T. A. SPRINGER

Quelques applications de la cohomologie d'intersection

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 589, p. 249-273
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__249_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 589 Février 1982

QUELQUES APPLICATIONS DE LA COHOMOLOGIE D'INTERSECTION

par T.A. Springer

La cohomologie d'intersection s'est avérée un outil très utile (peut-être même indispensable) pour l'étude de certaines questions algébriques. Dans cet exposé on discutera quelques-unes de ces questions.

Aux nos. 1 et 2 on introduit les polynômes de Kazhdan-Lusztig [26] et on montre comment ils entrent dans la description de la cohomologie d'intersection des variétés de Schubert. La méthode esquissée pour obtenir les résultats de Kazhdan-Lusztig [27] est dûe à MacPherson.

Le no. 3 contient des résultats autour des démonstrations de la conjecture de Kazhdan-Lusztig [26, 1.5] sur les multiplicités dans les suites de Jordan-Hölder de certains modules de Verma. Les démonstrations en question sont dûes à Beilinson-Bernstein (indiquée dans [2]) et Brylinski-Kashiwara [11]. Ici l'analyse apparaît, à savoir la théorie des systèmes holonomes à singularités régulières.

Au no. 4 on parlera de la construction de représentations d'un groupe de Weyl , d'après Lusztig [35 , no.3] et Borho-MacPherson [6] .

Il y a beaucoup plus d'applications algébriques de la cohomologie d'intersection, quelques-unes sont mentionnées en cours de route. Mais je ne prétends pas avoir donné une liste complète. Par exemple, j'ai passé sous silence les applications faites par Lusztig dans la théorie des représentations de groupes de Chevalley finis (voir [37] et [38]).

Dans cet exposé seule interviendra la cohomologie d'intersection de variétés algébriques complexes, le plus souvent à coefficients rationnels (ou basée sur un système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels). C'est-à-dire qu'on ne parlera pas de cohomologie ℓ-adique des variétés sur un corps fini. On se reportera à l'exposé de Brylinski [10] pour les résultats fondamentaux sur la cohomologie d'intersection. Nous utiliserons les notations de [10]. La normalisation des complexes $\underline{IC}^{\cdot}(\ )$ est comme dans [loc.cit., §2].

Je tiens à remercier J.-L. Brylinski, pour les informations qu'il m'a fournies et pour ses commentaires.

1. ALGÈBRES DE HECKE ET POLYNÔMES DE KAZHDAN-LUSZTIG

1.1. Soit (W,S) un groupe de Coxeter [7, Ch. IV, §1, no.3] . Rappelons que cela signifie que S est un ensemble générateur de W et que W admet une présentation $s^2 = 1$, $(ss')^{m(s,s')} = 1$, où $s,s' \in S$. Nous supposerons S fini.

Soit $\underline{s} = (s_1,\dots,s_q)$ une décomposition réduite de $w \in W$. Donc $w = s_1\dots s_q$ et $q = \ell(w)$ est la longueur de w par rapport à S. Soit $w' \in W$. On écrit $w' \leqslant w$ s'il existe une sous-suite $\underline{s}' = (s'_1,\dots,s'_r)$ de $\underline{s}$ telle que $w' = s'_1\dots s'_r$. Ceci définit une relation d'ordre sur W, *l'ordre de Bruhat* (voir par example [14] pour ses propriétés). Il est clair que si $w' \leqslant w$ on a $\ell(w') \leqslant \ell(w)$.

L'algèbre de Hecke $H = H(W)$ est l'algèbre sur l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ ayant une base $(e_w)_{w\in W}$ avec les règles de multiplication

$$(1)\qquad \begin{cases} e_s e_w = e_{sw} & \text{si } \ell(sw) > \ell(w), \\ e_s e_w = (t^2-1)e_w + t^2 e_{sw} & \text{si } \ell(sw) < \ell(w). \end{cases}$$

Si $\underline{s} = (s_1,\dots,s_q)$ est une décomposition réduite de w, il s'ensuit que

$$(2)\qquad e_w = e_{s_1}\dots e_{s_q}.$$

On constate que (1) détermine la structure d'algèbre de H[7, Ch.IV, §2, ex. 23].

L'algèbre introduite ci-dessus est l'algèbre de Hecke "générique". Les algèbres "specialisées" où t^2 est une puissance d'un nombre premier interviennent dans la théorie des représentations des groupes de Chevalley finis (W étant une groupe de Weyl). Pour $t^2 = 1$ on obtient l'algèbre $\mathbb{Z}[W]$.

Il s'ensuit de (1) et (2) que les e_w sont invertibles et qu'il existe un automorphisme involutif i de H qui prolonge l'automorphisme $t \mapsto t^{-1}$ de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ avec $i(e_w) = e^{-1}_{w^{-1}}$. On notera que $i(e_s+1) = t^{-2}(e_s+1)$ $(s \in S)$.

1.2. THÉORÈME. *Pour tout* $w \in W$ *il existe un élément unique* $c_w \in H$ *avec les propriétés suivantes :*

(a) $i(c_w) = c_w$,

(b) $c_w = t^{-\ell(w)} \sum_{x\leqslant w} P_{x,w}(t^2)e_x$,

où $P_{w,w} = 1$ *et où* $P_{x,w}$ *est un polynôme à coefficients entiers de degré au plus* $\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$ *si* $x < w$.

Les $P_{x,w}$ sont les *polynômes de Kazhdan-Lusztig*, introduits dans [26] , l'élément c_w correspond à l'élément c'_w de [loc. cit.,p.166]).

La démonstration du théorème de [loc.cit.] est élémentaire, on va l'esquisser.

1.3. LEMME. *On a* $e_{w^{-1}}^{-1} = t^{-2\ell(w)} \sum_{x \leqslant w} R_{x,w}(t^2)e_x$, *où* $R_{x,w}$ *est un polynôme à coefficients entiers de degré* $\ell(w)-\ell(x)$ (*si* $x \leqslant w$).

Ceci résulte facilement de (1), par une induction sur $\ell(w)$.

Démontrons maintenant l'unicité des c_w. Au lieu de (b) on supposera seulement que $c_w = t^{-\ell(w)} \sum_{x \leqslant w} Q_{x,w}(t)e_x$, où $Q_{x,w}(x < w)$ est un polynôme de degré $\leqslant \ell(w) - \ell(x)-1$, avec $Q_{w,w} = 1$. En utilisant le lemme on voit que (a) entraîne

$$t^{\ell(x)-\ell(w)}Q_{x,w}(t) - t^{-\ell(x)+\ell(w)}Q_{x,w}(t^{-1}) = \sum_{x < y \leqslant w} t^{\ell(w)+\ell(x)-2\ell(y)}R_{x,y}(t)Q_{y,w}(t).$$

Si les $Q_{y,w}$ avec $x < y \leqslant w$ sont connus, cette relation determine $Q_{x,w}$ (comme $t^{\ell(x)-\ell(w)}Q_{x,w}(t)$ est un polynôme en t^{-1} sans terme constant).
L'existence se démontre aussi par induction sur $\ell(w)$. Supposons c_x défini pour tout x avec $\ell(x) < \ell(w)$. On désigne par $\mu(x,y)$ le coefficient de $t^{\ell(y)-\ell(x)-1}$ dans $P_{x,y}(t^2)(x \leqslant y < w)$. Soit $s \in S$ tel que $\ell(sw) < \ell(w)$. On pose

$$c_w = t^{-1}(e_s+1)c_{sw} - \sum_{\substack{x < sw \\ sx < x}} \mu(x,sw)c_x,$$

et on constate par un calcul direct que c_w satisfait à (a) et (b).

1.4. Le calcul explicit des polynômes de Kazhdan-Lusztig pour un groupe W donné (qui n'est pas trop trivial), basé sur le procédéde de démonstration du théorème est incommode. On trouve quelques exemples dans [17, no.5].
Dans le cas du groupe symétrique S_n, Lascoux et Schützenberger ont donné une description combinatoire des $P_{x,w}$ dans certains cas [32].

1.5. Si $x < w$ on dénote par $\mu(x,w)$ la coefficient de $t^{\ell(w)-\ell(x)-1}$ dans $P_{x,w}(t^2)$. Si $x > w$ on pose $\mu(x,w) = \mu(w,x)$. La démonstration du théorème 1.2 montre que

$$(2) \quad \begin{cases} c_s c_w = c_{sw} + \sum_{\substack{x < w \\ sx < x}} \mu(x,w)c_x & \text{si} \quad sw > w, \\ c_s c_w = (t+t^{-1})c_w & \text{si} \quad sw < w \end{cases}$$

(on observera que $c_s = t^{-1}(e_s+1)$).
Posons $\mathcal{L}(w) = \{s \in s \mid sw < w\}$ et soit $\leqslant_L$ la relation de préordre sur W déterminé par les relations "élémentaires" suivantes :

$$x <_L w \text{ si (a) } x < w \text{ ou } w < x \text{ et } \mu(x,w) \neq 0, \text{ (b) } \mathcal{L}(x) \not\subset \mathcal{L}(w).$$

La relation de préordre $\leqslant_R$ est définie par $x \leqslant_R w$ si $x^{-1} \leqslant_L w^{-1}$ et $\leqslant_{LR}$ est la relation de préordre engendré par $\leqslant_L$ et $\leqslant_R$.
Il résulte facilement des définitions, utilisant (2), que pour tout $w \in W$ les c_x avec $x \leqslant_L w$ (resp. $x \leqslant_L w$, $x \leqslant_{LR} w$) engendrent un ideal à gauche (resp. à droite, bilatère) de H (voir [26,p.171]. Soit $\sim_L, \ldots$ la relation d'equivalence définie par la relation de préordre $\leqslant_L, \ldots$ (donc $x \sim_L w$ si $x \leqslant_L w$ et $w \leqslant_L x$). Les classes d'équivalence correspondantes sont les cellules à gauche,... de W.
Si X est une cellule à gauche désignons par J_X l'idéal à gauche engendré par les c_x avex $x \leqslant_L w$ pour un $w \in X$ et J'_X celui engendré par les c_x avec $x <_L w$ (définitions similaires dans les autres cas).
Si $W = S_n$, Kazhdan et Lusztig démontrent que les représentations de H dans les espaces vectoriels $J_X/J'_X \otimes_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]} \mathbb{Q}(t)$ sont absolûment irréductibles, et qu'on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles [26, th. 1.4].
Dans [34] Lusztig utilise les cellules bilatères de H pour compléter les résultats de Benson et Curtis [3]. Il y démontre que dans le cas d'un groupe de Weyl, l'algèbre $H \otimes \mathbb{Q}(t)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Q}(t)[W]$ (plus précisément, Lusztig décrit un isomorphisme canonique). Du reste, la démonstration de [34] est loin d'être élémentaire : elle utilise des résultats sur les idéaux primitifs des algèbres enveloppantes et le théorème 3.18 ci-dessous.
Lusztig conjecture [33, p.317] que dans le cas d'un groupe de Weyl affine il y a une relation entre les cellules bilatères et les classes unipotentes du groupe de Lie correspondant.

