LLUIS PUIG

La classification des groupes finis simples : bref aperçu et quelques conséquences internes

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 584, p. 101-128
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__101_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 584 Novembre 1981

LA CLASSIFICATION DES GROUPES FINIS SIMPLES :
BREF APERÇU ET QUELQUES CONSÉQUENCES INTERNES

PAR LLUIS PUIG

EXPOSÉ ÉCRIT PRÉPARÉ AVEC LA COLLABORATION DE MICHEL BROUÉ

INTRODUCTION

Rappelons quels sont les groupes finis simples dont on connait à l'heure actuelle l'existence — éventuellement, par ordinateur interposé.

Hormis les groupes d'ordre premier et les groupes alternés de degré au moins 5 , la plupart des groupes finis simples sont fournis par le mémoire bien connu de Chevalley [15] et ses différentes variations : nous dé--signons ici ces groupes sous le nom générique de "groupes simples de type de Lie".

Il reste alors 26 autres groupes, connus sous le nom de "groupes sporadiques", dont l'histoire s'étale depuis les groupes découverts par Mathieu (au nombre de 5) jusqu'au groupe (*) connu sous le nom de "Monstre" découvert indépendamment par Fischer et Griess, en passant par les groupes découverts par Conway (au nombre de 3), Fischer (4), Harada (1), Held (1), Higman-Sims (1), Janko (4), Lyons (1), MacLaughlin (1), O'Nan (1), Rudvalis (1), Suzuki (1) et Thompson (1).

(*) A notre connaissance, l'unicité d'un groupe satisfaisant aux propriétés énoncées par exemple dans [29] à propos du "Monstre" n'est pas encore démontrée. Il faut donc entendre que "Monstre" désigne une famille non vide de groupes finis simples satisfaisant ces propriétés (en particulier ayant tous le même ordre).

Nous désignons par $\mathcal{K}$ un système de représentants de l'ensemble des classes d'isomorphisme de tous les groupes cités ci-dessus. En essayant de démontrer inductivement que tout groupe fini simple G est isomorphe à un élément de $\mathcal{K}$, on est amené à supposer que tous les quotients de Jordan-Hölder de tout sous-groupe propre de G sont déjà isomorphes à des éléments de $\mathcal{K}$; c'est la raison de la définition suivante :

On dit qu'un groupe fini est un $\mathcal{K}$-groupe si tous ses quotients de Jordan-Hölder sont isomorphes à des éléments de $\mathcal{K}$.

(Notons que, a priori, un sous-groupe d'un $\mathcal{K}$-groupe n'est pas nécessairement un $\mathcal{K}$-groupe. Remarquons également que la définition de $\mathcal{K}$-groupe a un statut provisoire : elle n'est qu'un intermé-diaire commode dans la tentative de démontrer que tous les groupes finis sont des $\mathcal{K}$-groupes).

Nous avons essayé de décrire ici la démarche actuellement suivie dans cette tentative. Pour éviter des énoncés trop encombrants ou trop techni-ques, on a écarté autant que possible des situations "exceptionelles" (et en particulier celles qui mènent aux groupes sporadiques), quitte à rédiger les résultats cités sous des formes plus faibles. Nous insistons sur le fait que cette présentation ne répond qu'à un souci pédagogique, et ne reflète que très imparfaitement la réalité du travail mathématique qui y est impliqué : aucune des méthodes connues aujourd'hui ne permet en effet d'obtenir des résultats "à un nombre fini d'exceptions près". Ce n'est qu'*a posteriori* que l'on cons-tate que, hormis un nombre fini d'exceptions, tout groupe fini simple est d'ordre premier, ou alterné, ou de type de Lie.

On sait que le nombre premier 2 joue dans cette démarche un rôle privilégié par rapport aux autres nombres premiers. Naturellement, le fait que tout groupe fini simple non abélien contienne au moins une involution (Feit--Thompson [17]), et qu'il n'y en ait qu'un nombre fini, à isomorphisme près, ayant un centralisateur d'involution donné (Brauer [12]), n'est pas étranger à ce choix. Cependant, dans l'état actuel des connaissances, la nécessité du statut particulier conféré à 2 résulte plutôt de ce que beaucoup de propriétés des $\mathcal{K}$-groupes (et donc de tous les groupes finis si la liste $\mathcal{K}$ est complète) qui sont relatives au choix d'un nombre premier p ne peuvent aujourd'hui être démontrées *a priori* que pour $p = 2$ (cf par exemple les énoncés 1.3, 1.9, 2.2, 2.3, etc...). Les limites de l'étude locale, exposées au paragraphe 1, donne-ront au lecteur une idée plus précise de cette situation.

Le nombre de pages imprimées consacrées au travail de classifica-tion des groupes finis simples est de l'ordre de 10000, et il est vraisembla-ble que ces dix mille pages contiennent encore un certain nombre d'erreurs.

Derrière ces erreurs pourraient parfois se cacher de nouveaux groupes simples ; ainsi, lorsqu'en 1979 Mazet découvrit une erreur dans le calcul du multiplica--teur de Schur de l'un des groupes de Mathieu, certains spécialistes caressèrent quelque temps l'espoir de trouver un nouveau groupe sporadique. Néanmoins, la conviction de tous les spécialistes est bien que les erreurs éventuelles ne fe--ront apparaitre, au pire, qu'un tout petit nombre de nouveaux groupes, et les plus optimistes pensent que

$$\underline{\text{tout groupe fini est un } \mathcal{K}\text{-groupe}} \qquad (\mathcal{C}) .$$

L'assertion ($\mathcal{C}$) a des conséquences immédiates concernant les groupes finis eux-mêmes. Ainsi, elle implique la célèbre conjecture de Schreier affirmant la résolubilité du groupe des automorphismes extérieurs de tout groupe fini simple — en fait, l'ordre du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe sporadique est au plus 2. De même, tous les résultats que nous avons pris soin d'énoncer avec des hypothèses de la forme "$p = 2$ ou G est un $\mathcal{K}$-groupe", ou "les sous-groupes de G sont des $\mathcal{K}$-groupes", fournissent autant de conséquences de l'assertion ($\mathcal{C}$), valables pour tout nombre premier p et tout groupe fini G .

