\pi_{\xi,\mathfrak{V}}$.

Le lemme suivant est fondamental pour le § 5 :

Lemme 3.1. - Soient $\mathfrak{V}$ et $\tilde{\mathfrak{V}}$ deux sous algèbres telles que $[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V} \subset \tilde{\mathfrak{V}}$ et soit $\xi_0 \in \mathfrak{V}^*$ tel que $\xi_{|[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}]} = 0$. On note $E(\xi_0) = \{\xi \in \tilde{\mathfrak{V}}^* \,/\, \xi_{|\mathfrak{V}} = \xi_0\}$. Alors on obtient les représentations $\pi_{\xi,\tilde{\mathfrak{V}}}$ pour $\xi \in E(\xi_0)$ par transformation de Fourier partielle à partir de $\pi_{\xi_0,\mathfrak{V}}$.

Preuve : la démonstration donnera un sens clair à cet énoncé !

On écrit $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{V}} \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_k$ et $\tilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V} \oplus T$. On réalise $\pi_{\xi_0,\mathfrak{V}}$ dans $L^2\,(T \times X)$ et les $\pi_{\xi,\mathfrak{V}}$ dans $L^2(X)$, comme indiqué plus haut. Pour cela on écrit :

$$e^t\, e^{x_1} \dots e^{x_k}\, e^a = e^{v(t,x,a)}\, e^{s(t,x,a)}\, e^{\sigma_1(t,x,a)} \dots e^{\sigma_k(t,x,a)}$$

$$e^{x_1} \dots e^{x_k}\, e^a = e^{v(x,a) + s(x,a)}\, e^{\sigma_1(x,a)} \dots e^{\sigma_k(x,a)}$$

avec $v(t,x,a) \in \mathfrak{V}$, $s(t,x,a) \in T$, $\sigma(t,x,a) \in X$,

$v(x,a) + s(x,a) \in \mathfrak{V} \oplus T = \tilde{\mathfrak{V}}$, $\sigma(x,a) \in X$.

Mais pour tout $t \in T$, $v + s \in \mathfrak{V} \oplus T$, on a $e^t\, e^{v+s} = e^{v+w}\, e^{t+s}$ avec $w \in [\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V}$. Il en résulte que l'on a les relations :

$$\begin{cases} s(t,\, x,\, a) = t + s(x,\, a) \\ \sigma(t,\, x,\, a) = \sigma(x,\, a) \\ v(t,\, x,\, a) - v(x,\, a) \in [\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}]. \end{cases}$$

On a donc :

$$(\pi_{\xi_0,\mathfrak{V}}(e^a)\, f)\ (t,\, x) = e^{i\langle \xi_0, v(x,\, a)\rangle}\ f(t + s(x,\, a),\, \sigma(x,\, a)).$$

Identifiant $\tilde{\mathfrak{V}}^*$ à $\mathfrak{V}^* \times T^*$ on a $E(\xi_0) = \{\xi_0\} \times T^*$ et notant $\mathcal{F}_t$ la transformation de Fourier partielle en t dans $L^2(T \times X)$, on a alors :

$$(\mathcal{F}_t \pi_{\xi_0,\mathfrak{V}}(e^a)\, f)\ (\tau,x) = (\pi_{(\xi_0,\tau),\tilde{\mathfrak{V}}}(e^a)\, \mathcal{F}_t f(\tau,.))\ (x).$$

Autrement dit, pour $P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\pi_{\xi_0,\mathfrak{V}}(P)$ est un opérateur différentiel sur $T \times X$ à coefficients constants en t, et l'opérateur $\pi_{(\xi_0,\tau),\tilde{\mathfrak{V}}}(P)$ est l'opérateur déduit par transformation de Fourier partielle en t.

IV - SUITE DE SOUS ALGÈBRES ISOTROPES

L'objet de ce paragraphe et du suivant est d'exposer la méthode de réductions successives du nombre de variables, suivie dans [15], pour "descendre" dans les représentations irréductibles.

On suppose dans ce paragraphe que $\mathfrak{g}$ est graduée : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r$ et on pose $\mathfrak{g}^j = \mathfrak{g}_j \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r$ pour $j = 1, \ldots, r$ et $\mathfrak{g}^j = 0$ pour $j > r$.

Définition : Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\mathfrak{V}$ un sous espace de $\mathfrak{g}$. On dira que

$(\xi,\mathfrak{v})$ est p-maximal ($p \in \{1,.., r\}$) si l'on a :

i) $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}^p$

ii) notant $\mathfrak{v}_j = \mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{v}$, alors pour $j = p,\dots, r$ $\mathfrak{v}_j$ est isotrope maximal dans $\mathfrak{v}_{j+1}^{\perp(\xi)} \cap \mathfrak{g}^j$ pour B_ξ .