2. COHOMOLOGIE D'INTERSECTION DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT

2.1. Soit G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{C}$ qui est semi-simple, connexe et simplement connexe. Soit B un groupe de Borel de G, T un tore maximal de B et U la partie unipotente de B. On dénotera par $\mathfrak{g}$,... l'algèbre de Lie de G,... .
Soit N normalisateur de T et $W = N/T$ le groupe de Weyl. Le groupe de Borel B détermine un ensemble générateur S de W tel que (W,S) soit un groupe de Coxeter. On dénote par w_0 l'élément de W de longueur maximale, par rapport à S. On va donner une interprétation des polynômes de Kazhdan-Lusztig de W.

2.2. Soit $X = G/B$ la variété des drapeaux de G. C'est une variété algébrique complexe, qui est lisse et projective, sur laquelle G opère transitivement. Si $w \in W$ on pose $X_w = BwB$, c'est une *cellule de Bruhat*. Son adhérence $\overline{X}_w$ est une *variété de Schubert*, c'est une variété irréductible de dimension $\ell(w)$.

2.3. LEMME. (i) *Pour* $x,w \in W$ *on a* $X_x \subset \overline{X}_w$ *si et seulement si* $x \leqslant w$;
(ii) *Soit* $x < w$. *L'application* $(uxB,gB) \mapsto ugB$ *définit un isomorphisme* T-*équivariant de* $X_x \times (w_0 X_{w_0 x} \cap \overline{X}_w)$ *sur un voisinage ouvert de* X_x *dans* $\overline{X}_w$.

(i) est un résultat de Chevalley (voir p.ex.[48 p.224]) et (ii) découle des propriétés de la décomposition de Bruhat [27, 1.4].

Il s'ensuit de 2.1 que $(X_x)_{x \leqslant w}$ est une stratification de $\overline{X}_w$ avec de bonnes propriétés (par exemple celles de [18, §1.1]). En particulier c'est une stratification de Whitney au sens de [51]. Observons que les strates X_x sont simplement connexes (étant des espaces affines). Soit $\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w) \in D^b(\overline{X}_w)$ le complexe de la cohomologie d'intersection, avec $\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w) \simeq \mathbb{Q}[\ell(w)]$ sur un ouvert dense. Du fait que G opère transitivement sur X on tire que le faisceau de cohomologie $\underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w))$ est localement constant sur les strates X_x, donc constant sur X_x. On dénote par $\underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w))_x$ le fibre en un point de X_x.
Plutôt que de travailler avec les variétés de Schubert nous travaillerons avec les orbites de G dans X × X. Il s'ensuit du lemme de Bruhat que toute orbite contient un seul point (B,wB), avec $w \in W$. Nous désignons cette orbite par $O(w)$. Nous utiliserons des notation pareilles à celles introduites à la fin du paragraphe précédent.

2.4. LEMME. (i) *La projection* $pr_1 : O(w) \to X$ *est une fibration localement triviale, à fibre* X_w. *De même pour les adhérences* $\overline{O(w)}$ *et* $\overline{X}_w$;
(ii) *Si* $x \leqslant w$, $\underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O}(w))$ *est constant le long de* $O(x)$ *et on a*
$\underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O}(w))_x \simeq \underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w))_x$.

2.5. Soit $\underline{A}^{\cdot} \in D^b(X)$ un complexe de G-faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur X × X, à cohomologie constructible. Alors le faisceau de cohomologie $\underline{H}^{\cdot}(A^{\cdot})$ est constant le long de $O(w)$, on écrit $\underline{H}^{\cdot}(A^{\cdot})_w$ pour le fibre en un point de $O(w)$.
Soit H l'algèbre de Hecke de W. On définit un élément $h(\underline{A}^{\cdot}) \in H$ par

$$(1) \qquad h(\underline{A}^{\cdot}) = \sum_{w \in W} \Big(\sum_{i \geqslant 0} \dim \underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot})_w t^i \Big) e_w$$

(définition analogue pour les B-faisceaux sur X).

EXEMPLE. Soit $s \in S$. Alors $\overline{X}_s = B \cup BsB$, c'est une droite projective. De même, $\overline{O(s)} = O(s) \cup \Delta$ (Δ = la diagonale de X × X) est une sous-varieté lisse. Si $j_s : \overline{O(s)} \to X \times X$ est l'inclusion, et $\underline{C}_s^{\cdot} = j_{s,*}(\mathbb{Q})[1]$ on a $h(\underline{C}_s^{\cdot}) = 1 + e_s$.
On va maintenant définir un produit de deux complexes $\underline{A}^{\cdot}, \underline{B}^{\cdot}$ de $D^b(X \times X)$.
Considérons le diagramme de morphismes

$$\begin{array}{ccc} X\times X\times X\times X & \xleftarrow{i} & X\times X\times X \\ p_1 \searrow \quad \swarrow p_2 & & \downarrow q \\ X\times X & & X\times X \end{array}$$

où $p_1 = pr_{12}, p_2 = pr_{34}$, $i(a,b,c) = (a,b,b,c)$ et $q = pr_{13}$.

Nous posons

$$\underline{A}^{\cdot} \circ \underline{B}^{\cdot} = \mathbb{R}q_*(i^*(p_1^*\underline{A}^{\cdot} \otimes p_2^*\underline{B}^{\cdot})).$$

2.6. <u>Lemme</u> . Soit $\underline{A}^{\cdot} \in D^b(X\times X)$ <u>un complexe de</u> G-<u>faisceaux</u> tel que $\underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot}) = 0$ <u>pour</u> i <u>impair</u> (<u>resp</u>. i <u>pair</u>). <u>Soit</u> $s \in D$. Alors $\underline{A}^{\cdot}_s \circ \underline{A}$ <u>est un complexe du meme type et on a</u> $h(\underline{A}^{\cdot}_s \circ \underline{A}^{\cdot}) = (e_s+1)h(\underline{A}^{\cdot})$.

Utilisant (1) on constate par un calcul dans $\mathcal{H}$ que l'assertion résulte de la formule suivante :

$$(2)\ \begin{cases} \dim \underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot}_s \circ \underline{A}^{\cdot})_w = \dim \underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot})_{sw} + \dim \underline{H}^{i-2}(\underline{A}^{\cdot})_w & \text{si } sw < w, \\ \dim \underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot}_s \circ \underline{A}^{\cdot})_w = \dim \underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot})_w + \dim \underline{H}^{i-2}(\underline{A}^{\cdot})_{sw} & \text{si } sw > w, \end{cases}$$

pour $w \in W$.

Fixons $(a,b) \in O(w)$. Soit D la variété des $(a,c,b) \in X \times X \times X$ avec $(a,c) \in \overline{O(s)}$, c'est une droite projective. Soit $\underline{C}^{\cdot}$ la restriction de $i^*(p_1{}^*\underline{A}^{\cdot}_s \otimes p_2^*\underline{A}^{\cdot}))$ à D. Alors $\underline{H}^i(\underline{A}^{\cdot}_s \circ \underline{A}^{\cdot})$ est isomorphe à $\underline{H}^i(\underline{C}^{\cdot})$.

Si $sw < w$ il existe un seul point $c_0 \in D$ tel que $(c_0,b) \in O(sw)$, on a $(c,b) \in O(w)$ pour $c \in D - \{c_0\}$. La restriction de $\underline{C}^{\cdot}$ à $D-\{c_0\}$ est isomorphe au complexe constant $(\underline{A}^{\cdot})_w$. La première formule (2) s'obtient par un calcul sans difficulté.
Si $sw > w$ on a $(c,b) \in O(w)$ si $c \in D-\{a\}$ et la restriction de $\underline{C}^{\cdot}$ à $D-\{a\}$ est isomorphe à $(\underline{A}^{\cdot})_{sw}$, et on a une situation analogue.

Soit $\underline{s} = (s_1,\ldots,s_q)$ une décomposition réduite de $w \in W$. La *variété de Bott-Samelson* correspondante Y est la sous-variété de X^{q+1} des $(a_0,a_1,\ldots,a_q)$ tels que $(a_{i-1},a_i) \in \overline{O(s_i)}$ $(1 \leq i \leq q)$. Soit $\pi(a_0,\ldots,a_q) = (a_0,a_q)$. Alors $\pi: Y \to \overline{O(w)}$ est une résolution de $\overline{O(w)}$ [13]. Donc Y est lisse, π est un morphisme propre et la restriction de π à $\pi^{-1}(O(w))$ est un isomorphisme.