La bibliographie est volontairement sommaire : nous nous sommes bornés à donner des références aux seuls résultats explicitement cités, mais sans prétendre du tout donner une liste exhaustive des articles concernés.
A cette occasion, nous voulons remercier Jon Alperin, Michael Aschbacher, George Glauberman, Richard Lyons, Geoffrey Mason, Stephen Smith, Ronald Solomon et Franz Timmesfeld pour toute l'aide qu'ils nous ont apportée et l'information qu'ils nous ont fournie sous forme de lettres, preprints et reprints.

Dans tout cet exposé, G désigne un groupe fini non trivial et p un nombre premier divisant l'ordre de G . Si H est un sous-groupe de G , on note respectivement $N_G(H)$ et $C_G(H)$ le normalisateur et le centralisateur de H dans G . Si H est un groupe fini qui opère sur G , on note $G \rtimes H$ le produit semi-direct de G et H . Si $g \in G$ et $H \subset G$, on pose $H^g = g^{-1}Hg$.

1. L'ÉTUDE LOCALE ET SES LIMITES

Les théorèmes de Sylow nous apprennent que les p-sous-groupes maximaux de G sont tous conjugués entre eux, et ont pour ordre la plus grande puissance de p divisant l'ordre de G . Ainsi, la famille des p-sous-groupes non triviaux de G est non vide ; on organise cette famille en introduisant la catégorie de Frobenius de G (pour le nombre premier p), notée $\mathcal{F}_G$, catégorie dont les objets sont les p-sous-groupes non triviaux de G , et dont les morphismes sont ceux induits par les automorphismes intérieurs de G . On note également C_G le foncteur centralisateur , foncteur de $\mathcal{F}_G$ dans la catégorie des groupes finis dont les morphismes sont les homomorphismes "extérieurs", consistant à associer à chaque p-sous-groupe P de G son centralisateur $C_G(P)$ dans G . Ce que l'on appelle étude (p-)locale de G correspond à peu près à l'étude du couple $(\mathcal{F}_G , C_G)$.

Remarquons tout de suite, en notant $O_{p'}(G)$ le plus grand sous-groupe normal de G d'ordre premier à p , que les catégories de Frobenius de G et de $G/O_{p'}(G)$ sont naturellement équivalentes. La connaissance "complète" de $\mathcal{F}_G$ fournit donc tout au plus la connaissance du groupe $G/O_{p'}(G)$. Compte tenu de cette remarque, le théorème suivant, dû à Frobenius [20], illustre assez bien l'intérêt de $\mathcal{F}_G$.

1.1. THEOREME . Supposons que pour tout p-sous-groupe P de G , le groupe $N_G(P)/C_G(P)$ soit un p-groupe. Alors $G/O_{p'}(G)$ est un p-groupe.

(Ainsi, si G est un groupe simple non abélien, le théorème précédent implique l'existence d'un p-sous-groupe P tel que $N_G(P)/C_G(P)$ soit d'ordre divisible par un nombre premier différent de p ; par exemple, si p désigne le plus petit nombre premier divisant l'ordre de G , ceci entraine l'existence de p-sous-groupes non cycliques dans G)

La question du rapport entre la connaissance de $\mathcal{F}_G$ et celle de $G/O_{p'}(G)$ peut se formuler de manière plus précise à l'aide de la définition suivante.

1.2. On dit qu'un sous-groupe H de G contrôle la (p-)fusion dans G si l'inclusion de H dans G induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_G$.

($\mathcal{Q}$) Si H est un sous-groupe de G qui y contrôle la fusion, l'inclusion induit-elle un isomorphisme de $H/O_{p'}(H)$ sur $G/O_{p'}(G)$ — autrement dit, a-t-on $G = HO_{p'}(G)$?

La réponse à la question ($\mathcal{Q}$) est positive si on suppose G résoluble (ou plus généralement p-résoluble). Elle l'est aussi moyennant des hypothèses supplémentaires sur la structure de H . Ainsi, il est possible de formuler le théorème 1.1 de la manière suivante :

Si un p-sous-groupe de Sylow H de G contrôle la fusion, on a $G = HO_{p'}(G)$.

Un autre exemple important est le théorème suivant, dû à Glauberman [22] pour le cas $p=2$ et dont la démonstration dans ce cas fait un large usage de la théorie des caractères.

1.3. THEOREME . Supposons que $p=2$ ou que G soit un $\mathcal{K}$-groupe. Si H est un sous-groupe de G qui contrôle la fusion et qui est le centralisateur d'un p-sous-groupe non trivial de G , on a $G = HO_{p'}(G)$.

Le corollaire suivant de 1.3 est, nous le verrons plus loin, un outil essentiel du travail de classification.

1.4. COROLLAIRE . Supposons que G soit simple non abélien. Pour toute involution t de G , il existe $g \in G-C_G(t)$ tel que $t^g \in C_G(t)$.

La réponse à la question ($\mathcal{Q}$) n'est cependant pas toujours positive. C'est ainsi que si n est un entier premier à p , le stabilisateur d'un point dans le groupe symétrique de degré n y contrôle la fusion. Un autre exemple important résulte d'un argument de Burnside, qui prouve que si les p-sous-groupes de Sylow de G sont abéliens, le normalisateur d'un tel sous-groupe de Sylow contrôle la fusion dans G : ainsi tout groupe simple non abélien dont les p-sous-groupes de Sylow sont abéliens fournit un exemple pour lequel la réponse à ($\mathcal{Q}$) est négative.

La question de savoir si l'étude locale détermine le groupe G doit donc bien être reformulée en introduisant le foncteur centralisateur C_G . Cela se fait grâce à la définition suivante.

1.5. Un sous-groupe H de G est dit de (p-)contrôle fort ("strongly p-embedded") si l'inclusion de H dans G induit à la fois une équivalence de catégorie entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_G$, et un isomorphisme naturel entre C_H et C_G .