<u>Lemme</u> 4.1. - Soit $(\xi,\mathfrak{v})$ p-maximal. Alors $\mathfrak{v}$ est une algèbre et si l'on pose $\mathfrak{v}_j = \mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{v}$ et $\mathfrak{w}_j = \mathfrak{v}_{j+1}^{\perp(\xi)} \cap \mathfrak{g}^j$ pour $j = p,\dots, r$, on a :

i) $\qquad \mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{v}_j^{\perp(\xi)} = \mathfrak{v}_j$

ii) $\qquad [\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k] \subset \mathfrak{v}_{j+k}$

iii) $\qquad [\mathfrak{v}_{j+1}^{\perp(\xi)}, \mathfrak{v}_j] \subset \mathfrak{v}_{j+1}$

<u>Preuve</u> : i) puisque $\mathfrak{v}_{j+1} \subset \mathfrak{v}_j$, $\mathfrak{v}_j^{\perp} \cap \mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{w}_j$ et $\mathfrak{v}_j \cap \mathfrak{g}^j = \mathfrak{v}_j^{\perp} \cap \mathfrak{w}_j = \mathfrak{v}_j$.

ii) par récurrence descendante sur $j + k$. Pour $j + k > r$ la relation est triviale. Si elle est vraie pour $j + k \geq s + 1$ pour la montrer avec $j + k = s$, comme on a déjà $[\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k] \subset \mathfrak{g}^{j+k}$, il suffit de voir, en vertu de i), que $[\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k] \subset \mathfrak{v}_{j+k}^{\perp}$. Cette inclusion résulte aussitôt de l'identité de Jacobi (voir la définition de B_ξ) et de l'hypothèse de récurrence.

iii) de même par récurrence sur j.

Le fait que $\mathfrak{v}$ soit une algèbre est une conséquence immédiate de ii) ; on a même $[\mathfrak{v},\mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}_{p+1}$,

<u>Remarque</u> 4. . - Le point i) exprime que $\mathfrak{v}_j$ est isotrope maximal pour B_ξ dans $\mathfrak{g}^j$. En particulier si $(\xi,\mathfrak{v})$ est 1-maximal, $\mathfrak{v}$ est isotrope maximal pour B_ξ dans $\mathfrak{g}$ et la représentation $\pi_{\xi,\mathfrak{v}}$ est alors irréductible.

Lemme 4.2. - Soit $(\xi,\mathfrak{V})$ p-maximal ($p \geq 2$). Soit $\tilde{\mathfrak{V}}$ isotrope maximal pour B_ξ dans $\mathfrak{W}=\mathfrak{V}^{\perp(\xi)} \cap \mathfrak{g}^{p-1}$. Alors $(\xi,\tilde{\mathfrak{V}})$ est (p - 1) maximal et $[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V} \subset \tilde{\mathfrak{V}}$.

Preuve : $\mathfrak{V}$ est isotrope, donc $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$; comme $\tilde{\mathfrak{V}} \subset \mathfrak{V}^{\perp}$, $\mathfrak{V}+\tilde{\mathfrak{V}}$ est isotrope dans $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{V} \subset \tilde{\mathfrak{V}}$. On a donc $\mathfrak{V} \subset \tilde{\mathfrak{V}} \cap \mathfrak{g}^p = \mathfrak{V}$, la dernière égalité résultant du point i) du lemme 4.1. Puisque $\mathfrak{V}=\tilde{\mathfrak{V}} \cap \mathfrak{g}^p$, il est clair que $(\xi,\tilde{\mathfrak{V}})$ est (p - 1) maximal. Enfin l'inclusion $[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V}$ résulte du point ii) du lemme 4.1.

Lemme 4.3. - Soit $(\xi,\mathfrak{V})$ p-maximal. Pour tout $\xi' \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\xi - \xi'_{|\mathfrak{V}\cap\mathfrak{g}^{p+1}} = 0$, $(\xi',\mathfrak{V})$ est aussi p-maximal.

Preuve : par récurrence sur p. Pour p = r, c'est trivial puisque $(\xi,\mathfrak{V})$ est r-maximal si et seulement si $\mathfrak{V}=\mathfrak{g}_r$. Supposons l'affirmation vraie jusqu'au rang p + 1. Alors, $(\xi,\mathfrak{V}_{p+1})$ étant p + 1 maximal, $(\xi',\mathfrak{V}_{p+1})$ l'est aussi. Puisque $[\mathfrak{V},\mathfrak{V}] \subset \mathfrak{V}_{p+1}$, $\mathfrak{V}$ qui est B_ξ-isotrope est aussi $B_{\xi'}$ isotrope, et en outre $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}' = \mathfrak{V}_{p+1}^{\perp(\xi')} \cap \mathfrak{g}^p$.
Par conséquent, il existe $\mathfrak{V}' \supset \mathfrak{V}$ maximal isotrope pour $B_{\xi'}$ dans $\mathfrak{W}'$.
Par le lemme 4.2., $(\xi',\mathfrak{V}')$ est p-maximal. Mais puisque $[\mathfrak{V}',\mathfrak{V}'] \subset \mathfrak{V}'_{p+1}=\mathfrak{V}_{p+1}$. $\mathfrak{V}'$ est B_ξ-isotrope. Puisque $\mathfrak{V}$ est maximal dans $\mathfrak{g}^p$, on a bien $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}$.

Ce lemme donne donc un sens clair à la phrase $(\xi,\mathfrak{V})$ p-maximal lorsque $\xi \in \mathfrak{V}^*$. Le lemme 4.2. nous montre alors comment étant donné une algèbre $\mathfrak{V}$ et $\xi \in \mathfrak{V}^*$ avec $(\xi,\mathfrak{V})$ p-maximal ($p \geq 2$), on construit une autre algèbre $\tilde{\mathfrak{V}}$ qui vérifie

$$[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V} \subset \tilde{\mathfrak{V}} \quad ; \quad \xi_{|[\tilde{\mathfrak{V}},\tilde{\mathfrak{V}}]} = 0$$

de sorte que pour tout $\tilde{\xi} \in E(\xi) = \{\tilde{\xi} \in \tilde{\mathfrak{V}}^* \;/\; \tilde{\xi}_{|\mathfrak{V}} = \xi\}$ $(\tilde{\xi},\tilde{\mathfrak{V}})$ est (p - 1)-maximal. En outre, dans cette situation, pour $\tilde{\xi}_0 \in E(\xi)$