2.7. LEMME. $\underline{A}^{\cdot}_{s_1} \circ \underline{A}^{\cdot}_{s_2} \circ \ldots \circ \underline{A}^{\cdot}_{s_q} = \mathbb{R}\pi_*\mathbb{Q}$.

C'est une conséquence des définitions.
Soit $j_w : \overline{O(w)} \to X \times X$ l'inclusion. On pose $\underline{A}^{\cdot}_w = j_{w,*}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(w)}))$.

2.8. THÉORÈME. *On a* $h(\underline{A}^{\cdot}_w) = c_w$.

c_w est l'élément de $\mathcal{H}$ introduit au théorème 1.2. La variété Y étant lisse, on a $\underline{IC}^{\cdot}(Y) = \mathbb{Q}[\ell(w)]$. Le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-

Gabber [10, 3.4] implique alors que

$$\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q}[\ell(w)] = \bigoplus_{x \in W} \underline{A}^{\cdot}_x \otimes V_x,$$

où $V_x = \oplus V_{x,i}$ est un espace vectoriel gradué. Soit D le foncteur de dualité de Verdier. Comme $\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q} = \mathbb{R}\pi_! \mathbb{Q}$, $D\underline{A}^{\cdot}_x = \underline{A}^{\cdot}_x$ on a $V_{x,i} \simeq V_{x,-i}$. D'autre part $V_x = 0$ si $x \nleq w$ et $V_w = V_{w,0} = \mathbb{Q}$.
Il s'ensuit que

$$\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q}[\ell(w)]) = h(\underline{A}^{\cdot}_w) + \sum_{x < w} P_x(t)\, h(\underline{A}^{\cdot}_x), \tag{3}$$

où $P_x(t) = P_x(t^{-1})$.

D'après 2.6 et 2.7 le premier membre de (3) est

$$t^{-\ell(w)}(e_{s_1} + 1)(e_{s_2} + 1) \ldots (e_{s_q} + 1),$$

c'est un élément de H stable sous l'automorphisme i du no. 1. Supposons qu'on sait que $h(\underline{A}^{\cdot}_x) = c_x$ pour $x < w$. Il résulte alors de (3) que $i(h(\underline{A}^{\cdot}_w)) = h(\underline{A}^{\cdot}_w)$. D'une des caractérizations de $\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(w)})$ données dans [10, 1.2] on conclut que $h(\underline{A}^{\cdot}_w)$ a les propriétés (a), (b) du théorème 1.2, ce qui implique le théorème.

2.9. COROLLAIRE. *Si* W *est un groupe de Weyl, les coefficients des polynômes* $P_{x,w}$ *sont non-négatifs.*

2.10. COROLLAIRE. (i) $h(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w)) = c_w$;
(ii) $\underline{H}^i(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{X}_w))_x = 0$ *si* i *est impair.*
(utiliser 2.4 pour la première partie).

2.11. COROLLAIRE. $h(\underline{A}^{\cdot}_w \circ \underline{A}^{\cdot}_{w'}) = c_w c_{w'}$, *pour tout* $w, w' \in W$.
On a

$$\mathbb{R}\pi_*(\mathbb{Q})[\ell(w)] \circ \underline{A}^{\cdot}_{w'} = \bigoplus_{x \leqslant w} (\underline{A}^{\cdot}_x \circ \underline{A}^{\cdot}_{w'}) \otimes V_x.$$

Utilisant 2.6 et 2.7 ceci implique

$$t^{-\ell(w)}(e_{s_1}+1) \ldots (e_{s_q}+1)\, h(\underline{A}^{\cdot}_w) = h(\underline{A}^{\cdot}_w \circ \underline{A}^{\cdot}_{w'}) + \sum_{x < w} P_x(t)\, h(\underline{A}^{\cdot}_x \circ \underline{A}^{\cdot}_{w'}).$$

D'après (3) ceci égale aussi

$$h(\underline{A}^{\cdot}_w)\, h(\underline{A}^{\cdot}_{w'}) + \sum_{x < w} P_x(t)\, h(\underline{A}^{\cdot}_x)\, h(\underline{A}^{\cdot}_{w'}).$$

Le corollaire s'obtient par induction sur $\ell(w)$.

2.12. Le théorème 2.8 est dû à Kazhdan-Lusztig [27]. Leur méthode de démonstration est assez différente: ils ne travaillent pas sur $\mathbb{C}$ mais sur la clôture algébrique d'un corps fini. La démonstration esquissée ci-dessus est dûe à MacPherson (inédite).

Soit $A=\mathbb{C}[X,X^{-1}]$, l'anneau des polynômes de Laurent. D'après Bruhat-Tits, le groupe $G(A)$ des points A-rationnels de G admet une structure de système de Tits dont le groupe de Coxeter correspondant est le groupe de Weyl affine W_a défini par W. Dans [loc.cit.] Kazhdan et Lusztig indiquent une généralisation du théorème à ce cas. Ceci donne une interprétation des polynômes de Kazhdan-Lusztig dans le cas de W_a.

Soit $\tilde{W}_a$ le produit semi-direct de W avec le réseau P des poids. Le groupe $\tilde{W}_a$ contient W_a. Soit P_{dom} le cône des poids dominants. Dans [36] Lusztig définit des polynômes $P_{x,w}$ pour $\tilde{W}_a$. Il y associe à $\lambda \in P_{dom}$ un élément $n_\lambda \in \tilde{W}_a$ et il donne une interprétation des P_{n_λ,n_μ}.

2.13. PROPOSITION. *La famille* $\mathcal{F}$ *des complexes de la forme* $\bigoplus_{w\in W} \underline{A}^\cdot_w \otimes V_w$, *où les* V_w *sont des espaces vectoriels gradués, est stable sous le produit* $\circ$.

Il suffit de montrer que $\underline{A}^\cdot_w \circ \underline{A}^\cdot_x \in \mathcal{F}$, pour tout $w,x \in W$. Avec les notations du diagramme ci-dessus, on a

$$p_1^* \underline{A}^\cdot_w \otimes p_2^* \underline{A}^\cdot_x = j_* \underline{IC}^\cdot(\overline{O(w)} \times \overline{O(x)}),$$

j désignant l'inclusion $\overline{O(w)} \times \overline{O(x)} \to X^4$. Soit Z la variété des $(a,b,c) \in X^3$ avec $(a,b) \in \overline{O(w)}$, $(b,c) \in \overline{O(x)}$ et désignons par i_1 l'inclusion $Z \to \overline{O(w)} \times \overline{O(x)}$. On constate que les variétés $O(y) \times O(z)$ $(y,z \in W)$ sont transverses à $X \times \Delta \times X$. D'après un résultat de Goresky-MacPherson [18,5.4.1] il s'ensuit que $i_1^*(\underline{IC}^\cdot(\overline{O(w)} \times \overline{O(x)})) = \underline{IC}^\cdot(Z)[d]$, où $d = \dim X$. Par conséquent $\underline{A}^\cdot_w \circ \underline{A}^\cdot_x = Rq_*(\underline{IC}^\cdot(Z))$, et la proposition résulte du théorème de décomposition [10,3.2.4].

2.14. COROLLAIRE. *On a* $c_w c_x = \sum_{y\in W} a_{w,x;y} c_y$, *où* $a_{w,x;y} \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ *a coefficients non-négatifs.*

2.15. La proposition précédente implique que (dans le cas d'un groupe de Weyl) l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ peut-être décrite de façon purement topologique. Les détails de la description sont laissés au lecteur. Cette description de $\mathcal{H}$, en topologie "classique", est dûe à MacPherson. Une description différente, en cohomologie ℓ-adique sur un corps fini, a été donnée (indépendemment l'un de l'autre) par Beilinson, par Brylinski et par Lusztig-Vogan [39,no.5]. Dans cette description, on travaille avec des G-faisceaux ponctuellement purs sur $X \times X$ et la multiplication dans H avec l'indéterminé t provient d'un twist de Tate (au lieu d'un décalage). Dans [loc.cit.] Lusztig et Vogan considèrent une situation plus générale, rencontrée dans la theorie des représentations de groupes de Lie réels [52], et ils démontrent une généralisation de 2.8.

3. $\mathcal{D}_X$-MODULES ET MODULES DE VERMA

3.1. Soit X comme au no.2. Nous identifierons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à G qui sont invariants à droite. Alors l'espace tangent T_xX en $x \in G$ s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{b}$ (Ad désignant la représentation adjointe). Soit $\mathfrak{g}^*$ le dual vectoriel de $\mathfrak{g}$ et Ad^* la contragrédiente de Ad. Les points du fibré cotangent T^*X s'identifient aux paires (x,ξ) avec $x \in X$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$ orthogonal à $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{b}$. Soit $\pi : T^*X \to \mathfrak{g}^*$ la projection sur le second facteur et posons $N = \mathrm{im}\ \pi$. Si on identifie $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$ via la forme de Killing, N s'identifie à l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Par conséquent, N est un cône fermé dans $\mathfrak{g}^*$.
L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$.Soit $I \subset S(\mathfrak{g})$ l'idéal engendré par les éléments homogènes G-invariants non-constants.

3.2. THÉORÈME. (i) N *est une variété algébrique affine, irréductible, normale, de dimension* 2dim X;

(ii) I *est l'idéal des fonctions de* $S(\mathfrak{g})$ *qui s'annulent sur* N;

(iii) $\pi : T^*X \to N$ *est une résolution des singularités de* N;

(iv) *On a* $\pi_*\mathcal{O}_{T^*X} = \mathcal{O}_N$, $R^i\pi_*\mathcal{O}_{T^*X} = 0 \quad (i > 0)$.