Autrement dit, H est un sous-groupe de contrôle fort s'il contrôle la fusion et s'il contient le centralisateur dans G de tous ses p-sous-groupes non triviaux — ce qui est équivalent à dire que H contient un p-sous-groupe de Sylow de G et que, pour tout $g \in G-H$, l'ordre de $H \cap H^g$ est premier à p .

(Les groupes de permutations appelés "groupes de Frobenius" fournissent un premier exemple de situation de contrôle fort : si

G est un groupe de permutations transitif dans lequel seule l'identité fixe plus d'un point, le stabilisateur H d'un point est un sous-groupe de contrôle fort pour tout nombre premier qui divise son ordre. L'un des premiers succès de la théorie des caractères introduite par Frobenius fut de montrer que, dans un tel groupe, l'ensemble des éléments qui ne fixent aucun point, augmenté de l'identité, constitue un sous-groupe de G , qui est un "complément normal" pour H dans G)

Si les p-sous-groupes de G sont cycliques (ou encore quaternio--niens si $p=2$) et si P est un sous-groupe d'ordre p de G , il est facile de vérifier que le normalisateur de P est un sous-groupe de contrôle fort. Hormis ce cas, où la situation p-locale peut être qualifiée de "triviale", l'existence d'un sous-groupe propre de contrôle fort pour un groupe G est une propriété exceptionnelle — en d'autres termes, la donnée du couple $(\mathcal{F}_G\ ,\ C_G)$ détermine "presque toujours" G — , comme le prouvent les énoncés suivants.

1.6. Supposons que G possède des p-sous-groupes isomorphes à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, et qu'il ait un sous-groupe propre de contrôle fort.

(1) Il existe un groupe simple non abélien X d'ordre divisible par p et possédant un sous-groupe propre de contrôle fort, tel que

$$X \subset G/O_{p'}(G) \subset \mathrm{Aut}(X)\ .$$

(2) Si de plus X appartient à $\mathcal{K}$, alors, hormis huit exceptions obtenues pour $p=3$, 5 ou 11 , le groupe X est

soit un groupe de type de Lie de rang 1 sur un corps de caracté--ristique p ,

soit le groupe alterné de degré 2p si p est impair .

Le travail de classification des groupes finis simples faisant un large usage de l'"étude locale", on conçoit l'intérêt que représenterait la démonstration *a priori* d'un théorème identique à 1.6 (2) concernant un groupe X quelconque. Bien qu'un tel résultat existe pour $p=2$ grâce au travail fonda--mental de Bender [9], il semble extrêmement difficile de le généraliser au cas d'un nombre premier impair.

Examinons d'abord sommairement le cas $p=2$ et la démarche de Bender. En s'appuyant sur le théorème de Feit-Thompson [17], celui-ci réussit à démontrer le résultat suivant.

1.7. THEOREME . Supposons que G est un groupe simple non abélien possédant un sous-groupe propre B qui soit de contrôle fort pour 2 . Alors

$$G = B \cup BtB \quad \text{et} \quad B = P.(B \cap B^t)$$

où t est une involution de G-B et P est un 2-sous-groupe de Sylow de B .

(La démonstration utilise de manière essentielle la résolubilité

des groupes d'ordres impairs $B \cap B^g$ *pour* $g \in G-B$ *).*

Ce résultat de Bender renvoie donc à la classification des groupes finis admettant une (B,N)-paire scindée de rang 1 , dont l'histoire s'étale depuis Zassenhaus [50] jusqu'à Bombieri [11], en passant par Feit [16], Suzuki [45], Hering-Kantor-Seitz [31], Shult [37], et qui s'énonce ainsi:

1.8. THEOREME . Soit G un groupe fini simple non abélien admettant une (B,N)-paire scindée de rang 1 . Alors G est un groupe de type de Lie de rang 1 .

Grâce aux théorèmes 1.7 et 1.8 on obtient le théorème de Bender :

1.9. THEOREME . Soit G un groupe fini simple non abélien possédant un sous-groupe propre de contrôle fort pour 2 . Alors G est isomorphe à $PSL_2(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$ ou $Sz(2^{2n+1})$ pour $n > 0$.

Examinos maintenant ce que l'on sait faire dans le cas où p est impair. L'espoir de résoudre le problème *a priori*, en obtenant un résultat analogue à 1.9, semble pour le moment tout à fait hors de portée des outils utilisés dans la théorie des groupes finis.

C'est ainsi, par exemple, que dans leur démonstration de la résolubilité des groupes d'ordre impair, Feit et Thompson, développant l'étude locale (par rapport à différents nombres premiers) d'un contre-exemple minimal, se trouvent finalement confrontés à ce problème. Après usage de la théorie des caractères pour éliminer nombre de configurations possibles, il leur faut encore dix-sept pages de longs calculs pour démontrer le théorème suivant.

1.10. Soient p et q deux nombres premiers impairs avec $q < p$, et soit n un entier multiple de $(p^q-1)/(p-1)$. Supposons que pour tout nombre premier r qui divise n , pq divise r-1 ; en considérant l'action de $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui ne fixe aucun élément non trivial, posons $L = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})$. Notant respectivement P et Q les groupes additifs des corps à p^q et q^p éléments, Q° et P° leurs groupes d'automorphismes, A et B des sous-groupes de leurs groupes multiplicatifs avec $|A| = (p^q-1)/(p-1)$, posons $M = (P \rtimes A) \rtimes Q°$ et $N = (Q \rtimes B) \rtimes P°$. Alors il n'existe aucun groupe fini G possédant des sous-groupes de contrôle fort pour p , q et tout nombre premier r divisant n qui soient respectivement isomorphes à M , N et L .