on peut définir :

$$0(\tilde{\xi}_0) = \{\tilde{\xi} \in \tilde{\mathfrak{V}}^* \;/\; \exists x \in \mathfrak{V}^{\perp(\xi)} \quad : \forall\, y \in \tilde{\mathfrak{V}}$$

$$< \tilde{\xi}, y > \; = \; < \tilde{\xi}_0,\ y + [x,y] > \}$$

Dans cette définition $\mathfrak{V}^{\perp(\xi)}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{V}$ pour B_{ξ_1}, ξ_1 étant une extension de ξ à . On montre que cet espace ne dépend pas de cette extension, et suivant le lemme 4.1. iii) on a $[\mathfrak{V}^{\perp(\xi)}, \tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V}$. On a alors clairement :

$$0(\tilde{\xi}_0) \subset E(\xi)$$

et en outre :

<u>Lemme</u> 4.4. - Pour $\tilde{\xi} \in 0(\tilde{\xi}_0)$ les représentations $\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathfrak{V}}}$ et $\pi_{\tilde{\xi}_0,\tilde{\mathfrak{V}}}$ sont unitairement équivalentes.

<u>Preuve</u> : si $\tilde{\xi}$ est associé à $x \in \mathfrak{V}^{\perp(\xi)}$, il résulte de la relation $[\mathfrak{V}^{\perp(\xi)}, \tilde{\mathfrak{V}}] \subset \mathfrak{V}$ que $\tilde{\xi}$ est la restriction à $\tilde{\mathfrak{V}}$ de $\exp(\mathrm{ad}x)^* \tilde{\xi}_0$. Comme en outre $\mathrm{Ad}\,(e^{-x})\tilde{\mathfrak{V}} = \tilde{\mathfrak{V}}$, l'équivalence résulte de la remarque 3.3.

V - RÉDUCTIONS SUCCESSIVES

Comme au paragraphe précédent $\mathfrak{g}$ est graduée. On se donne $P \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $\pi_0(P)$ est l'écriture de P dans les coordonnés exponentielles. (π_0 est aussi la représentation associée au § 3 à $\mathfrak{V} = (0)$).

<u>1re étape</u> : On choisit $\mathfrak{V}_r = \mathfrak{g}_r$ et d'après le lemme 3.1 (avec $\tilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}_r, \mathfrak{V} = (0)$) on voit que $\pi_{\xi_r,\mathfrak{V}_r}$ (P) est l'opérateur déduit de $\pi_0(P)$ par transformation de Fourier partielle dans les directions de $\mathfrak{g}_r$.

<u>2ème étape</u> : On <u>fixe</u> $\xi_r \in \mathfrak{g}_r^*$; selon le raisonnement de la fin du § 4, on construit alors une sous algèbre $\mathfrak{v}_{r-1}$ (dépendant de ξ_r), et le lemme 3.1 (avec $\tilde{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}_{r-1}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_r$) nous dit que si l'on note $E(\xi_r) = \{\xi \in \mathfrak{v}_{r-1}^* \;/\; \xi_{|\mathfrak{v}_r} = \xi_r\}$, on obtient $\pi_{\xi,\mathfrak{v}_{r-1}}(P)$ ($\xi \in E(\xi_r)$) par transformation de Fourier partielle.

<u>3ème étape</u> : Fixant $\xi_{r-1} \in E(\xi_r)$, on construit $\mathfrak{v}_{r-2}$ et on passe par une transformation de Fourier de $\pi_{\xi_{r-1},\mathfrak{v}_{r-1}}(P)$ aux $\pi_{\xi,\mathfrak{v}_{r-2}}$, $\xi \in E(\xi_{r-1})$.

<u>r-me étape</u> : Fixant $\xi_2 \in E(\xi_3)$, on construit $\mathfrak{v}_1$ à partir de $\mathfrak{v}_2$ ($(\xi_2,\mathfrak{v}_2)$ étant 2-maximal), et par Fourier partiel on passe de $\pi_{\xi_2,\mathfrak{v}_2}(P)$ aux $\pi_{\xi,\mathfrak{v}_1}(P)$, $\xi \in E(\xi_2)$.

On s'arrête là, les représentations $\pi_{\xi,\mathfrak{v}_1}$ étant irréductibles.

VI - LE THÉORÈME D'HELFFER-NOURRIGAT

Rappelons que P est dit hypoelliptique si pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(G)$, u est nécessairement C^∞ sur tout ouvert de G où Pu l'est.

<u>Théorème</u> (Helffer-Nourrigat [15]) : Soit une algèbre de Lie graduée et soit $P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ homogène de degré m. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :

i) P est hypoelliptique

ii) pour toute représentation unitaire irréductible π, le noyau de $\pi(P)$ dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de la représentation est trivial.

En outre si $P \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ est hypoelliptique, pour toute "pertubation" $Q \in \mathcal{U}^{m-1}(\mathfrak{g})$, $P + Q$ est encore hypoelliptique.

Ce théorème a d'abord été prouvé par C. ROCKLAND [27] dans le cas du groupe d'Heisenberg, par B. HELFFER [12] et R. BEALS [2] pour les groupes de rang 2, puis par B. HELFFER-J. NOURRIGAT [14] pour les groupes de rang 3, avant la démonstration de l'implication ii) $\Rightarrow$ i) dans le cas général [15]. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est montrée par R. BEALS [1].

