Astérisque

Marc Yor

Introduction au calcul stochastique

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 590, p. 275-292

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__275_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 590 Février 1982

INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE

par Marc YOR

Introduction

On présente ici un résumé - nécessairement très succinct, et incomplet - de résultats importants sur le mouvement brownien réel, tout en axant l'exposé sur le calcul différentiel stochastique, vu ici comme outil de démonstration des résultats en question.

L'exposé a pour but de permettre au lecteur d'aborder les nombreux ouvrages publiés récemment sur ces sujets (voir les références). En conséquence, beaucoup de démonstrations (sauf en ce qui concerne le § 3), voire quelques notions, sont seulement esquissées.

Enfin, il ne sera pas question de géométrie différentielle stochastique - actuellement en plein développement - qui a déjà fait l'objet d'un exposé de D. Elworthy [1] à ce Séminaire. Pour des raisons analogues, le lecteur pourra se reporter, en ce qui concerne l'étude des fonctions analytiques à l'aide du mouvement brownien, à l'excellent exposé de B. Davis [2].

1. Critère de continuité de Kolmogorov et lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey

La situation suivante se présente souvent dans l'étude des fonctions aléatoires : soit (X_x) une famille de variables aléatoires indexées par un intervalle I de $\mathbb{R}$, chacune d'elles étant définie à un ensemble négligeable près. On cherche s'il existe un processus $\tilde{X} : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

(i) pour $\omega \notin N$, ensemble négligeable, $x \longrightarrow \tilde{X}_x(\omega)$ soit continu ;

(ii) pour tout $x \in I$, $P\{X_x = \tilde{X}_x\} = 1$.

Pour cela, on utilise fréquemment le

(1.1) LEMME (Kolmogorov).— *Soient* $a > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha > 1$. *Si* $(X_x)_{x\in I}$ *est une famille de variables aléatoires telle que :*

$(K_{\gamma,\alpha})$ *pour tous* $x, y \in I$, $E(|X_x - X_y|^\gamma) \leq a|x-y|^\alpha$,

il existe un processus $(\tilde{X}_x)_{x\in I}$ *qui satisfait à* (i) *et* (ii).

On peut préciser la continuité de $\tilde{X}$ grâce au

(1.2) THÉORÈME (Garsia-Rodemich-Rumsey [3]).— *Soient* p *et* Ψ *deux fonctions continues, strictement croissantes sur* $\mathbb{R}_+$ *, telles que* $p(0) = \Psi(0) = 0$ *, et* $\lim_{t\uparrow\infty} \Psi(t) = \infty$. *Alors, si* $\phi : I \to \mathbb{R}$ *est mesurable, et si*

$$B \overset{\text{déf}}{=} \int_I\int_I ds\,dt\,\Psi\left(\frac{|\phi(t)-\phi(s)|}{p(|t-s|)}\right) < \infty \ ;$$

on a, pour presque tout $(s,t) \in I^2$:

$$|\phi(t)-\phi(s)| \leq 8\int_0^{|t-s|} \Psi^{-1}\left(\frac{4B}{u^2}\right) p(du) \ .$$

(1.3) *Remarques*.— (i) Dans le cadre du lemme (1.1), on applique le théorème à $\tilde{X}_\bullet(\omega)$, avec $\Psi(u) = u^\gamma$, $p(u) = u^{(\alpha+\varepsilon)/\gamma}$, $0 \leq \varepsilon < 1$, et l'on obtient que P p.s., $(\tilde{X}_t(\omega), t\in I)$ est lipschitzien d'exposant $\frac{\alpha+\varepsilon-2}{\gamma}$. Pour une autre démonstration du même résultat, voir Neveu ([4], p. 92).

(ii) Stroock et Varadhan ([5], p. 47 et 60) déduisent du théorème (1.2) une démonstration du lemme (1.1), lorsque l'on suppose le processus $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

(iii) Il existe une version des lemme (1.1) et théorème (1.2) pour des fonctions indexées par I , cube de $\mathbb{R}^d$ (voir [5] et Garsia [6] pour de nombreux prolongements du théorème (1.2)).

2. Mesures gaussiennes et mouvement brownien

La présentation générale adoptée ici permet de construire, outre le mouvement brownien réel, le drap brownien à n paramètres ([7], [8]) et le mouvement brownien de P. Lévy indexé par $\mathbb{R}^n$ ([9]).

(2.1) LEMME.— *Si* H *est un espace de Hilbert réel, séparable, il existe un espace de probabilité* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *sur lequel est définie une famille* $(X(h), h\in H)$ *de variables gaussiennes, réelles, centrées, telle que l'application* $X : H \longrightarrow L^2(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *respecte la structure hilbertienne de chacun des espaces.*

Démonstration.— Si (e_n) est une base orthonormée de H , et (ξ_n) une suite de variables gaussiennes centrées, réduites, indépendantes, définies sur un espace $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, on prend $X(h) = \Sigma_n (h,e_n)_H \xi_n$, la convergence ayant lieu p.s. et dans L^2 □

Dans le cas particulier où $H = L^2(T,\mathcal{T},\mu)$, avec $(T,\mathcal{T})$ espace mesurable et μ mesure positive σ-finie, on appelle *"mesure" gaussienne* associée à μ toute famille $(X(f), f\in H)$ définie de la manière précédente. Cette appellation est justifiée par la propriété suivante : si $F = \Sigma_n F_n$, où, pour tout n , $F_n \in \mathcal{T}$, et $\mu(F) < \infty$, alors $X(F) \equiv X(1_F)$ est la limite p.s. et dans L^2 des variables $\sum_{m\leq n} X(F_m)$.

La proposition (2.2) permet de retrouver, en général, la mesure μ à partir des variables $(X(h), h\in H)$ elles-même (et non seulement de $E[X(h)^2]$).

(2.2) PROPOSITION.— *Si* $F \in \mathscr{C}$, $\mu(F) < \infty$, *et si, pour tout* n , *il existe une partition finie de* F , *soit* $\tau_n = \{F_k^{(n)} ; 1 \leq k \leq k_n\}$, *constituée d'éléments de* $\mathscr{C}$, *telle que* $\sup_{\tau_n} \mu(F_k^{(n)}) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$, *alors* $\mu(F)$ *est la limite dans* L^2 *de* $\Sigma_{\tau_n} X^2(F_k^{(n)})$.

Particularisons enfin la construction au cas où $T = \mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}$ sa tribu borélienne, et μ la mesure de Lebesgue ; il existe un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ - appelé *mouvement brownien réel* - tel que, pour tout t , $B_t = X([0,t])$, P p.s., et pour $\omega \notin N$, ensemble négligeable, la fonction : $t \longrightarrow B_t(\omega)$ est continue : en effet, on peut appliquer le lemme (1.1), le critère $(K_{p,p/2})$ étant satisfait pour tout $p > 2$. De plus, d'après la remarque (1.3), (i), pour tout $T > 0$, la fonction aléatoire $(B_t(\omega), 0 \leq t \leq T)$ est presque sûrement lipschitzienne, d'exposant $(\frac{1}{2} - \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

3. Intégrale stochastique par rapport à une martingale continue (Construction élémentaire)

(3.0) *Notations.*— Dans tout l'exposé, on appellera espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ complet, et d'une famille croissante et continue à droite - appelée *filtration* - de sous-tribus $(\mathscr{F}_t)$ de $\mathscr{F}$, supposées $(\mathscr{F}, P)$ complètes.