Un autre exemple de l'extrême difficulté à démontrer un "théorème de Bender pour p impair" est fourni par les méthodes que doit employer Thompson pour classifier les groupes simples minimaux [46]. C'est en s'inspirant de la démarche de Thompson qu'Aschbacher a récemment démontré un résultat clé de la classification (théorème 6.2 ci-dessous), qui consiste à établir, dans une situation bien particulière relative à la structure 2-locale, la non-existence d'un groupe simple non abélien possédant un sous-groupe propre de contrôle fort pour de nombres premiers impairs qui normalise un 2-sous-groupe non trivial.

2. LES DEUX TYPES DE STRUCTURE LOCALE

Nous appellerons dorénavant ici p-centralisateurs de G les centralisateurs dans G de ses p-sous-groupes non triviaux. Examinons sommairement quelle est l'allure des p-centralisateurs des groupes connus.

Supposons d'abord que G est un groupe de type de Lie en caractéristique p . Soit X un p-centralisateur de G . Il résulte d'un théorème de Borel-Tits [10] que X est contenu dans un sous-groupe parabolique de G ; on en déduit que X possède un p-sous-groupe normal P tel que son action sur ce groupe le détermine "presque entièrement", en ce sens que

$$C_X(P) = Z(G).Z(P) .$$

En notant $\bar{X} = X/O_{p'}(X)$ et en désignant par $O_p(\bar{X})$ le plus grand p-sous-groupe normal de $\bar{X}$, on a donc

$$C_{\bar{X}}(O_p(\bar{X})) \subset O_p(\bar{X}) .$$

Si G est un groupe résoluble (ou plus généralement p-résoluble), ou encore si G est un groupe simple non abélien minimal, alors l'inclusion précédente est encore vraie pour tout p-centralisateur X de G .

A l'inverse, si G est un groupe de type de Lie en caractéristique ℓ différente de p , il existe en général des p-centralisateurs X de G possédant la propriété suivante : X a un sous-groupe caractéristique qui est une image homomorphe d'un produit direct de groupes de type de Lie en caractéristique ℓ , groupes qui sont tous d'ordres divisibles par p . Une situation analogue se retrouve dans les groupes symétriques : soit P un p-sous-groupe de G où G est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de degré n , soit m le cardinal de l'ensemble des points fixes de P , et soit X le centralisateur de P dans G . Alors X est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{S}_m$ par un groupe X_1 tel que $C_{X_1}(O_p(X_1)) \subset O_p(X_1)$, donc pour m assez grand on a $O_{p'}(X) = \{1\}$ et X possède un sous-groupe caractéristique d'ordre divisible par p et isomorphe à $\mathfrak{S}_m$.

Il se trouve que l'alternative que l'on peut ainsi mettre en évidence "expérimentalement" dans les groupes connus peut aussi s'établir sans difficulté pour un groupe fini quelconque, à l'aide de la définition suivante.

2.1. On dit que la catégorie de Frobenius F_G est fidèle si, pour tout p-centralisateur X de G , notant $\bar{X} = X/O_{p'}(X)$, on a

$$C_{\bar{X}}(O_p(\bar{X})) \subset O_p(\bar{X}) .$$

(L'adjectif "fidèle" exprime le fait que la structure de $\bar{X}$ se reflète presque fidèlement dans la catégorie de Frobenius, donc que cette catégorie contient déjà "presque toute" l'information locale. Les groupes à catégorie de Frobenius fidèle sont appelés "locally p-constrained" en Anglais)

C'est ainsi que les groupes de type de Lie en caractéristique p , les groupes p-résolubles, les groupes simples minimaux, ont tous une catégorie de Frobenius (pour p) fidèle.

Vérifions que si $\mathcal{F}_G$ n'est pas fidèle, on retrouve une situation analogue à celle constatée dans les groupes de type de Lie en caractéristique différente de p ou dans les groupes symétriques.

Soit donc X un groupe tel que $C_{\overline{X}}(O_p(\overline{X})) \not\subset O_p(\overline{X})$ où $\overline{X} = X/O_{p'}(X)$, i.e. tel que le quotient $Y = C_{\overline{X}}(O_p(\overline{X}))/Z(O_p(\overline{X}))$ soit non trivial. Il est facile de vérifier que $O_p(Y) = O_{p'}(Y) = \{1\}$, et par conséquent que les sous-groupes normaux minimaux de Y engendrent un sous-groupe caractéristique de Y qui est isomorphe à un produit direct de groupes simples non abéliens tous d'ordres divisibles par p . Il en résulte que <u>l'ensemble des sous-groupes normaux de</u> X <u>dont l'image dans</u> $\overline{X}/O_p(\overline{X})$ <u>contient tous les sous-groupes normaux minimaux de</u> Y <u>admet un plus petit élément, que l'on note</u> $L_p(X)$ ("p-layer" de X). Ainsi, $L_p(X)$ est un sous-groupe caractéristique de X , et $L_p(X)/O_{p'}(L_p(X))$ est une image homomorphe d'un produit direct d'extensions centrales parfaites de groupes simples non abéliens d'ordres divisibles par p .

Lorsque $\mathcal{F}_G$ n'est pas fidèle, il existe donc un p-centralisateur X de G tel que $L_p(X) \neq \{1\}$, et les quotients simples de $L_p(X)$ offrent un point de départ pour une étude inductive de G .

Grâce au résultat suivant, dû à Gorenstein et Walter, qui montre le caractère "fonctoriel" de L_p , cet outil s'avère particulièrement utile.

2.2. <u>PROPOSITION</u> . <u>Supposons que</u> p = 2 <u>ou que tous les</u> p-<u>centralisateurs de</u> G <u>sont des</u> $\mathcal{K}$-<u>groupes. Alors, si</u> P <u>et</u> Q <u>sont deux</u> p-<u>sous-groupes non triviaux de</u> G <u>tels que</u> $Q \subset P$, <u>on a</u> $L_p(C_G(P)) \subset L_p(C_G(Q))$.

La disymétrie des hypothèses provient de l'usage essentiel fait dans la démonstration de la conséquence suivante du théorème 1.3.