Dans ce paragraphe nous voulons montrer comment interviennent les constructions du § 5 dans la démonstration de l'implication ii) $\Rightarrow$ i) ([15]). Plaçons nous à l'étape r - j : on construit une algèbre $\mathcal{V}$ et on se fixe $\xi \in \mathcal{V}^*$ tel que $(\xi, \mathcal{V})$ soit j + 1 maximal ; alors on construit $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{E}(\xi) = \{\xi \in \tilde{\mathcal{V}}^* \ / \ \tilde{\xi}_{|\mathcal{V}} = \xi\}$.

<u>Lemme</u> 6.1 : Soient A et B deux éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pour que l'on ait une estimation du type :

$$\exists\ C, \quad \forall\ u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi,\mathcal{V}}} \quad \|\pi_{\xi,\mathcal{V}}(A)\ u\| \leq C\ \|\pi_{\xi,\mathcal{V}}(B)\ u\|$$

il faut et il suffit que l'on ait :

$$\exists\, C, \quad \forall\ \tilde{\xi} \in E(\xi),\ \forall\ u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathcal{V}}}} \ : \ \|\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathcal{V}}}(A)\ u\| \leq C\,\|\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathcal{V}}}(B)\ u\|$$

La norme $\|\,.\,\|$ désigne la norme de l'espace de représentation $(L^2(X))$.

Ce lemme est une conséquence quasi-immédiate du lemme 3.1.

<u>Lemme</u> 6.2 : Supposons $m \geq r^r$ et fixons $\tilde{\xi}_0 \in E(\xi)$. Il existe C tel que :

$$\forall\ \tilde{\xi} \in E(\xi) \quad \forall\ u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathcal{V}}}} \quad \text{dist}\ (\tilde{\xi},\ O(\tilde{\xi}_0))\ \|u\| \leq C\ \|u\|_m$$

$\|\,.\,\|_m$ désigne une norme de l'espace $H^m_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\mathcal{V}}}}$. $O(\tilde{\xi}_0)$ a été défini à la fin du § 4, et dist $(\tilde{\xi}, O(\tilde{\xi}_o))$ désigne la distance de $\tilde{\xi}$ à $O(\tilde{\xi}_o)$.

Ce lemme se démontre en explicitant complètement les représentations avec la méthode du § 3 et en exhibant un élément $P \in \mathfrak{U}^m(g)$ $(m=r^r)$ tel que $\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}(P)$ soit un opérateur de multiplication par une fonction minorée en module par dist $(\tilde{\xi}, O(\tilde{\xi}_o))$.

<u>Lemme</u> 6.3 : Supposons que m est un multiple commun de 1,...,r. Soit $P \in \mathfrak{U}^m(g)$ et soit $\tilde{\xi}_o \in E(\xi)$. Supposons qu'il existe C tel que :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi}_o,\tilde{\vartheta}}} \quad \|u\|_m \leq C \quad \|\pi_{\tilde{\xi}_o,\tilde{\vartheta}}(P)u\| .$$

Alors il existe C' et un voisinage Λ de $\tilde{\xi}_o$ dans $E(\xi)$ tels que :

$$\forall \tilde{\xi} \in \Lambda , \ \forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}} \quad \|\|u\|_m \leq C \ \|\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}(P)u\|$$

Ce lemme est assurément le point technique central de la démonstration : il repose sur une écriture explicite des représentations et sur l'étude de la dépendance en $\tilde{\xi}$ des opérateurs $\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}(P)$.

<u>Lemme</u> 6.4 : Supposons que $m \geq r^r$ est un multiple de 1, ..., r. Soit $P \in \mathfrak{U}^m(g)$. On suppose

i) il existe C tel que pour tout $\tilde{\xi} \in E(\xi)$ on a :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}} : \|u\|_m \leq C \ \{\|\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}(P)u\| + \|u\|\}$$

ii) pour tout $\tilde{\xi} \in E(\xi)$ il existe $C_{\tilde{\xi}}$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}} \quad \|u\|_m \leq C_{\tilde{\xi}} \quad \|\pi_{\tilde{\xi},\tilde{\vartheta}}(P)u\| .$$

Alors il existe C' tel que :

$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi,\mathcal{V}}} \quad \|u\|_m \leq C' \| \pi_{\xi,\mathcal{V}}(P)u\|.$

Par le lemme 6.3, on peut supposer que la constante $C_{\tilde{\xi}}$ est localement bornée ; par l'estimation i) et le lemme 6.2, on peut aussi supposer $C_{\tilde{\xi}}$ uniformément bornée pour $d(\tilde{\xi}, O(\tilde{\xi}_o))$ assez grand. Enfin par le lemme 4.4. on peut supposer $C_{\tilde{\xi}}$ constante sur les ensembles $O(\tilde{\xi}_1)$. Regroupant le tout, on montre que $C_{\tilde{\xi}}$ peut être choisie indépendante de $\tilde{\xi} \in E(\xi)$, et on obtient l'estimation souhaitée par intégration (Lemme 6.1).

Soit $P \in \mathfrak{U}_m(g)$ vérifiant la propriété ii) du théorème. Remplaçant P par $P' = (P^*P)^k$ si nécessaire on peut supposer que m est un multiple de 1, ..., r et que $m \geq r^r$. Alors, compte tenu d'un résultat classique d'hypoellipticité (F. TREVES [34] , A et J. UNTERBERGER [35]) l'implication ii) $\Rightarrow$ i) du théorème résulte de la proposition suivante :

Proposition : Sous les hypothèses ci-dessus, il existe C tel que pour tout $u \in \mathcal{S}(g)$:

$$\|u\|_m \leq C\{\| \pi_o(P)u\| + \|u\|\}$$

La démonstration se fait par récurrence sur r. Pour r=1 (cas des opérateurs à coefficients constants) P est elliptique et l'estimation immédiate.