(i) et (ii) sont dûs à Kostant [31].Pour(iii) on peut se reporter à [45,p.43-44]. La première partie de (iv) résulte du théorème de connexion de Zariski. La seconde partie de (iv) à été démontrée par Hesselink [21]. Voici une démonstration rapide, dûe à R. Elkik (voir [5, p.102]). Comme T^*X a une structure symplectique, le faisceau ω_{T^*X} des formes différentielles holomorphes de degré maximal est isomorphe à $\mathcal{O}_{T^*X}$. La nullité des $R^i\pi_*\mathcal{O}_X$ pour $i > 0$ résulte alors d'un théorème de Grauert-Riemenschneider [19].

REMARQUE. (iv) montre que π est une résolution rationelle au sens de Kempf [30]. Le fait qu'on travaille sur $\mathbb{C}$ est essentiel pour la démonstration. J'ignore si la seconde partie de (iv) est vraie en caractéristique $p > 0$.

Considérons maintenant la projection $\rho : T^*X \to X$. La variété T^*X est affine sur X, définie par le faisceau d'anneaux $S(\mathcal{T}_X)$, ou $\mathcal{T}_X$ est le faisceau tangent de X. C'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres.

3.3. COROLLAIRE. $H^0(X,S(\mathcal{T}_X)^n) \simeq (S(\mathfrak{g})/I)^n$, $H^i(X,S(\mathcal{T}_X)^n) = 0 \quad (i > 0)$.
On a désigné par $(\ )^n$ parties homogènes de degré n. Comme $\rho_*\mathcal{O}_{T^*X} = \mathcal{O}_X$, $R^i\rho_*\mathcal{O}_{T^*X} = 0$ $(i > 0)$, 3.3 résulte de 3.2 (iv).

Soit maintenant $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'opérateurs différentiels d'ordre fini sur X. C'est un faisceau d'anneaux non-commutatifs qui a $\mathcal{O}_X$ comme sous-faisceau. Il est quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module (à gauche ou à droite). Pour $u \in \mathfrak{g}$ soit $\phi(u) \in \Gamma(X;\mathcal{D}_X)$ le champ de vecteurs qu'il définit (rappelons qu'on à identifié $\mathfrak{g}$ aux champs de vecteurs sur G qui sont invariants à droite). Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Alors ϕ s'étend à un homomorphisme $U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X;\mathcal{D}_X)$ aussi noté ϕ. Soit $J \subset U(\mathfrak{g})$ l'idéal bilatère engendré par les éléments G-invariants dans $U(\mathfrak{g})$ et posons $R = U(\mathfrak{g})/J$.

3.4. PROPOSITION. (i) $\phi(J) = 0$; (ii) ϕ *définit un isomorphisme* $R \xrightarrow{\sim} \Gamma(X;\mathcal{D}_X)$.

Soit $(\mathcal{D}_X(m))$ la filtration de $\mathcal{D}_X$ par l'ordre. On $\mathcal{D}_X(0) = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{D}_X(m)/\mathcal{D}_X(m-1) \simeq S^m(\mathcal{T}_X)$ $(m > 0)$. Soit $U(m) \subset U(\mathfrak{g})$ le sous-espace engendré par les produits $u_1 \ldots u_i$ avec $u_h \in \mathfrak{g}$, $i \leq m$. Alors $(U(m))$ est une filtration de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ et $U(0) = \mathbb{C}$, $U(m)/U(m-1) \simeq S^m(\mathfrak{g})$ $(m > 0)$. En passant aux gradués associés 3.4 se déduit de 3.2(ii) et 3.3.
La proposition est dûe à Brylinski [9]. La démonstration esquissée ci-dessus est de Beilinson-Bernstein (inédite).

3.5. THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de* $\mathcal{D}_X$*-modules à gauche qui est quasi-cohérent en tant que* $\mathcal{O}_X$*-module. Alors* $\mathcal{F}$ *est engendré par ses sections globales et* $H^i(X;\mathcal{F}) = 0$ *pour* $i > 0$.

Un résultat plus général est démontré par Beilinson et Bernstein dans [2]. La démonstration de [loc.cit] est assez simple. Elle utilise la technique de tensorisation avec un G-module de dimension finie.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules $\mathcal{F}$ du théorème et $\mathcal{C}'$ la catégorie des R-modules à gauche.

3.6. COROLLAIRE. $\Gamma : \mathcal{F} \mapsto \Gamma(X;\mathcal{F})$ *définit une équivalence de catégories de* $\mathcal{C}$ *avec* $\mathcal{C}'$*. Le foncteur inverse est* $\Delta : M \mapsto \mathcal{D}_X \otimes_R M$.

Cela résulte de généralités sur les catégories abéliennes. On observera que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_X \otimes_R M, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(M, \Gamma(X;\mathcal{F}))$.

Les faisceaux de $\mathcal{C}$ sont des faisceaux de $U(\mathfrak{g})$-modules. Comme l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{b})$ de l'algèbre de Lie du groupe de Borel B est une sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$, ce sont aussi des faisceaux de $U(\mathfrak{b})$-modules.

Soit $\mathcal{C}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ définie par les faisceaux $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ avec les propriétés suivantes : (a) $\mathcal{M}$ est cohérent et admet une bonne filtration $\mathcal{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_j$, qui est $U(\mathfrak{b})$-stable, (b) $\mathcal{M}$ est annulé par un idéal de codimension finie de $U(\mathfrak{b})$. Rappelons la notion de bonne filtration (voir [25]): c'est une filtration croissante du faisceau cohérent $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents $\mathcal{M}_m$ telle que $\mathcal{D}_X(m)\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{m+n}$ avec egalité localement si n est assez grand.
D'autre part, soit $\mathcal{C}_0'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}'$ des R-modules M de type fini tels que dim $U(\mathfrak{b})m$ soit fini pour tout $m \in M$.

3.7. COROLLAIRE. Γ *définit une équivalence de catégories de* $\mathcal{C}_0$ *avec* $\mathcal{C}_0'$.

On sait que les modules de $\mathcal{C}_0'$ ont une suite de composition finie (voir la démonstration d'un résultat voisin dans [24, Kap.1]).
Introduisons maintenant les *modules de Verma*. Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Alors λ définit des réprésentations de dimension 1 de $\mathfrak{t}$ et de $\mathfrak{b}$ (parce que $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}/[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$). Désignons par $\mathbb{C}_\lambda$ le $U(\mathfrak{b})$-module correspondant et posons $M_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$. C'est le module de Verma associé à λ.
Soit Φ le système de racines de (G,T) et soit Φ^+ l'ensemble des racines positives défini par B. Posons $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Les modules de Verma qui vont intervenir ici sont ceux avec $\lambda = -w(\rho)-\rho$ ($w \in W$). On pose $M_w = M_{-w(\rho)-\rho}$. On sait que l'ideal J annule M_w [loc.cit, p.28], par conséquent $M_w \in \mathcal{C}_0'$. Tout M a un sous-module maximal unique, soit L_λ le quotient simple correspondant. On pose $L_w = L_{-w(\rho)-\rho}$, alors $L_w \in \mathcal{C}_0'$.
Dans la suite on va identifier les faisceaux $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ de $\mathcal{C}_0$ qui correspondent à M_w, L_w d'après 3.7.

D'abord un résultat sur la connection avec les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. On renvoie à [10, §4] pour une discussion des propriétés des modules holonomes. Pour toute sous-variété lisse localement fermée Y de X on désigne par $T_Y X$ le fibré conormal de Y. C'est une sous-variété de T*X.

3.8. THÉORÈME. *Tout* $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_0$ *est un* $\mathcal{D}_X$*-module holonome à singularités régulières, dont la variété caractéristique est contenue dans* $\bigcup_{w \in W} T^*_{X_w} X$.
C'est démontré dans [11]. Un résultat plus général est annoncé dans [2]. Utilisant 3.7 la démonstration de [11] se simplifie un peu. Elle procède ainsi. Par un dévissage on se ramène d'abord au cas où $\mathcal{M} = \mathcal{M}_w = \mathcal{D}_X \otimes M_w = \mathcal{D}_X/A$, où A est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $\phi(u)$ ($u \in \mathfrak{u}$) et $\phi(t) + \langle t, w(\rho) + \rho \rangle$ ($t \in \mathfrak{t}$), où $\langle\, ,\rangle$ définit la dualité.

Utilisons la bonne filtration de $\mathcal{M}$ déduite de la filtration de $U(\mathfrak{g})$ décrite ci-dessus. Si $(x,\xi) \in T^*X$ est dans la variété caractéristique $Ch(\mathcal{M})$ on doit avoir, en particulier, que $\xi \in \mathfrak{g}^*$ est orthogonal à $\mathfrak{b}$, donc $(x,\xi) \in \pi^{-1}(\mathfrak{b}^\perp)$. Mais il est clair que $\pi^{-1}(\mathfrak{b}^\perp) = \bigcup_{w\in W} T_{X_w}^*X$, donc est de dimension $d = \dim X$. D'où la dernière assertion du théorème. On voit aussi que $\mathcal{M}$ est holonome. Le fait que $\mathcal{M}$ est à singularités régulières requiert une démonstration non-triviale, donnée (dans une situation plus générale) dans [11, appendix].