2.3. <u>PROPOSITION</u> . <u>Supposons que</u> p = 2 <u>ou que</u> G <u>est un</u> $\mathcal{K}$-<u>groupe. Supposons que</u> $O_{p'}(G) = \{1\}$. <u>Soit</u> P <u>un</u> p-<u>sous-groupe de Sylow de</u> G , <u>et soit</u> A(P) <u>le groupe des automorphismes de</u> G <u>qui fixent</u> P <u>point par point. Alors</u> $A(P)/O_{p'}(A(P))$ <u>est un</u> p-<u>groupe abélien</u>.

<u>LE PROBLEME DE</u> $O_{p'}$.

L'étude de $\mathcal{F}_G$ dans le cas où elle est fidèle, à laquelle on adjoint l'étude des groupes $L_p(C_G(P))$ dans le cas contraire, ne fournissent cependant pas la connaissance complète du foncteur centralisateur : si X est un p-centralisateur de G , le groupe $O_{p'}(X)$ est contenu dans le noyau de l'opération de X sur $\overline{X}/O_p(\overline{X})$, et on ne peut donc espérer connaitre que $\overline{X}$

à travers cette opération. De plus, la connaissance des facteurs simples de $L_p(X)$ (et donc celle de leurs extensions centrales parfaites grâce au calcul de leurs multiplicateurs de Schur) ne donne aucune indication sur l'action de $L_p(X)$ sur $O_{p'}(X)$.

Or l'étude "expérimentale" des groupes simples connus montre qu'en fait

- si $\mathcal{F}_G$ est fidèle, on a $O_{p'}(X) = \{1\}$ "dans la plupart des cas",
- sinon, $L_p(X)$ centralise toujours $O_{p'}(X)$, pour tout p-centralisateur X de G .

De ces constatations résulte la propriété suivante.

2.4. Supposons que G et tous ses p-centralisateurs soient des $\mathcal{K}$-groupes. Si P et Q sont deux p-sous-groupes de G tels que $Q \subset P$, on a

$$[L_p(C_G(P)),\ O_{p'}(C_G(P))] \subset [L_p(C_G(Q)), O_{p'}(C_G(Q))] \quad .$$

Dans la mesure où on espère démontrer que $\mathcal{K}$ est effectivement l'ensemble de tous les groupes finis simples, il était raisonnable de proposer la conclusion de 2.4. comme conjecture à démontrer pour n'importe quel groupe fini G . Thompson a été le premier à la proposer comme telle dans le cas p = 2 (sous une forme équivalente [13]) , sous le nom de "B-conjecture". Malheureusement, nul n'est encore parvenu à une démonstration *a priori* de cette conjecture, même pour p = 2 . La méthode la plus efficace, à l'heure actuelle, pour traiter le problème des groupes $O_{p'}(X)$, a été conçue par Gorenstein à partir du fait suivant :

Si G est p-résoluble , on a $O_{p'}(X) = X \cap O_{p'}(G)$ pour tout p-centralisateur de G , et plus généralement

2.5. PROPOSITION . Si $\mathcal{F}_G$ est fidèle, et si P et Q sont des p-sous-groupes non triviaux de G tels que $Q \subset P$, on a

$$O_{p'}(C_G(P)) = C_G(P) \cap O_{p'}(C_G(Q)) \quad .$$

En étudiant la structure possible d'un groupe simple non abélien d'ordre impair minimal, Feit et Thompson trouvent la situation de la conclusion de 2.5. Ayant en vue le cas résoluble, ils essaient alors de démontrer l'existence d'un sous-groupe H d'ordre premier à p , normalisé par un p-sous-groupe de Sylow P de G , et tel que pour tout sous-groupe non trivial Q de P on ait $O_{p'}(C_G(Q)) = H \cap C_G(Q)$. C'est en s'inspirant de leurs méthodes que Gorenstein a dégagé la notion de ce que nous appelons foncteur de recollement ("signalizer functor") et que nous présentons au paragraphe suivant.

3. FONCTEURS DE RECOLLEMENT

3.1. Soit E un groupe abélien fini d'exposant p . On appelle foncteur de recollement sur E tout foncteur contravariant $\mathcal{R}$ de la catégorie $\mathcal{F}_E$ dans la catégorie des groupes finis d'ordres premiers à p et munis d'une opération de E , qui satisfait à la condition suivante :

Si F et F' sont des sous-groupes non triviaux de E tels que $F \subset F'$, l'image de $\mathcal{R}(F')$ dans $\mathcal{R}(F)$ coïncide avec l'ensemble des points fixes de F' .

Cette condition implique en particulier que F opère trivialement sur $\mathcal{R}(F)$. En fait, dans les applications (et dans la définition de Gorenstein), les foncteurs de recollement sur E sont obtenus de la manière suivante :

Le groupe E opère sur un groupe fini G , et les groupes $\mathcal{R}(F)$ sont des sous-groupes E-stables de G , d'ordres premiers à p , satisfaisant à la condition :

Si F et F' sont des sous-groupes non triviaux de E tels que $F \subset F'$, on a $\mathcal{R}(F') = \mathcal{R}(F) \cap C_G(F')$.

Dans ce cas, nous dirons que le foncteur de recollement $\mathcal{R}$ est contenu dans G .

Les travaux de Gorenstein [26], Goldschmidt [24], Glauberman [23] et Mac Bride [34] ont permis de démontrer le résultat suivant.

3.2. THEOREME. Soit E un groupe abélien fini d'exposant p et d'ordre au moins p^3 opérant sur le groupe G . Soit $\mathcal{R}$ un foncteur de recollement sur E contenu dans G . Supposons que $p = 2$ ou que pour tout sous-groupe non trivial F de E le groupe $\mathcal{R}(F)$ soit un $\mathcal{K}$-groupe. Désignons par $\mathcal{R}(1)$ le sous-groupe engendré par la réunion des $\mathcal{R}(F)$. Alors $\mathcal{R}(1)$ est d'ordre premier à p , et pour tout sous-groupe non trivial F de E , on a $\mathcal{R}(F) = \mathcal{R}(1) \cap C_G(F)$. De plus $\mathcal{R}(1)$ est résoluble si et seulement si tous les groupes $\mathcal{R}(F)$ le sont.