Supposons la proposition démontrée au rang r-1, et plaçons nous dans la situation du rang r précédente. Dans la premiere étape du § 5 la représentation $\pi_{o,\mathcal{V}_r}$ s'identifie à la représentation π_o du groupe

G/G_r ; de manière générale les représentations de G/G_r s'identifient aux représentations de G triviales sur G_r. De part l'hypothèse de récurrence il existe donc C tel que :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_o, \mathcal{V}_r} \quad \|u\|_m \leq C\{\|\pi_{o, \mathcal{V}_r}(P)u\| + \|u\|\}.$$

Utilisant le lemme 6.3 (ou plutôt une variante) on peut perturber cette inégalité et pour un C convenable :

$$\forall \xi_r, \ |\xi_r| \leq 1, \ \forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi_r, \mathcal{V}_r}} \quad \|u\|_m \leq C\{\|\pi_{\xi_r, \mathcal{V}_r}(P)u\| + \|u\|\}$$

On applique alors le lemme 6.1 dans le sens de la descente et on obtient :

$$(\#) \quad \forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi_j, \mathcal{V}_j}} \quad \|u\|_m \leq C\ \{\|\pi_{\xi_j, \mathcal{V}_j}(P)u\| + \|u\|\}$$

C étant indépendant de j, du choix successif des $\mathcal{V}_k$ ($k \leq j$ et des $\xi_k (k \leq j-1)$ et aussi indépendant de $\xi_j \in E(\xi_{j-1})$.

Après la descente, la remontée : pour j=1, on montre que $\pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}(P)$ est injectif non seulement dans $\mathcal{S}_{\pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}}$ mais aussi dans $H^m_{\pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}}$. Avec (#) et la compacité de l'injection $H^m_\pi \hookrightarrow H^o_\pi$ (pour $\pi = \pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}$) on en déduit des estimations du type :

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}} \quad \|u\|_m \leq C_{\xi_1} \|\pi_{\xi_1, \mathcal{V}_1}(P)u\|$$

Mais alors on peut utiliser le lemme 6.4 et par récurrence sur $j \leq r$ on obtient des estimations

$$\forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi_j, \mathcal{V}_j}} \quad \|u\|_m \leq C_{\xi_j} \|\pi_{\xi_j, \mathcal{V}_j}(P)u\|.$$

Pour j = r, n'oublions pas que l'on a la restriction $|\xi_r| \leq 1$; mais par le lemme 6.3 on montre quand même que l'on peut supposer C_{ξ_r} bornée uniformément pour $|\xi_r| \leq 1$.

On utilise alors l'homogénéïté de P pour s'affranchir de la restriction $|\xi_r| \leq 1$ et on obtient :

$$\forall \xi_r, \ \forall u \in \mathcal{S}_{\pi_{\xi_r, \mathcal{V}_r}} \quad \|u\|_m \leq C(\|\pi_{\xi_r, \mathcal{V}_r}(P)u\| + \|u\|)$$

L'estimation de la proposition en découle immédiatement par intégration. (Lemme 6.1).

VII - FORMULE DE PLANCHEREL

Pour des démonstrations on renvoie à J. DIXMIER [8] A.A. KIRILLOV [19] ou L. PUKANSKI [24]. On a vu que les représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par l'espace $\hat{G}$ des orbites de $\mathfrak{g}^*$ pour l'action de G. Pour $\pi \in \hat{G}$ et $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ on pose :

$$\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\ \pi(g^{-1})\ dg$$

L'opérateur $\pi(\varphi)$ est traçable et le théorème de Plancherel (J. DIXMIER [8]) affirme l'existence d'une mesure $d\mu$ sur $\hat{G}$ telle que :

$$\varphi(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}\ (\pi(\varphi)\ \pi(g))d\mu\ (\pi)$$

Puisque $\pi(P\varphi) = \pi(P)\ \pi(\varphi)$ $(P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ l'équation $Pu = \varphi$ conduit à résoudre les équations $\pi(P)v = \pi(\varphi)$ et on peut énoncer la règle suivante :

Supposons que pour presque tout π on sache trouver un opérateur u_π tel que

i) $\pi(P)u_\pi = \pi(\varphi)$

ii) pour tout $\Psi \in C_0^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(\check{\Psi})u_\pi$ est traçable et l'intégrale $u(\Psi) = \int tr(\pi(\check{\Psi})u_\pi)\, d\mu(\pi)$ converge. ($\check{\Psi}$ désigne la fonction $\check{\Psi}(g) = \Psi(g^{-1})$).

iii) l'application $\Psi \longrightarrow u(\Psi)$ définit une distribution u.

Alors u est solution de $Pu = \varphi$.

En effet $<Pu, \Psi> = <u, {}^tP\Psi>$ et $\pi(\check{\overline{{}^tP\Psi}}) = \pi(\check{\Psi})\ \pi(P)$. Par conséquent :

$$<Pu, \Psi> = \int tr\ (\pi(\check{\Psi})\pi(\varphi)\ )\ d\mu\ (\pi) = <\varphi, \Psi>$$

la dernière égalité résultant de la formule de Plancherel.