Si (X_t) est un processus défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, on appelle filtration (naturelle) de X la filtration engendrée par les tribus $(\sigma\{X_s, s \leq t\}, t \geq 0)$. Enfin, le processus (X_t) est dit $(\mathscr{F}_t)$ adapté si, pour tout t , la variable X_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable □

Soit maintenant $(M_t)_{t \geq 0}$ martingale continue, définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$, c'est-à-dire que le processus (M_t) est $(\mathscr{F}_t)$ adapté, et pour tout couple (s,t) , avec $s \leq t$, on a : $E[M_t | \mathscr{F}_s] = M_s$. Par exemple, le mouvement brownien réel (B_t) est une martingale pour sa filtration naturelle $(\mathscr{B}_t)$, car, si $t > s$, la variable $(B_t - B_s)$ est indépendante de $\mathscr{B}_s$.

On montre aisément, de façon générale, que si (M_t) est une martingale continue qui est à variation finie sur tout intervalle borné $[0,T]$, alors $M_t \equiv M_0$. Il n'est donc pas question, pour définir les intégrales de certains processus $(\varphi(s,\omega); s \geq 0)$ par rapport à " dM_s ", de se référer à l'intégrale de Stieltjes-Lebesgue.

(3.1) La notion de *temps d'arrêt* - c'est-à-dire de variable aléatoire $T : (\Omega, \mathscr{F}) \longrightarrow [0,\infty]$, telle que, pour tout t , $(T \leq t) \in \mathscr{F}_t$ - joue un rôle fondamental dans tout le calcul stochastique. Si T est un temps d'arrêt, on note $\mathscr{F}_T$ la tribu des événements antérieurs à T , définie par :
$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F}_\infty : \text{pour tout } t , \ A \cap (T \leq t) \in \mathscr{F}_t\}$.

(3.2) La construction ci-dessous, qui nous a été exposée par M. Sharpe en 1974, utilise de façon essentielle *l'inégalité de Doob* dans L^2 : pour toute martingale (continue) (U_t) de carré intégrable, $E[\sup_t U_t^2] \le 4 \sup_t E[U_t^2]$.

On suppose, pour commencer la construction - faite par étapes successives -, que la martingale continue M est bornée.

(3.3) Soit $H_t = \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}(t)$, où (T_i) est une suite finie, croissante, de temps d'arrêt, et pour tout i , H_i est une variable bornée, $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable (on dira, dans la suite de ce paragraphe, que H est un processus élémentaire).

On définit alors $\int_0^t H_s dM_s = \sum_{i=1}^{n} H_i\left(M_{T_{i+1}\wedge t} - M_{T_i \wedge t}\right)$ $(t \ge 0)$, et l'on vérifie sans peine que c'est une martingale bornée. De plus, si $h \equiv \sup_{t,\omega}|H_t(\omega)|$, on a :

(3.a) $$E[\sup_t (\int_0^t H_s dM_s)^2] \le 4h^2 E[M_\infty^2] .$$

Cette inégalité permet d'étendre la définition de $\int_0^\bullet H_s dM_s$ aux sommes infinies de processus élémentaires $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}$, où (T_i) est une suite de temps d'arrêt croissant P p.s. vers $+\infty$, et $h \equiv \sup_{t,\omega}|H_t(\omega)| < \infty$. L'inégalité (3.a) est encore valable.

(3.4) Soit maintenant (H_t) processus $(\mathcal{F}_t)$ adapté, continu et borné. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit les temps d'arrêt :

$$T_0^{(p)} = 0 \quad , \quad T_1^{(p)} = \inf\{t > 0 : |H_t| \ge 1/p\} \ ,$$

et, par itération,

$$T_{n+1}^{(p)} = \inf\{t > T_n^{(p)} : |H_t - H_{T_n^{(p)}}| \ge 1/p\} \ .$$

Remarquons que, pour tout p fixé, $T_n^{(p)} \uparrow \infty$ P p.s., et $|H - H^{(p)}| \le 1/p$. L'intégrale stochastique $\int_0^\bullet H_s^{(p)} dM_s$ a été définie en (3.3) ; de plus, on a : $E[\sup_t (\int_0^t (H_s^{(p)} - H_s^{(q)}) dM_s)^2] \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$, et il existe donc une martingale continue, que l'on note $\int_0^\bullet H_s dM_s$ telle que $E[\sup_t (\int_0^t H_s dM_s - \int_0^t H_s^{(p)} dM_s)^2] \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

(3.5) Lorsque l'on applique la construction précédente à $H \equiv M$, on voit aisément qu'il existe un processus croissant, continu, nul en 0 , (A_t) , tel que :

(3.b) $$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s + A_t \ .$$

(3.6) Considérant à nouveau H processus élémentaire, on obtient :

$$E[(\int_0^t H_s dM_s)^2] = E[\int_0^t H_s^2 dA_s] \ ,$$

ce qui permet, toujours pour de tels processus, de raffiner l'inégalité (3.a) en :

(3.c) $$E[\sup_t (\int_0^t H_s dM_s)^2] \le 4E[\int_0^t H_s^2 dA_s] \ .$$

On prolonge alors, par linéarité et continuité, la définition de $\int_0^\bullet H_s dM_s$ à tout $H \in L^2(\mathcal{P}; dA_s dP)$, où $\mathcal{P}$ désigne la tribu - dite : tribu $(\mathcal{F}_t)$ *prévisible* - sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, engendrée par les processus élémentaires.

(3.7) La construction précédente s'étend, au moyen d'opérations d'arrêt et de recollement le long d'une suite croissante de temps d'arrêt, au cas où, d'une part, (M_t) est une martingale locale continue (c'est-à-dire qu'il existe une suite de temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ P p.s., telle que $(M_{T_n \wedge t})$ soit une martingale uniformément intégrable, et, d'autre part, H, processus prévisible, vérifie seulement : $\int_0^t H_s^2 dA_s < \infty$ P p.s., pour tout t.

(3.8) Soient M et N deux martingales locales continues. Par polarisation à partir de (3.b), il existe un unique processus (V_t) à variation finie, continu, nul en 0, $(\mathcal{F}_t)$ adapté, tel que $MN - V$ soit une martingale locale. On note $V = \langle M,N\rangle$. On montre que : $\langle \int_0^\bullet H_s dM_s, \int_0^\bullet K_s dN_s \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M,N\rangle_s$, pour tous les processus H et K tels que les intégrales stochastiques considérées soient définies.