3.9. Si $M \in \mathcal{C}_0'$ et $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ on dénote par M^λ le sous-espace des $m \in M$ annulés par les éléments $(t-\langle\lambda,t\rangle)^N (t \in \mathfrak{t})$, pour un entier N. Il est facile à voir que M^λ est de dimension finie et que M est la somme directe des M^λ qui sont $\neq 0$. On définit le caractère de M par

$$\mathrm{car}(M) = \sum_\lambda (\dim M^\lambda)e(\lambda),$$

où $e(\lambda)$ est une exponentielle formelle (un élément de l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathfrak{t}^*]$). Soit encore $M \in \mathcal{C}_0'$. On dénote par M^* le sous-espace du dual algébrique de M des fonctions linéaires qui sont nulles sur presque tous les sous-espaces M^λ. Soit τ l'automorphisme unique de $\mathfrak{g}$ qui stabilise $\mathfrak{t}$ et induit l'application $\alpha \mapsto -\alpha$ du système de racines Φ. On définit une structure de $U(\mathfrak{g})$-module sur M^* de façon que

$$(af)(m) = -f(\tau(a)m),$$

si $f \in M^*$, $a \in \mathfrak{g}$, $m \in M$. Alors $M \in \mathcal{C}_0'$ et $(M^*)^* \simeq M$.
On a

$$\mathrm{car}(M_w) = \mathrm{car}(M_w^*),$$

pour tout $w \in W$.

3.10. Dans les résultats suivants on aura besoin de la cohomologie locale. Rappelons d'abord la définition de topologie générale (voir [29] ou [20, §1]). Soit X un espace topologique et Z un sous-espace localement fermé. Prenons un ouvert $V \supset Z$ tel que Z soit fermé dans V. Pour tout faisceau abélien F sur X définissons le groupe de sections à support dans Z par

$$\Gamma_Z(X;F) = \Gamma_Z(V;F|_V),$$

le second membre étant les sections à support fermé au sens habituel. C'est indépendant du choix de l'ouvert V. Le faisceau $\underline{\Gamma}_Z(F)$ est défini par le préfaisceau $U \mapsto F_{Z\cap U}(U;F|_U)$. Nous désignerons par $\underline{H}_Z^\cdot(F)$ les foncteurs dérivés. Dans la théorie des systèmes holonomes il faut utiliser la cohomologie à support "algébrique". Soit maintenant X un espace analytique complexe et Z un sous-espace localement fermé telque $\overline{Z}$ et $\overline{Z}$-Z soient analytiques. Supposons d'abord Z fermé, défini par le faisceau d'ideaux $\mathcal{J}$. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. On pose

$$\underline{\Gamma}_{[Z]}(\mathcal{F}) = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n, \mathcal{F}),$$

$$\underline{\Gamma}_{[X-Z]}(\mathcal{F}) = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}^n, \mathcal{F}).$$

Si Z est quelconque on pose

$$\underline{\Gamma}_{[Z]}(\mathcal{F}) = \underline{\Gamma}_{[Z]}\,\underline{\Gamma}_{[X-(\overline{Z}-Z)]}(\mathcal{F}).$$

On désignera par $\underline{H}^{\cdot}_{[Z]}(\mathcal{F})$ les foncteurs dérivés et par $H^{\cdot}_{[Z]}(X;\mathcal{F})$ les groupes de sections globales.
Si X est une variété algébrique, munie de la topologie de Zariski, Z un sous-espace fermé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent il existe un isomorphisme

$$(1) \qquad \underline{\Gamma}_{[Z]}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F})$$

[20,p.30] (d'où un isomorphisme analogue pour Z localement fermé). Ceci explique les définitions.

Soit X est une variété complexe et Z localement fermé comme ci-dessus. Soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'opérateurs différentiels. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}_X$-module alors $\mathcal{D}_X$ opère sur $\underline{H}^{\cdot}_{[Z]}(\mathcal{F})$. Soit Y une sous-variété lisse de X, purement de codimension ℓ. Alors $\mathcal{B}_{Y|X} = \underline{H}_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome à singularités régulières, dont la variété caractéristique est T_YX (voir[11,1.2]).
Retournons maintenant au cas où X est la variété des drapeaux.
Soit $w \in W$. Alors $\underline{H}^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(\mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{D}_X$-module et, d'après 3.6, $H^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(X;\mathcal{O}_X)$ est un R-module.

3.11. PROPOSITION, (i) $\underline{H}^i_{[X_w]}(\mathcal{O}_X) = 0$ *si* $i \neq d - \ell(w)$;

(ii) $H^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(X;\mathcal{O}_X) \in \mathcal{C}'_0$ *et* $\mathrm{car}(H^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(X;\mathcal{O}_X)) = \mathrm{car}(M_w)$.

D'après (1), la cohomologie peut se calculer en topologie de Zariski (à support "géometrique"). C'est fait par Kempf dans [29], et la proposition est contenue dans [loc.cit]. Le fait géometrique de 2.3(ii) est un ingrédient essentiel.

Soit $\mathcal{N}_w$ le $\mathcal{D}_X$-module $\underline{H}^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(\mathcal{O}_X)$ et posons $N_w = H^{d-\ell(w)}_{[X_w]}(X;\mathcal{O}_X)$.

3.12. PROPOSITION. $N_w \simeq M_w^*$.
C'est démontré dans [11,§5] de la façon suivante. On tire de 3.11 (ii) que $\mathrm{car}(N_w^*) = \mathrm{car}(M_w)$, d'où un homomorphisme non-trivial $M_w \to N_w^*$ et une suite exacte $0 \to N \to N_w \to M_w^*$. On montre [loc.cit., Cor. 5.7] que pour tout $M \in \mathcal{C}'_0$

on a $\mathrm{Supp}(\mathcal{D}_X \otimes M) \subset \cup X_{w_1}$, où w_1 parcourt les éléments de W tels que $w_1(\rho)-\rho$ soit dominé par un poids de M (dans l'ordre habituel des poids). On en déduit que $N = 0$ et l'égalité des caractères montre que $N_w \simeq M_w^*$.

3.11 et 3.12 sont des résultats du type "Borel-Weil" (voir aussi le travail cité de Kempf, en particulier [28, Th. 12.9]). La théorie des modules holonomes n'y intervient pas. Mais elle va intervenir dans les résultats suivants. On aura besoin de quelques résultats sur la dualité des modules holonomes (voir[25]).

3.13. Soit Ω la faisceau des formes différentielles holomorphes sur X de degré maximum. C'est un $\mathcal{D}_X$-module à droite. Si M est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent, alors $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ a une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite, définie par une formule à la Leibniz et $M \mapsto \Omega \otimes M$ définit une équivalence de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche et $\mathcal{D}_X$-modules à droite. Si M est un $\mathcal{D}_X$-module à droite, on dénote par M° le module à gauche correspondant.

Soit maintenant M un $\mathcal{D}_X$-module holonome à gauche. Alors

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X) = 0 \text{ si } i \neq d = \dim X,$$

et $\underline{\mathrm{Ext}}^d_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X)$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome à droite. On pose

$$M^* = \underline{\mathrm{Ext}}^d_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{D}_X)^\circ,$$

c'est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche, le *dual* de M. On a $(M^*)^* \simeq M$. Si M est à singularités régulières, c'est aussi vrai pour M^* [41].

Soit N_w comme ci-dessus.

3.14. THÉORÈME. $N_w^* \simeq \mathcal{D}_X \otimes M_w$.

Ceci identifie le $\mathcal{D}_X$-module correspondant au module de Verma M_w. La démonstration donnée dans [11, Cor.6.4] utilise le fait suivant, qui est loin d'être trivial: Si M et M' sont holonomes à singularités régulières alors

$$\mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(M',\mathcal{O}_X)$$

implique $M \simeq M'$ ("les solutions déterminent l'équation différentielle", voir [10, 4.2]). On a

$$\mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(N_w^*,\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,N_w),$$

et le second membre égale

$$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathcal{O}_X))[d-\ell(w)] = \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X))[d-\ell(w)].$$

Ici la cohomologie à support géometrique apparaît, d'après un résultat général [11, 1.4].

Comme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ (faisceau constant, en degré 0) on voit finalement que

$$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(N^*_w,\mathcal{O}_X) = \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathbb{C})[d-\ell(w)].$$

On démontre dans [loc.cit] que le second membre est aussi égal à $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X \otimes M_w,\mathcal{O}_X)$, d'où 3.14 d'après la remarque au début.

C'est déduit du résultat suivant [loc.cit., Prop. 6.3].

3.15. LEMME. $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{D}_X \otimes M_w) = \mathbb{C}_{X_w}[-d+\ell(w)]$.

$\mathbb{C}_{X_w}$ est le faisceau qui est constant égal à $\mathbb{C}$ sur X_w et 0 en dehors de X_w.

Maintenant nous allons identifier les modules holonomes correspondant aux R-modules simples L_w. Soient X une variété analytique complexe irreductible et Y une sous-variété , fermée de pure codimension. Dans [11, §8] les auteurs construisent un $\mathcal{D}_X$-module holonome à singularités régulières $\mathcal{L}(Y,X)$, tel que

(2) $$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}(Y,X)) = i_*(\underline{IC}^\cdot(Y)[-\dim X],$$

où $i : Y \to X$ est l'inclusion (voir [loc.cit., Th.8.6]).

En outre, $\mathcal{L}(Y,X)$ est un objet simple de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes à singularités régulières [loc.cit.,p.401].

Soit maintenant X la variété des drapeaux. Soit $w \in W$ et prenons $Y = \overline{X_w}$.

La construction donnée dans [loc.cit, p. 406] montre que $\mathcal{L}_w = \mathcal{L}(\overline{X}_w,X)$ est un quotient de $\mathcal{M}_w = \mathcal{D}_X \otimes M_w$.

Ceci implique

3.16. THÉORÈME. $\mathcal{L}_w \simeq \mathcal{D}_X \otimes_R L_w$.

Soit $K(\mathcal{C}_0)$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}_0$, soit $[\mathcal{M}] \in K(\mathcal{C}_0)$ l'élément défini par $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_0$. Notations analogues pour $\mathcal{C}'_0$.

Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_0$ on pose

$$\chi_w(\mathcal{M}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim \underline{H}^i(\mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}))_w,$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe de faisceaux $\mathbb{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M})$ aux points de X_w. Il résulte de 3.15 que la définition a un sens. La propriété suivante résulte aussi de 3.15.