Avant d'illustrer cette idée par un théorème, montrons comment on peut préciser la formule de Plancherel ci-dessus, et en particulier "calculer" la mesure $d\mu$. Donnons nous une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de g telle que pour tout $j \leq n$ l'espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_j\}$ soit un idéal de g. Alors, selon L. PUKANSKI [24], [25], il existe une partition $I \cup J$ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que si l'on note V [resp. W] l'espace engendré par les e_j^* pour $j \in I$ [resp. J], on ait les propriétés suivantes :

i) Le polynôme $D(\xi) = \det(<\xi, [e_j, e_k]>)_{j,k \in J \times J}$ est invariant (pour l'action de G sur g^*) et n'est pas identiquement nul.

ii) L'ouvert $\mathcal{O} = \{\xi \in g^* \ /\ D(\xi) \neq 0\}$ est une union d'orbites qui, chacune, coupe V en exactement un point.

iii) Notant $U = V \cap \mathcal{O}$ (U est non vide d'après i) et ii)!), il existe une application continue $F(z, \xi)$ de $W \times U$ dans V polynomiale en z, rationnelle en ξ, telle que pour tout $\xi \in U$ l'orbite de ξ est exactement l'ensemble des points de la forme $z + F(z, \xi) \in W \oplus V$, z parcourant W.

Lemme ([25]) : Le polynôme $D(\xi)$ est le carré d'un polynôme invariant $r(\xi)$ et si l'on paramètre presque toutes les orbites par U la mesure de Plancherel $d\mu$ est $|r(\xi)|d\xi$.

Pour $\xi \in U$ on notera π_ξ "la" représentation unitaire irréductible associée à l'orbite de ξ. On peut réaliser toutes ces représentations dans le même espace $L^2(\mathbb{R}^k)$ $(k = \frac{1}{2} \dim W)$.

Théorème : Soit $P \in \mathcal{U}(g)$. Supposons que pour presque tout $\xi \in \mathcal{U}$, $\pi_\xi(P)$ possède un inverse à droite Q_ξ borné dans $L^2(\mathbb{R}^k)$ tel que :

i) il existe des polynômes $a(\xi)$ et $b(\xi)$ sur $\mathfrak{g}^*$, invariant par G, tels que :

$$|a(\xi)| \quad \|Q_\xi\| \leq |b(\xi)|$$

ii) l'application $\xi \longrightarrow Q_\xi$ est mesurable.

Alors P est localement résoluble, i.e. pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, ($\omega$ ouvert assez petit), il existe $u \in C^\infty(\omega)$ tel que $Pu = \varphi$.

Ce théorème est énoncé sous une forme voisine par L. CORWIN [3] et correspond exactement à la démarche suivie par L.P. ROTHSCHILD [29] et G. LION [22].

Preuve : Par un théorème de Dixmier [9] il existe A et B dans le centre de $\mathcal{U}(g)$ tels que $\pi_\xi(A) = a(\xi)$ et $\pi_\xi(B) = b(\xi)$.

Pour $\Psi \in C_0^\infty(G)$ on a :

$$|a(\xi)\mathrm{tr}(\pi_\xi(\varphi)\pi_\xi(\check{\Psi})Q_\xi)| \leq \|\pi_\xi(B\varphi)\|_{H.S} \|\Psi\|_{H.S}$$

où $\|.\|_{H.S}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt d'opérateur. Utilisant Cauchy-Schwartz et la formule de Plancherel on voit que l'intégrale

$$\langle u, \Psi\rangle = \int_{U} t_r(\pi_\xi(\varphi)\pi_\xi(\check{\Psi})Q_\xi)\ a(\xi)r(\xi)d\xi$$

converge et défini un élément $u \in L^2(G)$. On vérifie en fait que $u \in C^\infty(G)$.

Comme précédemment on voit que $Pu = A\varphi$.

Mais puisque A est bi-invariant, il est lui même localement résoluble (M. RAIS [26]) et le théorème suit.

VIII - RÉSOLUBILITÉ, CONDITIONS NÉCESSAIRES

Rappelons d'abord pour fixer les idées que tout opérateur à coefficients constants est résoluble. Dans le cas des groupes nilpotents on est bien loin d'une situation aussi simple : par exemple l'opérateur de Lewy $\frac{\partial}{\partial x_1} + i(\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3})$ que l'on peut considérer comme un opérateur sur le groupe de Heisemberg de dimension 3, n'est pas résoluble.

D'après un critère général on sait que si P est hypoelliptique, son transposé ${}^tP$ est résoluble ; avec le critère d'Helffer-Nourrigat on voit donc que si le noyau de $\pi({}^tP)$ est trivial pour toute $\pi \in \hat{G}$, alors P est résoluble. En outre si P est résoluble, cela veut dire que l'on sait résoudre les équations $\pi(P)u= \pi(\varphi)$, donc cela semble requérir une certaine surjectivité de $\pi(P)$, donc injectivité de $\pi({}^tP)$. On arrive alors à l'idée suivante, illustrée par le travail de L. CORWIN - L.P. ROTHSCHILD [6], qu'une condition raisonnable pour la résolubilité de P est que le noyau de $\pi({}^tP)$ soit trivial pour presque toute représentation $\pi \in \hat{G}$. (notons toutefois que cette condition n'est de toutes façons pas suffisante, [6]).

Reprenons les notations du paragraphe précédent : on s'intéresse donc aux représentations génériques π_ξ, $\xi \in U$, que l'on peut réaliser dans le même espace $L^2(\mathbb{R}^k)$. On peut même faire en sorte que ([5] [6]) :

<u>Lemme</u> 8.1 : Pour toute application φ, C^∞, de U dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ et pour tout $P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'application $\xi \longrightarrow \pi_\xi(P)\varphi(\xi)$ est C^∞ de U dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Admettons le résultat suivant ([6]).