4. L'intégrale stochastique comme mesure vectorielle

Ce paragraphe, d'une importance théorique fondamentale, peut être omis par un lecteur préoccupé uniquement par les applications du calcul stochastique.

A l'issue du § 3, on a obtenu, pour tout couple de martingales continues de carré intégrable (M_t) et (N_t), et tout processus $H \in L^2(\mathcal{P}; d\langle M\rangle_s dP)$ l'égalité :

(4.a)
$$E[(\int_0^\infty H_s dM_s) N_\infty] = E[\int_0^\infty H_s d\langle M,N\rangle_s] .$$

Inversement, si l'on connait, autrement que par la construction faite au § 3, l'existence du processus $\langle M,N\rangle$, on peut définir l'intégrale $\int_0^\bullet H_s dM_s$ par dualité à partir de (4.a) : c'est ce qu'ont fait Kunita-Watanabe [10] en s'appuyant sur la décomposition de Doob-Meyer des sous-martingales (voir Meyer [11], p. 157, T. 29).

Cette présentation "faible" des intégrales stochastiques est à rapprocher du théorème d'Orlicz-Pettis selon lequel, si $(\Pi,\mathcal{P})$ est un espace mesurable, et E un espace de Banach, une application $M : \mathcal{P} \longrightarrow E$ est une mesure vectorielle, si et seulement si, pour tout $x' \in E'$, dual fort de E, $\langle M(\bullet),x'\rangle$ est σ-additive. Les premières études de l'intégrale stochastique comme mesure vectorielle ont été entreprises par Pellaumail [12] (voir aussi Métivier-Pellaumail [13]).

Dans ce paragraphe, on prendra dorénavant $\Pi = \Omega \times \mathbb{R}_+$, et $\mathcal{P}$ la tribu $(\mathcal{F}_t)$-prévisible. Introduisons l'espace $\mathcal{A}$ des processus H de la forme :

(4.b)
$$H = H_0 1_{[0]} + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{]t_i,t_{i+1}]} ,$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots\dots < t_{n+1} < \infty$ et H_i est $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable pour tout i. Soit $p \in [1,\infty[$. Il est maintenant naturel de chercher à caractériser les processus (X_t), continus à droite, $(\mathcal{F}_t)$ adaptés, pour lesquels l'application

$$\text{(4.c)} \qquad I_X : \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow L^p(\Omega,\mathcal{F},P) \\ H \longrightarrow H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \end{array}$$

se prolonge en une mesure vectorielle sur $\mathcal{P}$, à valeurs dans L^p . Suivant Kussmaul [14], on dira alors que X est p-sommable (et, bien entendu, si H est un processus prévisible borné, on notera $\int_0^{\bullet} H_s dX_s$ l'intégrale de H par rapport à la mesure vectorielle dX_s). On a le

(4.1) THÉORÈME (voir, par exemple, Kussmaul [14], et [15]).— *Soit* $p \in [1,\infty[$, *et* X *processus continu à droite,* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté, tel que* $E(|X_t|^p) < \infty$, *pour tout* t . *Alors,* X *est* p-*sommable si, et seulement si,* X *est une semi-martingale de* H^p , *c'est à dire :* X *se décompose (de façon unique) en* $M + A$, *où*

- M *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale telle que* $E[\sup_t |M_t|^p] < \infty$,
- A *est un processus prévisible, à variation* p-*intégrable, c'est-à-dire :* $E[(\int_0^{\infty} |dA_s|)^p] < \infty$.

L'étape suivante du développement de la théorie de l'intégrale stochastique comme mesure vectorielle - qui semble, pour l'instant, clore le sujet - a été la caractérisation des processus 0-*sommables*, définis comme les processus $(\mathcal{F}_t)$ adaptés, continus à droite, tels que, pour tout $t > 0$, l'application

$$J_X^t : \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow L^0(\Omega,\mathcal{F},P) \\ H \longrightarrow H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t}) \end{array} ,$$

définisse un opérateur linéaire continu de $\mathcal{A}$, muni de la topologie de la convergence uniforme (en (t,ω)), dans L^0 , muni de la topologie de la convergence en probabilité. On a alors le

(4.2) THÉORÈME (Bitcheler [16] ; Dellacherie [17], [18]).— *Soit* X *processus continu à droite,* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté. Alors,* X *est un processus* 0-*sommable si, et seulement si, c'est une* $(\mathcal{F}_t)$ *semi-martingale, c'est-à-dire* X *se décompose en* $M + A$, *où*

- M *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale locale, et*
- A *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté, à variation bornée sur tout compact de* $\mathbb{R}_+$.

(4.3) *Remarque*.— En outre, Bitcheler [16] a défini et caractérisé les processus p-sommables pour $0 < p < 1$.

5. Formule d'Itô et extensions

(5.1) Retournons à la fin du § 3 : toute $(\mathcal{F}_t)$ semi-martingale continue (X_t) est la somme d'une martingale locale continue (M_t) et d'un processus continu, à variation bornée (V_t) . Si l'on impose $V_0 = 0$, une telle décomposition est unique.

Il est aisé de démontrer, à la suite du § 3, que pour tout $T > 0$, si $\tau_n = (0 = t_0 < t_1 < \dots . < t_{p_n} = T)$ est une suite de subdivisions de $[0,T]$

dont le pas tend vers 0, alors $\Sigma_{\tau_n}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ converge en probabilité vers $\langle M\rangle_T$; ce résultat est à rapprocher de la proposition (2.2).

(5.2) La formule d'Itô - formule (5.a) ci-dessous - est à la base des multiples applications du calcul stochastique. *Si* (X_t) *est une semi-martingale continue à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si chaque composante X^i est une semi-martingale réelle, continue, de décomposition $M^i + V^i$, *et si* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est de classe* C^2, *on a :*

$$(5.a) \qquad F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^n F'_i(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} F''_{ij}(X_s)d\langle M^i,M^j\rangle_s .$$

(5.3) Voici un premier ensemble d'applications de la formule d'Itô. Si (M_t) est une martingale locale continue, il en est de même de

$$\mathcal{E}_t^f = \exp\{\int_0^t f(s)dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)d\langle M\rangle_s\}$$

pour tout processus prévisible borné f ; d'où l'on déduit aisément que :

(i) Si (M_t) est une martingale locale continue, nulle en 0, avec $\langle M\rangle_t \equiv t$, c'est un mouvement brownien réel.

(ii) Si (M_t) est une martingale locale continue, nulle en 0, elle peut se représenter (éventuellement sur un espace de probabilité élargi) comme $M_t = B_{(\langle M\rangle_t)}$, avec (B_t) mouvement brownien réel (Dambis [19] ; Dubins-Schwarz [20]). En outre, si l'on applique ce résultat simultanément à deux martingales M et N telles que $\langle M,N\rangle = 0$, Knight [21] a démontré que les mouvements browniens correspondants sont indépendants.