La raison sous-jacente à un tel énoncé semble être l'existence de limite directe pour les foncteurs de recollement sur E — dès que E est assez gros. C'est ce que suggère le résultat suivant, dû à Puig [35].

3.3. THEOREME. Soit E un groupe fini abélien d'exposant p et d'ordre au moins p^4, et soit $\mathcal{R}$ un foncteur de recollement sur E tel que, pour tout sous-groupe non trivial F de E , le groupe $\mathcal{R}(F)$ soit résoluble. Alors $\mathcal{R}$ admet une limite directe $\varinjlim(\mathcal{R})$ qui est résoluble , et pour tout sous-groupe non trivial F de E l'image de $\mathcal{R}(F)$ dans $\varinjlim(\mathcal{R})$ coïncide avec l'ensemble des points fixes de F .

Lorsque la catégorie de Frobenius de G est fidèle, la proposition 2.5. fournit des foncteurs de recollement contenus dans G sur chaque sous-groupe abélien d'exposant p de G . Illustrons dans ce cas l'emploi du théorème 3.2.

On suppose donc $p=2$, G simple non abélien et $\mathcal{F}_G$ fidèle. On suppose de plus qu'un 2-sous-groupe de Sylow P de G contient un sous-groupe normal E isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Nous allons démontrer qu'alors $O_{2'}(X) = \{1\}$ pour tout 2-centralisateur X de G .

Soit H le sous-groupe engendré par les groupes $O_{2'}(C_G(F))$, où F parcourt l'ensemble des sous-groupes non triviaux de E . La proposition 2.5. et le théorème 3.2 montrent que H est un groupe d'ordre impair et que

$$O_{2'}(C_G(F)) = H \cap C_G(F)$$

pour tout sous-groupe non trivial F de E . En particulier, on en déduit que, si F est un sous-groupe d'ordre 4 de E , alors H est engendré par les groupes $O_{2'}(C_G(t))$ où t parcourt l'ensemble des involutions de F . Si s est une involution de P , nous pouvons choisir F contenu dans $C_E(s)$; en reprenant le même argument que précédemment, mais en substituant le groupe $\langle s , C_E(s)\rangle$ à E , on conclut que $O_{2'}(C_G(s)) = H \cap C_G(s)$. Par conséquent, si Q est un sous-groupe non trivial de P , en choisissant s dans Q et en appliquant 2.5 on obtient

$$O_{2'}(C_G(Q)) = H \cap C_G(Q) .$$

De plus, si Q contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, le groupe H est encore engendré par les points fixes des involutions de Q et par conséquent $N_G(Q)$ normalise H . Il n'est pas difficile alors de démontrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de contrôle fort (cf 1.5) d'où $G = N_G(H)$, à moins que G ne soit l'un des groupes énumérés en 1.9 ; dans chacun de ces cas, on constate que H est trivial, ce qui démontre bien la trivialité des $O_{2'}(X)$ pour tout 2-centralisateur X de G .

L'exemple traité ci-dessus montre aussi les limites de la méthode : elle nécessite qu'un 2-sous-groupe de Sylow ait "suffisamment" de sous-groupes isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. L'hypothèse contraire, cependant, est trés contraignante pour la structure de P , ce qui a rendu possible la détermination par des méthodes *ad hoc* de toutes les possibilités alors laissées pour G (cf par exemple le volumineux travail de Gorenstein et Harada [27]). De ce travail et du raisonnement esquissé ci-dessus on déduit en particulier le résultat suivant, dû à Gorenstein et Walter [30] .

3.4. THEOREME. Supposons que $p=2$ et que G soit un groupe fini simple non abélien. Si $\mathcal{F}_G$ est fidèle et si G possède un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, on a $O_{2'}(X) = \{1\}$ pour tout 2-centralisateur X de G .

Lorsque $\mathcal{F}_G$ n'est pas fidèle, il est bien plus difficile de construire des foncteurs de recollement. Donnons-en un exemple, introduit par Goldschmidt [25] et utilisé aussi par Aschbacher [6].

3.5. PROPOSITION. Supposons que $p=2$ et que G contienne un sous-groupe E isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Supposons que pour toute involution t de E on ait

$$[(\bigcap_{t\in F, F\subset E, F\neq E} [F, L_2(C_G(t))]) , L_2(C_G(t))] \subset O_{2'}(C_G(t)) .$$

Soit D un sous-groupe de E d'ordre 4 . Alors l'application $\mathcal{R}_D$ qui à chaque sous-groupe F d'ordre 2 de E associe

$$\mathcal{R}_D(F) = [O_{2'}(C_G(F)), D].(O_{2'}(C_G(D)) \cap C_G(F))$$

se prolonge en un foncteur de recollement sur E contenu dans G .

4. CRITÈRES DE RECONNAISSANCE

Avant de décrire la démarche de la classification elle-même, nous allons brièvement présenter quelques-unes des caractérisations qui y sont utilisées pour "reconnaitre" les groupes simples.

A la base de ces critères, il y a la mise en évidences de propriétés d'amalgame. Ainsi le théorème suivant, dû à Tits [49], est au point de départ des méthodes d'identification des groupes de type de Lie.

4.1. THEOREME. Supposons que G possède une (B,N)-paire. Désignons par $\mathcal{S}$ l'en--semble générateur privilégié de $N/N\cap B$, et par w l'élément de plus grande longueur de ce groupe. Pour tout s dans $\mathcal{S}$, posons

$$G_s = < B\cap B^{ws} , B^s \cap B^w > .$$

Alors G est la limite directe du système formé par les groupes G_s , $<G_s , G_{s'}>$ et par les inclusions $G_s \subset <G_s , G_{s'}>$ pour s et s' parcourant l'ensemble $\mathcal{S}$.