<u>Lemme</u> 8.2 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente graduée et soit $P \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$. S'il existe u, non nul, dans $\mathcal{S}(G)$ tel que ${}^tPu=0$, alors P n'est pas localement résoluble.

<u>Remarque</u> : Il est clair que s'il existe $u \neq 0$ dans le noyau de ${}^tP$, alors il existe $\varphi \in C_o^\infty(G)$ tel que l'équation $Pu = \varphi$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{S}(G)$. Ce que l'on cherche c'est $\varphi \in C_o^\infty(G)$ tel que l'équation $Pu = \varphi$ n'ait pas de solution dans $C^\infty(G)$; c'est essentiellement pour ce passage que l'on utilise l'homogénéité de P.

<u>Théorème</u> (L. CORWIN - L.P. ROTHSCHILD [6]) : Supposons que g soit graduée et que $P \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ soit homogène. S'il existe une application φ, non nulle, C^∞ de U dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ telle que $\pi_\xi({}^tP)\varphi(\xi) = 0$ pour tout ξ, alors P n'est pas localement résoluble.

Ce théorème se démontre en construisant $u \in \mathcal{S}(G)$ tel que ${}^tPu = 0$. Le plus simple serait de construire u tel que :

$$\pi_\xi(u) = \alpha(\xi)\ \Phi_\xi$$

avec $\alpha \in C_o^\infty(U)$ et Φ_ξ désignant le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par $\varphi(\xi)$. Cette construction n'est pas (actuellement!) faite dans le cas général, mais elle résulte d'un travail de L.CORWIN - F.P. GREENLEAF [4] dans le cas où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre $\mathcal{N}_n$ des matrices n × n triangulaires supérieures (strictement), (dans ce cas [4] donne une caractérisation des noyaux distributions des opérateurs $\pi_\xi(u)$, $u \in \mathcal{S}(G)$). Dans le cas général on plonge $\mathfrak{g}$ dans une algèbre $\mathcal{N}_n$ et P s'identifie à un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{N}_n)$. On montre que cette extension de P vérifie encore l'hypothèse du théorème, et d'une fonction $\tilde{u} \in \mathcal{S}(N_n)$ solution de ${}^tP\tilde{u} = 0$ on construit $u \in \mathcal{S}(G)$ solution de ${}^tPu = 0$ en posant $u(x) = \tilde{u}(x_o x)$ ($x \in G$, x_o choisi de sorte que $u \neq 0$).

Pour passer de la condition $\mathrm{Ker}\,\pi_\xi({}^tP) \neq (0)$ à la construction d'une famille lisse $\varphi(\xi)$ dans le noyau de $\mathrm{Ker}\,\pi_\xi({}^tP)$, il y a un pas non trivial à franchir, qui nécessite l'addition d'hypothèses "techniques". A titre d'exemple, donnons le résultat suivant :

<u>Théorème</u> [6] : Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ une algèbre de Lie telle que $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2$ et $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = (0)$. Soit $X_1, \ldots, X_k$ une base de $\mathfrak{g}_1$ et soit $L \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ de la forme

$$L = \Sigma\, a_{j_1 \ldots j_m} X_{j_1} \ldots X_{j_m}$$

On suppose que :

i) Pour tout $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k \setminus 0$ on a :

$$\Sigma\, a_{j_1 \ldots j_m} \tau_{j_1} \ldots \tau_{j_m} \neq 0.$$

ii) $\pi_\xi({}^tL)$ a un noyau non trivial pour ξ dans un ouvert de $\mathfrak{g}^*$.

Alors L n'est pas localement résoluble.

IX - RÉSOLUBILITÉ - CONDITIONS SUFFISANTES

En dehors du théorème concernant les opérateurs bi-invariants qui sont toujours localement résolubles (M. RAIS [26], J.F. ROUVIERE [33], M. DUFLO [7]) et de théorèmes peu explicites du type de celui énoncé au § 7, on ne dispose pas de résultats très généraux. Le cas d'opérateurs homogènes sur les groupes d'Heisenberg est résolu (L.P. ROTHSCHILD [29], G. LION [22]). Pour les groupes de rang 2, de "type Heisenberg" (c'est-à-dire tels que pour tout $\xi \in g_2^*/0$, la forme $<\xi_2, [\,.\,,\,.\,]>$ est non dégénérée sur g_1), le cas des opérateurs homogènes, transversalement elliptiques, est aussi complètement résolu (L. ROTHSCHILD - D. TARTAKOFF [32]). Le cas des opérateurs d'ordre deux sur les groupes de rang 2 a fait l'objet d'études particulières L.P. ROTHSCHILD, [30], P. LEVY-BRUHL [20] [21].

Terminons cet exposé par la présentation de l'idée suivante : dans le cas d'un opérateur à coefficients constants $P(D_x)$, lors de la construction d'une solution élémentaire, on est naturellement amené à complexifier le paramètre ξ pour éviter les zéros de $P(\xi)$; de même dans le cas des groupes nilpotents il serait probablement astucieux d'essayer de complexifier au moins partiellement le paramètre ξ pour l'étude des opérateurs $\pi_\xi(P)$. Cette idée est d'ailleurs utilisée par P. LEVY-BRUHL [21], et auparavant par B. HELFFER [13]. On trouve aussi cette préoccupation dans L. CORWIN - L. ROTHSCHILD [6] avec la notion de "structure différentielle localement uniforme".

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS : Séminaire Goulaouic Schwartz 1976–1977, exposé n° 19

[2] R. BEALS : Exposé aux Journées Equations aux dérivées partielles de St Jean de Monts 1977.