(iii) Toute martingale locale relative à la filtration naturelle du mouvement brownien (B_t) peut se représenter comme : $\lambda + \int_0^t \varphi(s,\omega)dB_s$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et φ est un processus $(\mathcal{B}_t)$ prévisible tel que $\int_0^t \varphi^2(s,\omega)ds < \infty$ (Itô [22]).

Les propriétés (i) et (iii) ont été le point de départ de l'étude des points extrémaux de l'ensemble convexe des lois de martingales locales continues (voir Dellacherie [23] et Jacod [24]).

(5.4) Par application de la formule d'Itô (5.a) à $|M_t|^p$, avec $p \geq 4$, et (M_t) martingale locale continue nulle en 0, on montre l'existence, pour tout $p \geq 4$, de deux constantes universelles c_p et C_p telles que

$$(5.b) \qquad c_p E[\langle M\rangle_\infty^{p/2}] \leq E[\sup_t |M_t|^p] \leq C_p E[\langle M\rangle_\infty^{p/2}] .$$

En fait, Burkholder, Davis et Gundy ont établi les inégalités (5.b) pour tout $p > 0$, et si (M_t) est seulement une martingale locale continue à droite, pour tout $p \geq 1$, quitte à remplacer $\langle M\rangle$ par le crochet "droit" associé à M. Pour les références, et l'étude des martingales à temps discret, voir Garsia [25] et Neveu [26].

(5.5) Appliquant à nouveau la formule d'Itô, dans le cas où X est une semi-martingale réelle, à une suite de régularisées d'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, différence de deux fonctions convexes, on obtient l'existence d'un processus continu

(A_t^F) , à variation bornée, tel que :

(5.a') $$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'_g(X_s)dX_s + A_t^F .$$

Le processus A^{F_a} associé à $F(x) = |x-a|$ $(a \in \mathbb{R})$ est croissant, et appelé temps local de X en a . On le note (L_t^a) ; la mesure $(d_sL_s^a)$ est portée par $\{s/X_s = a\}$. On peut appliquer, grâce aux inégalités (5.b), le critère de Kolmogorov $(K_{p,p/2})$, pour tout $t > 0$, à la famille de variables : $(\int_0^t 1_{(X_s>a)}dM_s\ ; a \in \mathbb{R})$, ce qui permet de montrer l'existence d'une version du processus (L_t^a) conjointement continue à droite et limitée à gauche en a , et continue en t . De plus, on a : $L_t^a - L_t^{a-} = 2\int_0^t 1_{(X_s=a)}dV_s$. Cette méthode est une variante de la démonstration faite par Mc Kean ([27], ou [28]) pour démontrer (théorème de Trotter) l'existence d'une version bicontinue des temps locaux browniens.

On peut maintenant écrire le processus A^F qui figure dans la formule (5.a') comme : $A_t^F = \frac{1}{2}\int F''(dx)L_t^x$, où $F''(dx)$ désigne la dérivée seconde de F au sens des distributions.

Dans le cas brownien, Ray [29] et Knight [30], et plus récemment Perkins [71] et Jeulin ont montré que, pour certains temps d'arrêt T (par exemple, $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$; $\tau_t = \inf\{t : L_t^o > t\}$; $T \equiv t$), le processus : $a \longrightarrow L_T^a$ est une semi-martingale (pour sa filtration naturelle), ce qui permet, pour de tels temps, de prolonger la formule (5.a') à toute fonction F , dont la dérivée première est dans L^2_{loc} , de la façon suivante :

(5.a") $$F(B_T) = F(B_0) + \int_0^T F'(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int F'(a)d_aL_T^a .$$

(5.6) P. Lévy [9] a donné une autre présentation (en loi) du temps local en 0 - noté ici (L_t) - du mouvement brownien (B_t) , en montrant l'identité des lois des processus $(|B|;L)$ et $(S-B;S)$ où $S_t \equiv \sup_{s\leq t} B_s$.

Notons encore que la propriété de support de (dL_s) (portée par $\{s : B_s = 0\}$) permet de construire des martingales très simples, par exemple : $f(L_t) - |B_t|f'(L_t)$ $(f \in C^1(\mathbb{R}_+))$, très utiles pour de nombreux calculs de lois de variables associées à L (voir, par exemple, Azéma-Yor [31], Kennedy [32], Jeulin-Yor [33]).

(5.7) Terminons ce paragraphe par une dernière application de la formule (5.a), qui met en évidence la nature géométrique de l'intégrale stochastique, et n'est que le premier maillon de l'intégration stochastique des formes différentielles, maintenant couramment pratiquée dans les travaux de géométrie différentielle stochastique (voir, par exemple, Bismut [34] et Ikeda-Manabe [35]) : si $\Pi = \sum_{i=1}^n f_i(x)dx_i$ est une forme différentielle de classe C^1 , fermée, sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et si (X_t) est une semi-martingale à valeurs dans U , on a :

(5.a''') $$\int_{X_{(0,t)}(\omega)} \Pi = \int_0^t \sum_{i=1}^n f_i(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(X_s)d<X^i,X^j>_s .$$

Le membre de droite est souvent appelé intégrale de Stratonovitch, car il est égal, dans le cas où les mesures $d_s\langle X^i\rangle_s$ sont absolument continues, à la limite en probabilité des approximations de Stratonovitch [36] :

$$\Sigma_{\tau_n} f(X_{(t_j+t_{j+1})/2}).(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) ,$$

lorsque $\tau_n = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t)$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0.

6. Equations différentielles stochastiques

(6.1) Supposons donné, sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien d-dimensionnel (B_t), et d'autre part, $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux applications boréliennes bornées (pour simplifier).

On appelle alors *solution trajectorielle* de l'équation

$$e(x,\sigma,b) \qquad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds ,$$

tout processus (X_t) défini sur Ω, et $(\mathcal{F}_t)$ adapté, qui satisfait l'égalité précédente. Remarquons que, si l'on note, pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) ,$$

où $a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$, alors, d'après la formule d'Itô (5.a), le processus

$$(6.a) \qquad M_t^f \equiv f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(X_s)ds$$

est une $(P,\mathcal{F}_t)$ martingale locale. Ceci a permis à Stroock-Varadhan [37] de considérer comme solution de $e(x,\sigma,b)$ toute *probabilité* P sur l'espace canonique $\Omega_* = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ - muni de la famille de tribus $\mathcal{X}_t = \sigma\{X_s(\omega) \equiv \omega(s) ; s \le t\}$ et de la tribu terminale $\mathcal{X}_\infty = \vee_t \mathcal{X}_t$ - telle que $P(X_0 = x) = 1$, et : *pour toute fonction* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, M_t^f (définie par (6.a)) *soit une* $(P,\mathcal{X}_t)$ *martingale*.

Les principales relations qui existent entre ces notions sont :

(i) Si (U_t) est une solution trajectorielle de $e(x,\sigma,b)$ sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$, alors la loi de (U_t) sous P, soit : $U_\bullet(P)$, est une solution-probabilité.