3.17. LEMME. *Pour tout* $M \in \mathcal{C}_0$ *on a*

$$[M] = \sum_{w \in W} (-1)^{d-\ell(w)} \chi_w(M) [M_w].$$

3.18. THÉORÈME. $[L_w] = \sum_{x \leqslant w} (-1)^{\ell(w)-\ell(x)} P_{x,w}(1)[M_x]$. .

$P_{x,w}$ est le polynôme de Kazhdan-Lusztig introduit au no.1 (pour le groupe de Weyl W). C'est une conséquence de 3.11, la formule (2) ci-dessus et 2.10. On observa que 3.16 et 3.17 sont des conséquences triviales de ce qui précède.

La formule du théorème est équivalente à

$$(3) \qquad [M_w] = \sum_{x \leqslant w} P_{w_0 w, w_0 x}(1)\,[L_x],$$

d'après un résultat élémentaire (voir [26, Th. 3.1]). La dernière formule montre que les entiers $P_{x,w}(1)$ décrivent les multiplicités des modules simples L_x dans les modules de Verma M_w (w_0 est l'élément maximal de W).

3.19. Le théorème 3.18 a été conjecturé par Kazhdan et Lusztig dans [26, 1.5] et démontré par Beilinson-Bernstein (annoncé dans [2]) et Brylinski-Kashiwara [11]. Il y a plusieurs généralisations. Dans [52], Vogan démontre une généralisation de 3.18 pour les représentations irréductibles d'un group de Lie réel semi-simple (ou les modules de Harish-Chandra). Il utilise les résultats de Beilinson-Bernstein [2] et de Lusztig-Vogan [39].
Jantzen [24, Kap.5] a défini une filtration des modules de Verma. Une version plus fine de (3), qui tient compte de la filtration a été conjecturée par plusieurs personnes (voir [15], [16], [17]). Brylinski m'a informé que, tout récemment, cette conjecture a été demontrée par Bernstein.
Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ un poids dominant et V_λ le $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie, de poids maximal λ. Désignons par $m_{\lambda,\mu}$ la multiplicité du poids μ dans V_λ. Dans [36], Lusztig montre que $m_{\lambda,\mu} = P_{n_\lambda,n_\mu}(1)$, où P_{n_λ,n_μ} est le polynôme associé au groupe $\widetilde{W}_a$ introduit au no. 2.12. Il donne aussi une généralisation "polynomiale" de la formule des caractères de H. Weyl. La démonstration est algébrique, elle utilise des informations sur le centre de l'algèbre de Hecke associée à $\widetilde{W}_a$ (dûes à Bernstein).
Soit K un corps p-adique. Dans son étude des représentations de dimension infinie du groupe $GL_n(K)$, Zelevinsky rencontre certaines multiplicités, pour lesquelles il conjecture une description analogue à celle contenue dans (3) ([53], voir aussi [42]).
Dans [33, p.316] Lusztig énonce une conjecture sur le cas "modulaire", qui décrit les multiplicités dans la réduction modulo p d'une représentation irréductible en caracteristique 0, pour certains poids.

4. REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE WEYL ET COHOMOLOGIE D'INTERSECTION

4.1. La résolution π de la varieté nilpotente N (voir 3.2(iii)) s'insère dans une "résolution simultanée". Nous gardons les notations de 3.1.
Le fibré cotangent T^*X de X peut aussi être décrit comme le produit fibré $G \times^B \mathfrak{b}^\perp$(ou $\mathfrak{b}^\perp \in \mathfrak{g}^*$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{b}$), l'opération de B sur $G \times \mathfrak{b}^\perp$ étant définie par

$$b.(g,\xi) = (gb^{-1}, \mathrm{Ad}^*(b)\xi).$$

Alors π se décrit comme le morphisme déduit de $(g,\xi) \mapsto \mathrm{Ad}^*(g)\xi$.
Soit maintenant $Y = G \times^B \mathfrak{u}^\perp$ et désignons par $\phi : Y \to \mathfrak{g}^*$ le morphisme défini comme à la ligne précédente. On a $\mathfrak{u}^\perp/\mathfrak{b}^\perp \simeq \mathfrak{t}^*$ et l'application $\mathfrak{u}^\perp \to \mathfrak{t}^*$ composée avec le projection $G \times \mathfrak{u}^\perp \to \mathfrak{u}^\perp$ définit une application $G \times \mathfrak{u} \to \mathfrak{t}^*$, qui passe au quotient Y. D'où un morphisme $\theta : Y \to \mathfrak{t}^*$.
L'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$ est l'algèbre symmétrique $S(\mathfrak{g})$.
On sait que l'algèbre des G-invariants dans $S(\mathfrak{g})$ est isomorphe (par restriction) à l'algèbre des W-invariants dans $S(\mathfrak{t})$. D'où un morphisme $\chi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{t}^*/W$, qui est plat. Finalement, soit $\psi : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*/W$ le morphisme canonique .
Nous avons défini les ingrédients du diagramme commutatif de morphismes suivant :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi} \\ \mathfrak{t}^* & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{t}^*/W \end{array}$$

4.2. THÉORÈME. *Le diagramme* (1) *est une résolution simultanée du morphisme* χ.
Cela veut dire : (a) θ est lisse, (b) ψ est fini et surjectif, (c) ϕ est propre, (d) pour tout $\xi \in \mathfrak{t}^*$ le morphisme induit $\phi_\xi : \theta^{-1}(\xi) \to \chi^{-1}(\psi(\xi))$ est une résolution du second membre. On observa que pour $\xi = 0$, (d) est précisement l'assertion de 3.2(iii).
Le théorème 4.2 est dû à Grothendieck, il a été annoncé et utilisé par Brieskorn [8]. Pour plus de details, voir [45,§4].
Il est souvent commode d'identifier $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$, via la forme de Killing (c'est fait dans [loc.cit.]).

Si $\xi \in \mathfrak{g}^*$ on denote par $Z_G(\xi) = \{g \in G | \mathrm{Ad}^*(g)\xi = \xi\}$ son centralisateur.
Le rang de G sera désigné par r.

4.3. PROPOSITION. *Soit* $\xi \in \mathfrak{g}^*$. *Les composantes irréductibles de la variété* $\phi^{-1}\xi$ *ont la dimension* $d(\xi) = \frac{1}{2}(\dim Z_G(\xi) - r)$.

Identifions $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$. On se ramène au cas où $\xi \in \mathfrak{g}$ est nilpotent. Dans ce cas on a besoin d'informations assez détaillées sur la classification des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}$ (voir [50, 4.6]).

Soit t^*_{reg} l'ensemble des éléments réguliers dans t^* (c'est- à-dire dont le groupe d'isotropie dans W est trivial) et posons

$$\mathfrak{g}^*_{reg} = \phi(\theta^{-1}(t^*_{reg})),$$

(c'est l'ensemble des éléments réguliers semi-simples de $\mathfrak{g}$, si on identifie $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$). On constate que

$$\phi^{-1}(\mathfrak{g}^*_{reg}) \simeq G/T \times t^*_{reg},$$

le morphisme ϕ correspondant à $(gT,\xi) \mapsto Ad^*(g)\xi$. Ceci montre que la restriction F de $\phi_*\mathbb{Q}$ à l'ouvert $\mathfrak{g}_{reg}$ est un faisceau localement constant, sur lequel W opère. La représentation de W dans un fibre est la répresentation régulière.

Nous désignons par $\underline{IC}^\cdot(\mathfrak{g}^*,F)$ le complexe de cohomologie d'intersection sur $\mathfrak{g}^*$ défini par le faisceau localement constant F sur l'ouvert $\mathfrak{g}^*_{reg}$ (voir [10,1.2.6]).

4.4. THÉORÈME . $\underline{IC}^\cdot(\mathfrak{g}^*,F) \simeq \mathbb{R}\phi_*\mathbb{Q}[\dim G]$.

Soit $\underline{A}^\cdot$ le membre de droite et posons $n = \dim G$. Comme Y est lisse et ϕ propre on a (D étant l'opérateur de dualité de Verdier)

$$D\underline{A}^\cdot = D(\mathbb{R}\phi_*\mathbb{Q}[n]) = \mathbb{R}\phi_*(D\mathbb{Q})[-n] = \underline{A}^\cdot.$$

Par la définition même de F , la restriction de $\underline{A}^\cdot$ à $\mathfrak{g}^*_{reg}$ est $F[n]$.

4.5. LEMME. *Il existe une partition* $\mathfrak{g}^* = \coprod_{i\geq 0} X_i$ *en sous-ensembles localement fermés irréductibles avec les propriétés suivants* : (a) $X_0 = \mathfrak{g}^*_{reg}$,
(b) *si* $i>0$ *et* $\xi \in X_i$ *on a* $\dim Z_G(\xi) < \operatorname{codim} X_i + r$.
Admettant 4.5, on conclut de 4.3 que

$$\dim \phi^{-1}\xi \leq \tfrac{1}{2}(\operatorname{codim} X_i - 1),$$

si $\xi \in X_i$ et $i > 0$. Le théorème résulte alors des remarques précédentes, et des caracterisations de $\underline{IC}^\cdot(\mathfrak{g}^*,F)$ données dans [18,6.1].
4.5 est contenu dans les résultats de [5]. Soit $P \subset G$ un sous-groupe parabolique propre, soit M un sous-groupe de Levi de P, à centre connexe S. Identifions $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{s}_{reg}$ l'ensemble des $\xi \in \mathfrak{s}$ avec $Z_G(\xi) = M$. Fixons un élément nilpotent η de $\mathfrak{m}$ et posons

$$Z = \bigcup_{g\in G} Ad(g)\ (\mathfrak{s}_{reg}+\eta)$$

Faisons varier M et η. Il résulte de [loc.cit., §5] que les ensembles Z ainsi obtenus définissent une partition avec les propriétés du lemme.