Lorsque l'on sait qu'un groupe G possède "assez" de sous-groupes de type de Lie de rang 1 , il n'est cependant pas facile, en général, de dé--montrer que deux de ces sous-groupes engendrent un groupe de Lie de rang 2 . C'est pourquoi nous allons présenter deux théorèmes, caractérisant respecti--vement les groupes de type de Lie en caractéristique 2 et en caractéristique impaire, qui partent de propriétés plus aisées à atteindre à l'aide de l'étude 2-locale

CAS DES GROUPES DE TYPE DE LIE EN CARACTERISTIQUE 2

Si G est un groupe de Chevalley de rang au moins 2 sur un corps fini k et si α et β sont deux racines longues, rappelons quelles sont les rela--tions possibles entre deux éléments $x_\alpha(a)$ et $x_\beta(b)$ pour a et b dans k :

- si $\alpha = -\beta$, alors $x_\alpha(a)$ et $x_\beta(b)$ appartiennent à un sous-groupe isomorphe à $SL_2(k)$,
- si $\alpha+\beta$ est une racine (longue), $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = x_{\alpha+\beta}(c)$ où $c\in k$,
- sinon, $x_\alpha(a)$ et $x_\beta(b)$ commutent.

Si de plus k est un corps de caractéristique 2 , $x_\alpha(a)$ et $x_\beta(b)$ sont des invo--lutions et en particulier on a

$[x_\alpha(a)\ ,\ x_\beta(b)] = (x_\alpha(a)x_\beta(b))^2$, et si $\alpha = -\beta$, le produit $x_\alpha(a)x_\beta(b)$ est d'ordre impair.

La définition suivante s'inspire des propriétés précédentes.

4.2. Soit I une classe de conjugaison d'involutions de G . On dit que I est une classe d'involutions radicielles si, pour tout couple (t,t') d'éléments de I tel que tt' soit d'ordre pair, on a ou bien tt' = t't , ou bien $(tt')^2 \in I$.

Si t et t' sont deux involutions de G telles que tt' soit d'ordre 2n , $(tt')^n$ est une involution qui centralise t et t' : on conçoit donc que l'on puisse "étudier n localement". De plus, tous les groupes simples de type de Lie en caractéristique 2 (sauf ${}^2F_4(2^{2n+1})$) possèdent une classe d'involutions radicielles. Les travaux de Fischer [18], Aschbacher [2] et Timmes-feld [47] montrent que cette propriété les caractérise — à quatre exceptions près.

4.3. THEOREME. Si G est un groupe fini simple non abélien possédant une classe d'involutions radicielles, alors G est un groupe de type de Lie en caractéristique 2 , ou l'un des groupes suivants : $B_n(3)$, $B_n(5)$, le groupe alterné de degré 6 , le second groupe de Janko J_2 , le groupe de Fischer Fi_{22} , le groupe de Fischer Fi_{23} .

Sans prétendre pouvoir ici présenter un schéma de la démonstration de 4.3, on peut remarquer que, pour chaque t dans I , il résulte de 1.4 que $I \cap C_G(t) \neq \{t\}$; ainsi, on retrouve dans le groupe $C_G(t)/\langle t\rangle$ un ensemble d'involutions non vide et stable par conjugaison qui satisfait à la condition de 4.2. Quitte à démontrer que cet ensemble se partage en classes d'involutions radicielles, on a là le début d'une induction.

CAS DES GROUPES DE TYPE DE LIE EN CARACTERISTIQUE IMPAIRE

Les éléments $x_\alpha(a)$ d'un groupe de Chevalley en caractéristique impaire ne sont plus des involutions. Or, dans un groupe quelconque, les éléments d'ordre supérieur à 2 n'ont plus les bonnes propriétés des involutions : l'ordre du produit de deux d'entre eux ne peut pas, en général, se déduire de l'étude locale. Aschbacher remplace les éléments $x_\alpha(a)$ par les groupes

$$\langle x_\alpha(a)\ ,\ x_{-\alpha}(a')\rangle_{a,a'\in k}$$

et en exprime une propriété qui, d'une part peut être obtenue à partir de données locales (cf proposition 5.2 ci-dessous), d'autre part caractérise les groupes simples de type de Lie en caractéristique impaire — à quatre exceptions près. Voici son résultat :

4.4. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien possédant une classe de conjugaison $\mathcal{H}$ de sous-groupes dont les 2-sous-groupes de Sylow sont quaternioniens. Supposons que tout couple (H,H') d'éléments de $\mathcal{H}$ satisfait aux conditions suivantes :

(1) Si un 2-sous-groupe P de H d'ordre au moins 4 centralise une involution de H' , alors P normalise H' ,

(2) Si $H \cap H'$ contient une involution, alors ou bien $H = H'$, ou bien $[H,H'] \subset O_{2'}(H) \cap O_{2'}(H')$.

Alors G est un groupe de type de Lie en caractéristique impaire, ou l'un des quatre groupes suivants : $B_3(2)$, $D_4(2)$, le groupe de Mathieu M_{11} , le groupe de Mathieu M_{12} .

(En fait, d'après la classification des groupes finis dont les 2-sous-groupes de Sylow sont quaternioniens [1]*, on peut supposer que chaque élément H de* $\mathcal{H}$ *n'a qu'une seule involution, et que* $H/O_{2'}(H)$ *est, ou bien un 2-groupe quaternionien, ou bien un groupe* $SL_2(q)$ *pour q impair, ou bien encore l'unique extension centrale non scindée du groupe alterné de degré 7 par le groupe à deux éléments — rappelons que* $SL_2(9)$ *est extension centrale du groupe alterné de degré 6 —)*