(ii) Si P est une solution-probabilité, il existe, à l'aide de la caractérisation du mouvement brownien donnée en (5.3), (i), un espace de probabilité $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ qui "élargit" l'espace $(\Omega_*,\mathcal{X}_\infty,P)$, une filtration $(\mathcal{F}'_t)$ sur cet espace, et un $(\mathcal{F}'_t)$ mouvement brownien (B_t) tels que (X_t) soit une solution trajectorielle de $e(x,\sigma,b)$ sur cet espace élargi.

(iii) On dit qu'il y a *unicité trajectorielle* pour $e(x,\sigma,b)$ si, sur tout espace filtré sur lequel existent deux solutions trajectorielles (X_t) et (X'_t), relatives au même mouvement brownien (B_t), on a, pour tout t, $X_t = X'_t$ P p.s. D'autre part, il y a *unicité en loi* pour $e(x,\sigma,b)$ si cette équation admet une seule solution-probabilité. Ces deux types d'unicité sont liés par le

THÉORÈME (Yamada-Watanabe [38]).— *L'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi. De plus, s'il y a unicité trajectorielle, toute solution trajectorielle de* $e(x,\sigma,b)$ *est adaptée à la filtration naturelle du mouvement brownien.*

(6.2) Présentons maintenant quelques critères d'unicité trajectorielle.

THÉORÈME (Itô [39]).— *Si* σ *et* b *sont lipschitziennes, il y a existence et unicité trajectorielles.*

Ce critère peut être considérablement amélioré lorsque $d = n = 1$.

THÉORÈME (Yamada-Watanabe [38]).— *Supposons que :*

(i) *Il existe une fonction* $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *strictement croissante, telle que* $\rho(0) = 0$, $\int_{0+} \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty$, *et* $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x-y|)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) *Il existe une fonction croissante et concave* $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *telle que* $\gamma(0) = 0$, $\int_{0+} \frac{du}{\gamma(u)} = \infty$, *et* $|b(x) - b(y)| \leq \gamma(|x-y|)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors, il y a unicité trajectorielle pour $e(x,\sigma,b)$.

THÉORÈME (Nakao [40]).— *Si* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est à variation bornée, et s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\sigma(x) \geq \varepsilon$ *, pour tout* x *, il y a unicité trajectorielle.*

(6.3) Le principal résultat d'unicité en loi est le

THÉORÈME (Stroock-Varadhan [37]).— *Si* $a : x \longrightarrow a(x) \equiv \sigma(x)\sigma^*(x)$ *est continue, et si, pour tout* x *,* $a(x)$ *est strictement définie positive, il y a unicité en loi.*

Sous ces hypothèses, notons, pour $x \in \mathbb{R}^n$, P_x l'unique solution-probabilité de $e(x,\sigma,b)$; alors, la famille $(P_x, x \in \mathbb{R}^n)$ est markovienne, et induit, au moyen de la formule : $P_t(x,f) = E_x[f(X_t)]$ un semi-groupe de Feller, dont le générateur infinitésimal est une extension de L défini sur $C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Pour une discussion plus complète de l'approche de Stroock-Varadhan, voir D. Williams [41], ou, bien sûr, le livre de Stroock-Varadhan [5].

7. Théorème de Girsanov et applications

(7.1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace de probabilité filtré, et Q une seconde probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, équivalente à P . On suppose (toujours pour simplifier l'exposé) qu'il existe une $((\mathcal{F}_t), P)$ martingale continue (L_t) strictement positive, et telle que : $dQ = L_t . dP$, sur $\mathcal{F}_t$.

Voici la forme générale donnée par Van Schuppen-Wong [42] au théorème de Girsanov [43]

THÉORÈME.— *Si* (X_t) *est une* $((\mathcal{F}_t), P)$ *martingale locale continue, alors* $\left(X_t - \int_0^t \frac{d\langle X, L\rangle_s}{L_s} ; t \geq 0\right)$ *est une* $(\mathcal{F}_t, Q)$ *martingale locale continue, et toute* $(\mathcal{F}_t, Q)$ *martingale locale continue peut se représenter ainsi, de manière unique.*

(7.2) Une des applications pratiques de ce théorème est le calcul explicite de certaines lois relatives au pont brownien, c'est-à-dire au mouvement brownien conditionné à prendre une valeur donnée à un temps fixe. De façon plus précise, si W_x désigne la loi du mouvement brownien n-dimensionnel, issu de x, et si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors :

(7.a) $$M_t^f = \exp\{\int_0^t (\nabla f)(X_s).dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)ds\}$$

est une W_x-martingale locale, qui se représente encore comme :

(7.b) $$M_t^f = \exp\{f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t H_f(X_s)ds\} ,$$

où $H_f = |\nabla f|^2 + \Delta f$. Supposons que, pour $T > 0$, et $x \in \mathbb{R}^n$, fixés, $W_x[M_T^f] = 1$. Notons enfin P_x^f la probabilité sur $(\Omega_*, \mathcal{F}_T)$ définie par : $P_x^f = M_T^f.W_x$. On a alors, pour tout $t \leq T$:

(7.c) $$P_x^f(X_t \in dy) = W_x(X_t \in dy)\exp\{f(y) - f(x)\}W_x(\exp - \frac{1}{2}\int_0^t H_f(X_s)ds/X_t = y) .$$

Or, d'après le théorème de Girsanov, P_x^f est solution-probabilité (cf. § 6) du problème de martingales associé à l'opérateur $L = \frac{1}{2}\Delta + (\nabla f).\nabla$. Dans certains cas (voir par exemple [44], [45]), on peut expliciter le semi-groupe associé à la famille (P_x^f) , et donc obtenir ainsi une expression de $W_x(\exp - \frac{1}{2}\int_0^t H_f(X_s)ds/X_t = y)$.

(7.3) La formule (7.c) est à rapprocher de la formule de Feynman-Kac, qui sous certaines conditions sur $f , c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, fonctions boréliennes bornées, donne une représentation de la solution de :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_x g(t,x) + c(x)g(t,x) \quad ; \quad g(0,x) = f(x) .$$

comme $g(t,x) = W_x[f(B_t)\exp\int_0^t c(B_s)ds]$.

En complexifiant convenablement cette formule, H. Doss [46] a obtenu une représentation probabiliste de la solution de l'équation de Schrödinger sous certaines conditions d'analyticité.

8. Excursions du mouvement brownien réel hors de 0

On n'a pas présenté ici - hormis de façon un peu abstraite dans le § 4 - le calcul stochastique relatif aux martingales purement discontinues, cette omission pouvant être justifiée par le fait que, si (M_t) est à variation bornée et φ un processus prévisible borné, l'intégrale de Stieltjes et l'intégrale stochastique de φ par rapport à dM coïncident.