4.6. Comme le groupe de Weyl W opère sur F, il opère aussi sur $\underline{IC}^{\cdot}(\mathfrak{g}^*, F)$ et le théorème montre qu'il opère sur $\mathbb{R}\phi_*\mathbb{Q}$.

Soit $\pi : T^*X \to N$ la résolution de 3.2 (iii). Il s'ensuit que W opère sur $\mathbb{R}\pi_*\mathbb{Q}$. En particulier, W opère sur les fibres des faisceaux $\mathbb{R}^i\pi_*\mathbb{Q}$, c'est-à-dire sur les groupes de cohomologie $H^i(\phi^{-1}\xi;\mathbb{Q})$.
Nous posons $X_\xi = \phi^{-1}\xi$. Identifiant $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$, on interprète X_ξ comme l'ensemble des algebras de Borel B de G qui contiennent ξ (ou bien comme la variété des points fixes de $\exp(\xi)$ dans X).
Cette méthode pour construire une représentation de W dans $H^{\cdot}(X_\xi;\mathbb{Q})$ est dûe à Lusztig [35, no.3].
La première construction, en cohomologie ℓ-adique sur un corps fini, d'une telle représentation se trouve dans [47]. D'autres constructions on été données par Slodowy [44, IV] et Kazhdan-Lusztig [28]. On sait que les constructions donnent, essentiellement, la même représentation (c'est démontré par Hotta dans [22], voir aussi [28]). La construction de Lusztig esquissée ci-dessus, basée sur la cohomologie d'intersection paraît être la construction la plus directe. C'est la seule qu'on va utiliser ci-après.

4.7. Il est bien connu que W opère sur $H^{\cdot}(X;\mathbb{Q})$ (voir par example [12]). Cette opération peut-être décrite de la manière suivante.
Le groupe W opère sur G/T : si $n \in N$ représente $w \in W$ on pose $w(gT) = gn^{-1}T$. Donc W opère dans $H^{\cdot}(G/T;\mathbb{Q})$. Comme G/T est un fibré vectoriel sur $G/B \simeq X$, on a $H^{\cdot}(G/T;\mathbb{Q}) \simeq H^{\cdot}(X;\mathbb{Q})$, d'où une représentation de W dans $H^{\cdot}(X;\mathbb{Q})$. Or $X \simeq X_0 = \phi^{-1}0$, donc on a défini une représentation de W dans $H^{\cdot}(X_0;\mathbb{Q})$.
C'est la représentation défini dans 4.6 (voir [44, 4.4] pour une démonstration).
On sait que la représentation de W dans $H^{\cdot}(X;\mathbb{Q})$ est la représentation régulière.
Les représentations dans $H^{\cdot}(X_\xi;\mathbb{Q})$ généralisent cette représentation connue.
On va maintenant décrire d'après Borho-MacPherson [6] comment ces représentations entrent dans la description de la cohomologie d'intersection de certaines sous-variétés de N. On sait que le nombre d'orbites de G dans N est fini [4, p.185] . Si $\xi \in N$, soit $O(\xi)$ son orbite. On a $O(\xi) \simeq G/Z_G(\xi)$; c'est une variété de dimension paire (cela résulte de 4.3, par exemple). Le groupe $F(\xi) = \pi_1(O(\xi))$ est fini (parce que $\pi_1(G)$ est fini et que $Z_G(\xi)$ a un nombre fini de composantes connexes). Nous désignons par $F(\xi)^\vee$ l'ensemble des caractères irréductibles rationelles de $F(\xi)$. Tout $\phi \in F(\xi)^\vee$ définit un fibré $\mathbb{Q}$-vetoriel L_ϕ localement constant sur $O(\xi)$. Soit $\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(\xi)}, L_\phi)$ le

complexe de cohomologie d'intersection sur l'adhérence $O(\xi)$ défini par L . Soit $j_\xi : \overline{O(\xi)} \to N$ l'inclusion et soit A un ensemble de représentants des G-orbites dans N.

4.8. THÉORÈME. $\mathbb{R}\pi_* \mathbb{Q}[\dim G] = \bigoplus_{\substack{\xi \in A \\ \phi \in F(\xi)^\vee}} j_{\xi,*}(\underline{IC}^\cdot(\overline{O(\xi)}, L_\phi)) \otimes V_{(\xi,\phi)}$

où $V_{(\xi,\phi)}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel dont la dimension est égale à la multiplicité du caractère* ϕ *dans le système local* $R^{2d(\xi)}\pi_*\mathbb{Q}$ *sur* $O(\xi)$.

C'est une conséquence du théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [10,3.9] et 4.3.

Soit $\underline{C}^\cdot = \mathbb{R}\pi_*\mathbb{Q}[\dim G]$. On a vu au no. 4.6 que W opère sur ce complexe de faisceaux, d'où un homomorphisme d'anneaux $\alpha : \mathbb{Q}[W] \to \mathrm{End}(\underline{C}^\cdot)$.

4.9. THÉORÈME . (i) α *est un isomorphisme ;*

(ii) *La décomposition de* $\underline{C}^\cdot$ *de* 4.7 *est* W*-stable. Dans le facteur correspondant à* (ξ,ϕ) *l'opération de est* $\mathrm{id} \otimes \rho_{(\xi,\phi)}$, *où* $\rho_{(\xi,\phi)}$ *est une représentation de* W *dans* $V_{(\xi,\phi)}$ *qui est absolûment irréductible si* $V_{(\xi,\phi)} \neq 0$;

(iii) *Toute représentation irréductible complexe de* W *provient d'une représentation* $\rho_{(\xi,\phi)}$.

Considérons l'application composée β :

$$\mathbb{Q}[W] \xrightarrow{\alpha} \mathrm{End}(\underline{C}^\cdot) \to \mathrm{End}\ \underline{H}^\cdot(\underline{C}^\cdot)_0,$$

le dernier membre provenant du fibré en 0 du faisceau de cohomologie. Ce qu'on a dit au no. 4.7 implique que β est un isomorphisme, par conséquent α est injective. Il s'ensuit que 4.9 résultera du lemme suivant.

4.10. LEMME. $\sum_{\xi,\phi} (\dim V_{(\xi,\phi)})^2 = |W|$.

C'est un résultat géométrique élémentaire. Voici une esquisse de démonstration. Travaillons d'abord avec coefficients complexes (au lieu de coefficients rationnels). Soit $Z = \{((x,\xi),x',\xi)) \in T^*X \times T^*X\}$. Si $w \in W$ posons $Z_w = \{((x,\xi),(x',\xi)) \in Z \mid (x,x') \in O(w)\}$ (où $O(w)$ est comme au no.2). On constate que Z_w est une variété irréductible de dimension dim X, d'où l'on voit que les adhérences $\overline{Z}_w$ sont les composantes irréductibles de Z. D'autre part, soit $\xi \in N$ et soient C,C' deux composantes irréductibles de $\pi^{-1}\xi$, elles ont dimension $d(\xi)$ (voir 4.3). Posons

$$Z_{\xi,C,C'} = \bigcup_{\substack{x \in C \\ x' \in C' \\ g \in G}} g.\ ((x,\xi)(x',\xi)),$$

c'est une sous-variété irréductible de Z. On montre que les $\overline{Z}_{\xi,C,C'}$, avec $\xi \in A$, sont aussi les composents irréductibles de Z. Le lemme s'obtient en comptant de deux manières les composantes de Z. Un résultat équivalent au lemme est démontré dans [47, 6.11] (en caractéristique p) et [50, no.3] (dans un cas plus général). Pour obtenir le résultat voulu avec coefficients dans $\mathbb{Q}$, on a besoin du résultat suivant : si G est adjoint alors pour tout $\xi \in N$ le groupe $Z_G(\xi)/Z_G(\xi)^0$ a la propriété que toutes ses représentations irréductibles sont définies sur $\mathbb{Q}$. C'est démontré par une analyse cas par cas (voir [4, E IV] et [1] pour les types exceptionnels).

4.11. COROLLAIRE. *Pour tout* $\xi \in N$ *on a*

$$H^{\cdot}(X_{\xi};Q)\ [\dim G] \simeq \bigoplus_{\substack{\eta\in A, \eta\in\overline{O(\xi)} \\ \phi\in F(\eta)^{\vee}}} (\underline{H}^{\cdot}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(\eta)};L_{\phi}))_{\xi} \otimes V_{(\eta,\phi)}$$

Ceci montre que les nombres de Betti locaux de cohomologie d'intersection des variétés $\overline{O(\xi)}$ sont déterminés par la structure de W-module des $H^{\cdot}(X\ ;\mathbb{Q})$. Les nombres de Betti "globaux" sont donnés par le résultat suivant. Rappelons que le W-module $H^{\cdot}(X;\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[W]$. Cet isomorphe définit une structure de W-module gradué sur Q[W].

4.12. COROLLAIRE. *Soit* $\xi \in N$. *On a* $\mathbb{H}^{i}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(\xi)},L_{\phi})) = 0$ *si* i *est impair et* $\mathbb{H}^{2i}(\underline{IC}^{\cdot}(\overline{O(\xi)},L_{\phi}))$ *est la multiplicité de* $\rho_{(\xi,\phi)}$ *dans la composante homogène de degré* i *de* $\mathbb{Q}[W]$.

On note par $\mathbb{H}^{\cdot}$ la hypercohomologie.

Les résultats précédents sont tirés de [6]. On y trouvera aussi des résultats plus généraux (où interviennent des sous-groupes paraboliques).
Récemment, Kashiwara (lettre à Brylinski d'octobre 1981) a étudié les questions de ce no. du point de vue de la théorie des systèmes holonomes. D'après ses résultats le complexe de faisceaux de 4.4 s'interprète comme complexe-solution du système de Harish-Chandra. Il en déduit une autre démonstration du théorème de Borho-MacPherson 4.9.