[3] L. CORWIN : A representation theoretic criterion for local solvability of left invariant differential operators on nilpotent Lie groups ; Trans. A.M.S., 264(1981) p. 113-120

[4] L. CORWIN - F.P.GREENLEAF : Fourier transforms of smooth functions on certain nilpotent Lie groups ; J. Funct. Anal., 37(1980) p. 203 - 217.

[5] L. CORWIN - F.P.GREENLEAF : Rationally varying Polarizing subspaces in nilpotent Lie algebras ; Proc. A.M.S.81(1981) p. 27

[6] L. CORWIN - L.P. ROTHSCHILD : necessary conditons for local solvability of homogeneous left invariant differential operators on nilpotent Lie groups. preprint.

[7] M. DUFLO : Opérateurs différentiels bi invariants sur un groupe de Lie ; Ann. scient., Ecole Normale Sup. 4è série, t. 10 (1977) p. 265 - 288.

[8] J. DIXMIER : Sur les représentations des groupes de Lie nilpotents ;
I Amer J. Math. 81 (1959) p. 160–110 ;
II Bull. Soc. Math. France, 85 (1957) p. 325 - 388 ;
III Canad. J. Math. ; 10 (1958) p. 321 - 348 ;
IV Canad J. Math. ; 11(1959) p. 321 - 344
V Bull. Soc. Math. France, 81 (1959) p. 65 - 79
VI Canad. J. Math., 12 (1960) p. 324 - 352.

[9] J. DIXMIER : Algèbres enveloppantes ; Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[10] G.B. FOLLAND - E.M. STEIN : Estimates for the ∂_b complex and analysis on the Heisenberg group ; Comm. Pure Appl. Math. 27(1974) p. 429 - 522.

[11] R. GOODMAN : Nilpotent Lie Groups ; Lecture Notes in Math. N° 562.

[12] B. HELFFER : Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur les groupes de Lie nilpotents ; C.I.M.E, (1977).

[13] B. HELFFER : Conditions nécesaires d'hypoanalyticité. Publications Publications des séminaires d'Analyse de l'Université de Nantes 1978-1979.

[14] B. HELFFER - J. NOURRIGAT : Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3 ; Comm. in Partial Diff. Equ., 3 (1978) p. 643 - 743.

[15] B. HELFFER - J. NOURRIGAT : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent ; Comm. in Partial Diff. Equ. 4 (1979) p. 899 - 958.

[16] B. HELFFER - J. NOURRIGAT : Approximation d'un système de champs vecteurs et applications à l'hypoellipticité ; Arkiv för Mat. 17(1979 p. 231-254

[17] B. HELFFER - J. NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs ; C.R. Ac. Sc. 289 (1979) p. 775 - 778 ; et preprint.

[18] L. HORMANDER - A. MELIN : Free systems of vector fields ; Arkiv för Mat, 16 (1978). p. 83-88

[19] A.A. KIRILLOV : Unitary representations of nilpotent Lie groups ; Russian Math. Surveys , 17, n° 4 (1962) p. 53 - 104.

[20] P. LEVY - BRUHL : Résolubilité locale et globale d'opérateurs invariants du second ordre sur des groupes nilpotents ; Bull. Soc. Math. France, 104 (1980) p. 369 - 391.

[21] P. LEVY - BRUHL : Application de la formule de Plancherel à la résolubilité d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes nilpotents de rang deux ; preprint.

[22] G. LION : Hypoellipticité et résolubilité d'opérateurs différentiels sur les groupes nilpotents de rang deux : C.R. Ac. Sc. Paris 290 (1980) P. 271 - 274.

[23] G. METIVIER : Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques ; Comm. in Partial Diff. Equ. 1 (1976) p. 467 - 519.

[24] L. PUKANSKI : Leçons sur les représentations des groupes ; Dunod, Paris, 1967.

[25] L. PUKANSKI : On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups : J. Funct. Anal. 1 (1967) p. 255 - 280;

[26] M. RAIS : Solution élémentaire des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe nilpotent ; C. R. As. Sc. Paris 273 (1971) p. 495 - 498.

[27] C. ROCKLAND : Hypoellipticity on the Heisenberg group ; Representation theoretic criteria ; Trans of the A.M.S., 240 (1978) p.1-52.

[28] L.P. ROTHSCHILD : A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields : Comm. in Partial Diff. Equ. 4 (1979) p. 645 - 699.

[29] L.P. ROTHSCHILD : Local solvability of left invariant differiential operator on the Heisenberg group ; Proc. A.M.S., 74 (1979) p. 383 - 388.

[30] L.P. ROTHSCHILD : Local solvability of second order differential operators on nilpotent Lie groups ; preprint.

[31] L.P. ROTHSCHILD - E.M. STEIN : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups : Acta. Math., 137 (1976) p. 247 - 320.

[32] L.P. ROTHSCHILD - D.S. TARTAKOFF : Inversion of Analytic matrices and local solvability of some invariant differential operators on nilpotent Lie groups : Comm. in Partial Diff. Equ., 6 (1981) p. 625 - 650.

[33] F. ROUVIERE : Sur la résolubilité Locale des opérateurs bi invariants ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, série IV, vol III n°2, (1976) p. 231 - 244.

[34] F. TREVES : An invariant Criterium of hypoellipticiy ; Amer J. Math, 83 (1961) p. 645 - 668.

[35] A. et J. UNTERBERGER : Hölder estimates and hypoellipticity, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), p. 35 - 54.

[36] M. VERGNE : C.R. Acad. Sc. 270, (1970), p. 173-174 ; 704-707

Guy MÉTIVIER

Université de Rennes I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu
F-35042 RENNES CEDEX