Toutefois, lorsque l'on étudie les excursions du mouvement brownien réel hors de 0 , on est amené de façon naturelle à travailler avec des processus de Poisson. De façon précise, si $\mathcal{Z}_\omega = \{t : B_t(\omega) = 0\}$, on a l'identité (P p.s.) $(\mathcal{Z}_\omega)^c = \bigcup_{s>0}]\tau_{s-}(\omega),\tau_s(\omega)[$, où pour tout $s > 0$, $\tau_s(\omega) = \inf\{u : L_u > s\}$, L désignant le temps local en 0 de B. Cette identité permet de définir le processus $(e_t(\omega))$ des excursions de $B_\bullet(\omega)$ hors de 0, à valeurs dans l'espace Ω^o_{abs} des fonctions continues, nulles en 0, et absorbées en 0 après un temps fini, au moyen de la formule :

$$e_t(\omega) = \{u \longrightarrow B_{\tau_{t-}(\omega)+u} 1_{(0\leq u<\tau_t(\omega)-\tau_{t-}(\omega))}\} \ , \quad \text{si} \quad \tau_{t-}(\omega) < \tau_t(\omega) \ ,$$
$$= \underline{0} \quad \text{(la fonction identiquement nulle) sinon.}$$

On suppose Ω^o_{abs} muni de la tribu $\mathcal{F}'$ engendrée par les coordonnées. On a le

THÉORÈME (Itô [47]).— *Sous* W_0, *le processus* $(e_t, t\geq 0)$ *est un* $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ *processus de Poisson ponctuel,* σ*-discret, à valeurs dans* Ω^o_{abs}, c'est-à-dire que :

(i) Si l'on note, pour tout $\Gamma \in \mathcal{F}'$, $N^\Gamma_t = \sum_{s\leq t} 1_{(e_s\in\Gamma)}$, il existe une suite Γ_n d'éléments de $\mathcal{F}'$ telle que : $\Omega^o_{abs} = \bigcup_n \Gamma_n$, et pour tous n et t, $N^{\Gamma_n}_t < \infty$, p.s..

(ii) Pour toute suite finie d'ensembles $(\Delta_k)_{k\leq K}$ de $\mathcal{F}'$, deux à deux disjoints, le processus $(N^{\Delta_k}_t ; t\geq 0, k\leq K)$ est un $(\mathcal{F}_{\tau_t})$ processus de Poisson K-dimensionnel.

Ce théorème permet de retrouver de façon très élégante la plupart des calculs de lois faits par P. Lévy [9] et K.L. Schung [72] sur l'excursion qui enjambe un temps fixe, une fois identifiée la mesure caractéristique n de (e_t) (cette mesure est définie par : $E[N^\Delta_t] = tn(\Delta)$; $\Delta \in \mathcal{F}'$, $t \geq 0$). Pour une identification tout à fait explicite de n, voir D. Williams [48] et L.C.G. Rogers [49].

9. Grossissement d'une filtration par adjonction de certaines tribus

Du point de vue théorique, l'étude des grossissements de filtrations est un essai de réponse à la question générale : jusqu'où peut-on aller au delà de la prévisibilité dans la définition de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale ?

Itô [50] a proposé la réponse suivante : si (M_t) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, et $(\varphi(t,\bullet))$ est un processus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$ mesurable borné (non prévisible) tels que (M_t) soit une semi-martingale pour la filtration $\{\mathcal{F}^\varphi_t\}$ engendrée par $(\mathcal{F}_t)$ et $(\varphi(t,\bullet))$, on définit l'intégrale - toujours notée $\int_0^\bullet \varphi(s)dM_s$ - de φ relativement à dM_s *dans la filtration* $\{\mathcal{F}^\varphi_t\}$.

Jeulin [51] a entrepris une étude systématique des grossissements d'une filtration, et a été amené à distinguer entre *grossissement initial* (on considère la filtration $(\mathcal{F}'_t)$ engendrée par la filtration d'origine $(\mathcal{F}_t)$ et une tribu donnée $\mathcal{G}$; par exemple, $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien réel (B_t), et $\mathcal{G} = \sigma(B_1)$), et *grossissement progressif*, pour lequel on se cantonnera ici au cas particulier suivant, dont l'étude est très liée à l'article d'Azéma [73] : une variable $L : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$, $\mathcal{F}$-mesurable, est dite $(\mathcal{F}_t)$ honnête, si, pour tout $t > 0$, L est égale à une variable $(\mathcal{F}_t)$ mesurable sur $(L < t)$. On note

(Z_t^L) la surmartingale continue à droite, égale P p.s. à $P(L>t|\mathcal{F}_t)$, pour tout t , et (M_t^L) la martingale de BMO qui représente la forme linéaire continue sur $H^1(\mathcal{F}_t)$, l'espace des $(\mathcal{F}_t)$ martingales 1-sommables. Enfin, $(\mathcal{F}_t^L)$ désigne la plus petite filtration qui contienne $(\mathcal{F}_t)$ et fasse de L un temps d'arrêt. On a, pour toute variable $(\mathcal{F}_t)$ honnête L , le

(9.1) THÉORÈME (Barlow [52] ; [53]).— *Toute* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale locale* (X_t) *est une* $(\mathcal{F}_t^L)$ *semi-martingale, dont la partie processus prévisible à variation bornée est :*

$$A_t = \int_0^{t\wedge L} \frac{1}{Z_{s-}^L}\, d\langle X,M^L\rangle_s - \int_0^t 1_{(L<s)}\, \frac{1}{(1-Z_{s-}^L)}\, d\langle X,M^L\rangle_s \ .$$

Azéma et Yoeurp [54] ont précisé comment la partie de ce théorème qui concerne $(X_{t\wedge L})$ est une extension du théorème de Girsanov (cf. (7.1) plus haut).

Jeulin [51] a montré que de nombreux résultats relatifs au mouvement brownien - dont le théorème suivant et la belle décomposition de Williams [55] des trajectoires browniennes - peuvent être obtenus à l'aide du calcul stochastique dans la filtration brownienne convenablement grossie.

(9.2) THÉORÈME (Pitman [56]).— *Si* (B_t) *désigne le mouvement brownien réel issu de* 0 *, et* $S_t \equiv \sup_{s\leq t} B_s$ *, le processus* $(2S_t - B_t, t\geq 0)$ *a même loi que la norme euclidienne du mouvement brownien à valeurs dans* $\mathbb{R}^3$.

On notera que ce théorème est un compagnon du théorème de P. Lévy sur $(S_t - B_t, t\geq 0)$ rappelé en (5.6), mais que, contrairement à ce dernier processus, la filtration de $2S-B$ est strictement contenue dans celle de B . De plus, outre les démonstrations du théorème (9.2) par Pitman [56] et Jeulin [57], il existe une démonstration de Pitman-Rogers [58], fondée sur un raffinement du critère classique de Dynkin, et une autre - voisine de celle de Jeulin - dans le livre de Ikeda-Watanabe [59].