4.13. Nous allons discuter brièvement le cas $G = SL_n$. Alors W est le groupe symétrique S_n. Dans ce cas seul le caractère trivial ϕ des $F(\xi)$ intervient (c'est une conséquence du fait que dans GL_n tout centralisateur est connexe) et 4.9 décrit une correspondance "géométrique" de représentations irréductibles de S_n et classes de matrices nilpotentes. Ces deux espèces d'objets sont aussi classifiés par des partitions de n (ou par des diagrammes de Young) et en

termes de partitions la correspondance est l'identité ou la dualité [23,§2] .
Dans ce cas on a de bonnes informations géometriques sur les X_ξ. D'après Spaltenstein [46] elles ont une stratification dont les strates sont des espaces affines. Il s'ensuit que $H^i(X_\xi ; \mathbb{Q}) = 0$ si i est impair (ceci est vrai dans tous les cas qu'on a calculé, mais je ne connais pas de démonstration générale).

Posons (toujours dans le cas $G = SL_n$)

$$Q_{\xi,w}(t) = \sum_{i\geq 0} \mathrm{Tr}(\rho_\xi(w), H^{2i}(X_\xi;\mathbb{Q}))t^i,$$

où $\xi \in N$, $w \in W = S_n$ et $\rho_\xi = \rho_{(\xi,1)}$. Les polynômes qu'on obtient ainsi sont les *polynômes de Green*, importants dans la théorie des caractères de $GL_n(\mathbb{F}_q)$.
On peut les définir de façon purement combinatoire, voir [40,III, 7].
Soit $m^i_{\xi,\eta}$ la multiplicité de ρ_η dans $H^{2i}(X_\xi;\mathbb{Q})$. Les polynômes

$$\sum_{i\geq 0} m^i_{\xi,\eta}\, t^i$$

sont les polynômes de Kostka-Foulkes [loc.cit., III,6]. D'après 4.11 les coefficients $m^i_{\xi,\eta}$ sont les nombres de Betti locaux de cohomologie d'intersection de $O(\eta)$ en ξ, à un décalage près (une autre démonstration de ce fait à été donnée par Lusztig dans [35]).

Des résultats explicites sur les représentations $\rho_{(\xi,\phi)}$ dans le cas d'autres groupes simples classiques sont donnés dans [43].
Sur les "fonctions de Green" dans le cas général on pourra consulter [47] ou [49, Ch.VIII].

Les résultats du no. 4 montrent qu'il existe un lien étroit entre la géometrie des variétés X_ξ et les représentations du groupe de Weyl correspondant
A l'avis du rédacteur on a besoin de la géométrie, pour vraiment comprendre les faits algébriques et combinatoires compliqués qu'on rencontre dans l'étude des groupes de Weyl.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALEXEEVSKY, *Groupe de composantes de centralisateurs d'éléments unipotents dans les groupes algébriques semi-simples* (en russe), Publ. Inst. Math. Tbilisi 52(1979), 5-27.

[2] A. BEILINSON-J. BERNSTEIN, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R. Acad. Sc. Paris 292(1981), 15-18.

[3] C.T. BENSON-C.W. CURTIS, *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 165(1972), 251-273 et 202(1975), 405-406.

[4] A. BOREL et al., *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lect. Notes in Math. vol. 131, Springer-Verlag, 1970.

[5] W. BORHO-H. KRAFT, *Uber Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen*, Comm. Math. Helv. 54(1976), 61-104.

[6] W. BORHO-R. MACPHERSON, *Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés de nilpotents*, C.R. Acad. Sc. Paris., 292(1981), 707-710.

[7] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.

[8] E. BRIESKORN, *Singular elements of semisimple algebraic groups*, Actes Congrès Intern. Math. 1970 t.2, 279-284.

[9] J.-L. BRYLINSKI, *Differential operators on the flag varieties*, dans : Tableaux de Young..., Astérisque, vol. 87-88(1982), 43-60.

[10] J.-L. BRYLINSKI, *(Co) homologie d'intersection et faisceaux pervers*, Sém. Bourbaki 1981/82, exposé n° 585, Astérisque 92-93(1982), 129-157.

[11] J.-L. BRYLINSKI-M. KASHIWARA, *Kazhdan - Lusztig conjecture and holonomic systems*, Inv. Math. 64(1981), 387-410.

[12] M. DEMAZURE, *Invariants symétriques des groups de Weyl et torsion*, Inv. Math. 21(1973), 287-301.

[13] M. DEMAZURE, *Désingularisation des variétés de Schubert*, Ann. Ec. Norm. Sup. (4) 7(1974), 53-88.

[14] V.V. DEODHAR, *Some characterizations of Bruhat ordening on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function*, Inv. Math. 39(1977), 187-198.

[15] V.V. DEODHAR, *On the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Proc. Kon. Ak. v. Wet., Amsterdam, A 86(1982), 1-17.

[16] O. GABBER - A. JOSEPH, *Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Ann. Ec. Norm. Sup. 14(1981), 261-302.

[17] S. GELFAND-R. MACPHERSON, *Verma modules and Schubert cells: a dictionary*, Sém. d'Algèbre P. Dubreil-M.-P. Malliavin 1981, Lect. Notes in Math., vol. 924, Springer-Verlag, 1982.

[18] M. GORESKY-R. MACPHERSON, *Intersection homology II*, à paraître dans Inv. Math..

[19] H. GRAUERT-O. RIEMENSCHNEIDER, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Inv. Math. 11(1970), 263-292.

[20] A. GROTHENDIECK, *Local cohomology*, Lect. Notes in Math. vol. 41, Springer-Verlag, 1967.

[21] W. HESSELINK, *Cohomology and the resolution of the nilpotent variety*, Math. Ann. 223(1976), 249-252.

[22] R. HOTTA, *On Springer's representations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1982), 863-876.

[23] R. HOTTA-T.A. SPRINGER, *A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups*, Inv. Math. 41(1977), 113-127.

[24] J.C. JANTZEN, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lect. Notes in Math. vol. 750, Springer-Verlag, 1979.

[25] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*, Inv. Math. 38(1976), 33-54.

[26] D. KAZHDAN-G. LUSZTIG, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inv. Math. 53(1979), 165-184.

[27] D. KAZHDAN-G. LUSZTIG, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. Pure Math. vol. 36, 185-203, Amer. Math. Soc. 1980.

[28] D. KAZHDAN-G. LUSZTIG, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. in Math. 38(1980), 222-228.

[29] G. KEMPF, *The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation*, Adv. in Math. 29(1978), 310-396.

[30] G. KEMPF et al., *Toroidal embeddings I*, Lect. Notes in Math. vol. 339, Springer-Verlag, 1973.

[31] B. KOSTANT, *Lie group representations in polynomial rings*, Amer. J. Math. 85(1963), 327-404.

[32] A. LASCOUX-M. SCHÜTZENBERGER, *Polynômes de Kazhdan et Lusztig pour les Grassmanniennes*, dans : Tableaux de Young..., Astérisque 87-88(1982), 249-266.

[33] G. LUSZTIG, *Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups*, Proc. Symp. Pure Math. vol. 37, 313-317, Amer. Math. Soc. 1980.

[34] G. LUSZTIG, *On a theorem of Benson and Curtis*, J. Alg. 71(1981), 490-498.

[35] G. LUSZTIG, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. 42 (1981), 169-178.

[36] G. LUSZTIG, *Singularities, character formulas and a q-analog of weight multiplicities*, à paraître dans Comptes-Rendus Conf. sur la th. des singularités (Luminy, 1981).

[37] G. LUSZTIG, *Unipotent characters of the symplectic and odd orthogonal groups over a finite field*, Inv. Math. 64(1981), 263-296.

[38] G. LUSZTIG, *Unipotent characters of the even orthogonal groups over a finite field*, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[39] G. LUSZTIG-D. VOGAN, *Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds*, à paraître.

[40] I.G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press, 1979.

[41] Z. MEBKHOUT, *Une autre équivalence de catégoriés*, à paraître.

[42] F. RODIER, *Représentations de* GL(n,k) *où* k *est un corps* p*-adique*, Sém. Bourbaki 1981/82, exposé n° 587, Astérisque 92-93(1982), 201-218.

[43] T. SHOJI, *On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups*, Comm. Alg. 7(1979), 1713-1745 et 2027-2033.

[44] P. SLODOWY, *Four lectures on simple groups and singularities*, Comm. Math. Inst. Utrecht, 1980.

[45] P. SLODOWY, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lect. Notes in Math. vol. 815, Springer-Verlag, 1980.

[46] N. SPALTENSTEIN, *The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold*, Proc. Kon. Ak. Wet. Amsterdam 79(1976), 452-456.

[47] T.A. SPRINGER, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, Inv. Math. 36(1976), 173-207.

[48] T.A. SPRINGER, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, 1981.

[49] B. SRINIVASAN, *Representations of finite Chevalley groups*, Lect. Notes in Math. vol. 764, Springer-Verlag, 1979.

[50] R. STEINBERG, *On the desingularization of the unipotent variety*, Inv. Math. 36(1976), 209-224.

[51] J.-L. VERDIER, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inv. Math. 36(1976), 295-312.

[52] D.A. VOGAN, JR, *Irreducible characters of semisimple Lie groups III, Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case*, preprint M.I.T.

[53] A.V. ZELEVINSKY, *Un analogue p-adique de la conjecture de Kazhdan-Lusztig* (en russe), Funktion. Anal. 15(1981), 9-21.

T.A. SPRINGER

Rijksuniversiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Budapestlaan 6
Postbus 80.010
N-3508 TA UTRECHT