10. Estimation de certaines espérances conditionnelles

(10.1) Enonçons tout d'abord le

THÉORÈME (Nelson [60]).— *Soit* (ξ,η) *une variable gaussienne centrée, à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *, telle que* $E(\xi^2) = E(\eta^2) = 1$; $E(\xi\eta) = \rho$. *On note* $g(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ *la densité de la variable gaussienne réelle réduite et* $\Gamma = L^1(\mathbb{R}, gdx)$.

Si $p, q \in [1,\infty[$ *, l'opérateur linéaire* $U : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ *défini par :* $(Uf)\circ\eta = E[f\circ\xi|\eta]$ *envoie continument* $L^p(gdx)$ *dans* $L^q(gdx)$ *si, et seulement si,* $p-1 \geq \rho^2(q-1)$. *Lorsque cette condition est satisfaite,* $\|U\|_{L^p,L^q} = 1$.

La démonstration esquissée ci-dessous est dûe à Neveu [61]. C'est un exemple typique de l'application du calcul stochastique à certains problèmes d'analyse (voir (10.2)).

Introduisons $((\xi_t,\xi_t'); t\geq 0)$ mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration engendrée par ce processus. Le processus $(\eta_t \overset{\text{déf}}{=} \rho\xi_t + (1-\rho^2)^{1/2}\xi'_t\ , t \geq 0)$ est un $(\mathcal{B}_t)$ mouvement brownien réel tel que $<\eta,\xi>_t = \rho t$. Notons encore $(\mathcal{F}_t)$, resp. $(\mathcal{G}_t)$ la filtration naturelle du processus (ξ_t) , resp. (η_t) .

Remarquons que, pour $f \in \Gamma$, on a $E[f(\xi_1)/\eta_1] = E[f(\xi_1)/\mathcal{G}]$. En conséquence, pour établir que, si $p-1 \geq \rho^2(q-1) > 0$, alors $\|U\|_{L^p,L^q} = 1$, il suffit a fortiori de montrer que l'opérateur T d'espérance conditionnelle, défini sur $L^1(\mathcal{B}_\infty)$, relativement à la tribu $\mathcal{G}_\infty$, envoie continument $L^p(\mathcal{F}_\infty)$ dans $L^q(\mathcal{G}_\infty)$, et satisfait en fait $\|T\|_{(L^p(\mathcal{F}_\infty),L^q(\mathcal{G}_\infty))} = 1$.

Par dualité des espaces L^q et $L^{q'}$ $(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1)$, on est ramené à démontrer que pour tout $X \in L^p_+(\mathcal{F}_\infty)$, $Y \in L^{q'}_+(\mathcal{G}_\infty)$, on a : $E[XY] \leq \|X\|_p\|Y\|_{q'}$. Ce résultat découle de ce que, si l'on note $M_t = E(X^p/\mathcal{F}_t)$ et $N_t = E[Y^{q'}/\mathcal{G}_t]$, le processus $M_t^{1/p}N_t^{1/q'}$ est, par application de la formule d'Itô, une $(\mathcal{B}_t)$ surmartingale. Pour une généralisation de l'approche de Neveu, qui conduit en particulier à une inégalité avec $p < 1$, voir C. Borell [62].

(10.2) La démonstration probabiliste des inégalités de Littlewood-Paley (voir, par exemple, Meyer [63], et Varopoulos [64]) relève de la même méthode générale que celle employée en (10.1), à savoir : représenter les fonctions que l'on cherche à estimer comme espérances conditionnelles de certaines variables aléatoires. Le conditionnement réduisant les normes L^p , on est ramené à certaines inégalités dans le cadre probabiliste ; en l'occurence, ici, on utilise les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (5.b) (voir encore, dans ce domaine, Gundy et al. [74]).

Le calcul stochastique des variations, développé par Malliavin [65], puis étudié par Stroock [66] et Bismut [67] est un troisième exemple important d'application de ce même principe : il s'agit là de montrer que la loi de certaine variable aléatoire réelle admet une densité régulière. Pour cela, on représente une telle variable X comme fonctionnelle du mouvement brownien, on montre l'existence d'une variable Ψ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (par exemple) :

$$W[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X)] = W[\varphi(X)\Psi] ,$$

puis on utilise encore, si $\psi(y) = W(\Psi | X=y)$, la majoration $\|\psi\|_{L^p(X(W))} \leq \|\Psi\|_{L^p(W)}$.

Pour finir, soulignons que, dans son approche de ces questions, Bismut [67] fait grand usage du théorème de Girsanov pour parvenir à une formule d'intégration par parties générale relative à la loi brownienne (voir également Skorokhod [68] pour une étude de telles formules pour les mesures quasi-invariantes sur un espace de Hilbert).

<u>Nota Bene</u> : Le présent exposé pourrait laisser penser que le seul outil pour l'étude du mouvement brownien est le calcul stochastique ; il n'en est pas ainsi, comme en témoignent les ouvrages de référence de Knight [69] et Itô-McKean [70].

RÉFÉRENCES
(dans l'ordre d'apparition dans le texte)

[1] K.D. ELWORTHY - *Stochastic methods and differential geometry*, Séminaire Bourbaki 1980/81, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. 901(1981), 95-110.

[2] B. DAVIS - *Brownian Motion and analytic functions*, Annals of Proba. 7(1979), n° 6, 913-932.

[3] A.M. GARSIA, E. RODEMICH, H. RUMSEY Jr - *A real variable lemma and the continuity of paths of some gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J. 20(1970/71), 565-578.

[4] J. NEVEU - Bases mathématiques du calcul des probabilités, 2e édition, Masson, 1970.

[5] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN - Multidimensional diffusion processes, Springer, 1979.

[6] A.M. GARSIA - *Combinatorial inequalities and smoothness of functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 82, n°2(March 1976), 157-170.

[7] W.J. PARK - *A multiparameter gaussian process*, Ann. Math. Stat. 41(1970), 1582-1595.

[8] R. CAIROLI, J.B. WALSH - *Stochastic integrals in the plane*, Acta Math. 134 (1975), 111-183.

[9] P. LÉVY - Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthiers-Villars, 1965.

[10] H. KUNITA, S. WATANABE - *On square integrable martingales*, Nagoya Math. J. 30(1967), 209-245.

[11] P.A. MEYER - Probabilités et potentiel, Hermann, 1966.

[12] J. PELLAUMAIL - *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer*, Soc. Math. France, Astérisque n° 9(1973).

[13] M. MÉTIVIER, J. PELLAUMAIL - Stochastic Integration, Academic Press, New York, 1979.

[14] A.U. KUSSMAUL - Stochastic integration and generalized martingales, Research Notes in Math. n° 11, Pitman (Londres), 1977.

[15] M. YOR - *Quelques interactions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques*, Sém. Th. du Potentiel n° 4(1979), Lecture Notes in Math. 713, 264-281.

[16] K. BITCHELER - *Stochastic integration and* L^p*-theory of semimartingales*, Annals of Proba. 9(1980), n° 1, 49-89.

[17] C. DELLACHERIE - *Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique*, Stochastic Processes and their Applications 10(1980), 115-144.

[18] P.A. MEYER - *Caractérisation des semi-martingales, d'après Dellacherie*, Sém. Proba. XIII, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 721(1979), 620-623.

[19] K. DAMBIS - *On the decomposition of continuous sub-martingales*, Teo. Verojatnost. 10(1965), 438-448.

[20] L. DUBINS, G. SCHWARZ - *On continuous martingales*, Proc. Nat. Acad. USA, 53(1965), 913-916.

[21] F. KNIGHT - *A reduction of continuous square-integrable martingales to brownian motion*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 190(1971).

[22] K. ITÔ - *Multiple Wiener integral*, J. Math. Soc. Japan 3(1951), 157-169.

[23] C. DELLACHERIE - *Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson*, Sém. Proba. VIII, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 381(1974).

[24] J. JACOD - Calcul stochastique et problèmes de martingales, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 714(1979).

[25] A.M. GARSIA - Martingale inequalities, Seminar Notes on Recent Progress, Benjamin, 1973.

[26] J. NEVEU - Martingales à temps discret, Masson, 1972.

[27] H.P. McKEAN - Stochastic integrals, Academic Press, 1969.

[28] H.P. McKEAN - *Brownian local times*, Adv. in Math. 10(1975), 91-111.

[29] D. RAY - *Sojourn times of diffusion processes*, Illinois J. Math. 7(1963), 615-630

[30] F.B. KNIGHT - *Random walks and the sojourn density process of brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. 109(1963), 56-86.

[31] J. AZÉMA, M. YOR - *Une solution simple au problème de Skorokhod*, Sém. Proba. XIII, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 721(1979).

[32] D. KENNEDY - *Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues*, in : Stochastic processes and their applications, 4 (1976), 261-269.

[33] T. JEULIN, M. YOR - *Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien*, Sém. Proba. XV, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 850(1981).

[34] J.M. BISMUT - *Mécanique aléatoire*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 866(1981).

[35] N. IKEDA, S. MANABE - *Integral of differential forms along the path of diffusion processes*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15(1979), 827-852.

[36] R.L. STRATONOVITCH - Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control, Amer. Elsevier, New York, 1968.

[37] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN - *Diffusion processes with continuous coefficients, I, II*, Comm. Pure Appl. Math. 22(1969), 345-400, 479-530.

[38] T. YAMADA, S. WATANABE - *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 155-167.

[39] K. ITÔ - *On stochastic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc. 4(1951).

[40] S. NAKAO - *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations*, Osaka J. Math. 9(1972), 513-518.

[41] D. WILLIAMS - *"To begin at the beginning..."*, in : "Stochastic Integrals", Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 851(1981).

[42] J.H. VAN SCHUPPEN, E. WONG - *Transformations of local martingales under a change of law*, Ann. Prob. 2(1974), 879-888.

[43] I.V. GIRSANOV - *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitutions of measures*, Teo. Ver. Pim 5(1960).

[44] M. YOR - *Loi de l'indice du lacet brownien et distribution de Hartman-Watson*, Zeitschrift für Wahr. 53(1980), 71-95.

[45] J. PITMAN, M. YOR - *Sur une décomposition des ponts de Bessel*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 923(1982), 276-285.

[46] H. DOSS - *Sur une résolution stochastique de l'équation de Schrödinger à coefficients analytiques*, Comm. Math. Phys. 73(1980), 247-264.

[47] K. ITÔ - *Poisson point processes attached to Markov processes*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III, 225-239, Univ. California Press, Berkeley, 1972.

[48] D. WILLIAMS - Diffusions, Markov processes, and Martingales, J. Wiley, 1979.

[49] L.C.G. ROGERS - *Williams' characterisation of the brownian excursion law : proof and applications*, Sém. Proba. XV, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 850(1981).

[50] K. ITÔ - *Extension of stochastic integrals*, Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto, (1976), 95-109.

[51] T. JEULIN - Semi-martingales et grossissement d'une filtration, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 833, 1980.

[52] M.T. BARLOW - *Study of a filtration expanded to include an honest time*, Zeitschrift für Wahr. 44(1978), 307-323.

[53] T. JEULIN, M. YOR - *Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus*, Ann. Scient. ENS, 4e série, 11(1978), 429-443.

[54] Ch. YOEURP - Thèse d'Etat, Univ. P. et M. Curie, 1982.

[55] D. WILLIAMS - *Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I*, Proc. London Math. Soc. (3), 28(1974), 738-768.

[56] J.W. PITMAN - *One-dimensional brownian motion and the three-dimensional Bessel process*, Adv. Appl. Prob. 7(1975), 511-526.

[57] T. JEULIN - *Un théorème de J.W. Pitman*, Sém. Proba. XIII, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 721(1979), 521-532.

[58] L.C.G. ROGERS, J.W. PITMAN - *Markov functions*, Annals of Prob. 9 (4)(1981), 573-582.

[59] N. IKEDA, S. WATANABE - Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland-Kodansha, 1981.

[60] E. NELSON - *Quantum fields and Markoff fields*, Amer. Math. J., (1971).

[61] J. NEVEU - *Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien*, Ann. IHP, 12 (2)(1976), 105-109.

[62] C. BORELL - *Convexity in Gauss space*, in : Aspects statistiques et aspects physiques des processus gaussiens (Colloques internationaux du CNRS), 1981, 27-37.

[63] P.A. MEYER - *Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley*, Sém. Proba. X, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 511(1976).

[64] N.Th. VAROPOULOS - *Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory*, J. Funct. Anal. 38(1980), 25-60.

[65] P. MALLIAVIN - *Stochastic Calculus of Variation and hypoelliptic operators*, Proc. of Int. Symp. SDE (Kyoto 1976), Tokyo (1978).

[66] D.W. STROOCK - *The Malliavin Calculus and its Application to second order parabolic differential equations : Part I*, Math. Systems Theory 14 (1981), 25-65.

[67] J.M. BISMUT - *Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions*, Zeitschrift für Wahr. 56(1981), 469-505.

[68] A.V. SKOROKHOD - Integration in Hilbert space, Springer-Verlag, 1974.

[69] F.B. KNIGHT - Essentials of brownian motion and diffusion, Amer. Math. Soc., Maths Surveys 18(1981).

[70] K. ITÔ, H.P. McKEAN - Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965.

Références ajoutées sur épreuves :

[71] E. PERKINS - *Local Time is a semi-martingale*, Zeitschrift für Wahr. 60(1982), 79-117.

[72] K.L. CHUNG - *Excursions in Brownian motion*, Ark. Math. 14(1976), 155-177.

[73] J. AZÉMA - *Quelques applications de la théorie générale des processus I*, Invent. Math. 18(1972), 293-336.

[74] R. FEFFERMAN, R.F. GUNDY, M. SILVERSTEIN, E. STEIN - *Inequalities for Ratios of Functionals of Harmonic Functions*, à paraître.

Marc YOR
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Laboratoire de Calcul des Probabilités
Tour 56-66
4 place Jussieu
F-75230 PARIS CEDEX 05