En première approximation, on peut dire que la démonstration du théorème précédent suit le même principe inductif que celle du théorème 4.3 , bien que la situation soit ici nettement plus compliquée : il est à noter que ce dernier théorème ne comporte, dans son énoncé, aucune hypothèse sur les groupes $O_{2'}(H)$ pour $H \in \mathcal{H}$; afin d'obtenir des informations sur ces groupes, Aschbacher utilise le foncteur de recollement défini en 3.5 ci-dessus. Ceci lui impose, d'une part d'avoir recours au théorème de Bender (1.9), et d'autre part de traiter séparément les cas où G ne possède pas "suffisamment" de sous-groupes isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. De plus, il doit faire un usage essentiel du théorème 4.3 afin de reconnaitre une certaine section W de G qu'il définit ainsi : soit P un 2-sous-groupe de Sylow de G , soit T le groupe engendré par les sous-groupes cycliques de P qui sont contenus dans un 2-sous-groupe de Sylow d'un élément H de $\mathcal{H}$ et y sont d'indice 2 ; enfin, soit N le groupe engendré par les 2-sous-groupes de Sylow Q des éléments H de $\mathcal{H}$ tels que $Q \subset N_G(T)$; on pose alors $W = N/TO_{2'}(N)$. Au moins pour le cas où $G = PSL_n(q)$ avec $q \equiv 1$ mod.4 , il est facile de vérifier que le groupe W ainsi défini est le groupe de Weyl de G .

A l'étape finale de la démonstration, et hormis quelques exceptions, le groupe G est identifié à l'aide de résultats du type de 4.1.

5. CATÉGORIE DE FROBENIUS NON FIDÈLE

Supposons que G soit un groupe fini simple non abélien: dorénavant, nous allons décrire la démarche suivie pour démontrer que G est isomorphe à un élément de $\mathcal{K}$.

Dans ce paragraphe, nous supposons que la catégorie de Frobenius de G relative au nombre premier 2 n'est pas fidèle. Il s'agit de démontrer alors que, sauf 18 exceptions sporadiques, G est soit un groupe alterné, soit un groupe de type de Lie en caractéristique impaire.

Puisque $\mathcal{F}_G$ n'est pas fidèle, il existe, grâce à la proposition 2.2, une involution t de G telle que $L_2(C_G(t)) \neq \{1\}$. Nous pouvons faire un raisonnement inductif et supposer que les quotients simples de $L_2(C_G(t))$ sont connus. Mais il serait très gênant de n'avoir *a priori* aucune borne sur le nombre de quotients qui apparaissent — d'autant plus que, dans le cas des groupes simples connus, cette borne est 2 . Le résultat suivant, dû à Aschbacher [3], est fondamental de ce point de vue.

5.1. <u>THEOREME</u>. <u>Soient</u> G <u>un groupe fini et</u> L <u>un sous-groupe de</u> G <u>tel que</u> $L/O_{2'}(L)$ <u>soit image homomorphe non triviale d'un produit direct d'extensions centrales parfaites de groupes simples non abéliens. Soit</u> N <u>le normalisateur de</u> L <u>dans</u> G . <u>Supposons que</u> N <u>soit un sous-groupe propre de</u> G <u>et que les deux assertions suivantes soient satisfaites</u> :

(1) <u>Si</u> t <u>est une involution de</u> N <u>qui centralise un quotient simple non abélien de</u> L , <u>alors</u> $C_G(t) \subset N$.

(2) <u>Pour tout</u> g <u>dans</u> G <u>tel que</u> $L \cap N^g$ <u>s'envoie surjectivement sur un quotient simple non abélien de</u> L , <u>on a</u> $g \in N$.

<u>Alors, ou bien</u> L <u>n'a qu'un seul quotient simple non abélien, ou bien</u> L <u>possède deux sous-groupes normaux</u> K <u>et</u> K' <u>dont le produit est égale à</u> L , <u>dont les 2-sous-groupes de Sylow sont quaternioniens, et dont l'intersection possède une involution</u> s <u>telle que</u> $N = C_G(s).O_{2'}(L)$.

(La deuxième possibilité se trouve réalisée, par exemple, dans le groupe projectif symplectique de dimension 4 en caractéristique impaire, le groupe N étant alors l'image du stabilisateur d'une décomposition orthogonale en deux sous-espaces de dimension 2 de l'espace vectoriel).

Remarquons tout de suite que lorsque la deuxième possibilité est vérifiée, la classe de conjugaison du groupe $H = C_K(s)$ satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème 4.4, et le groupe G peut être alors reconnu grâce à ce théorème. En effet, dans ce cas le groupe $C_K(s)$ est normal dans $L_2(C_G(s))$ et l'assertion résulte de la proposition suivante, due à Aschbacher.

5.2. PROPOSITION. *Soient G un groupe fini, t et t' deux involutions de G telles que $t \in L_2(C_G(t))$ et $t' \in L_2(C_G(t'))$. Soit H un sous-groupe minimal parmi les sous-groupes non résolubles normaux dans $L_2(C_G(t))$ qui contiennent t ; de même, soit H' un sous-groupe minimal parmi les sous-groupes non résolubles normaux dans $L_2(C_G(t'))$ qui contiennent t'. Supposons que les 2-sous-groupes de Sylow de H et H' soient quaternioniens. Alors*

(1) *on a $t \in N_G(H')$ si et seulement si $t' \in N_G(H)$,*

(2) *si un 2-sous-groupe d'ordre au moins 4 de H centralise t' , il normalise H'.*

Ainsi, avec les notations de 5.2, t est l'unique involution de H ; par suite, si g est un élément de G tel que $H \cap H^g$ contienne une involution, on a $g \in C_G(t)$. Il en résulte que, ou $H = H^g$, ou $[H,H^g] \subset O_{2'}(H) \cap O_{2'}(H^g)$. On a donc bien

5.3. *Les notations et les hypothèses étant celles de 5.2, les classes de conju-gaison de H et de H' dans G satisfont aux conditions (1) et (2) du théorème 4.4.*

Examinons à présent une démarche qui permet de se ramener aux hypothèses du théorème 5.1.

On cherche d'abord à démontrer que, pour tout 2-centralisateur X de G , les groupes $L_2(X)$ et $O_{2'}(X)$ se centralisent (rappelons que tel est le cas si G est un élément de $\mathcal{K}$). Pour ce faire, on utilise des foncteurs de recollement adaptés à la situation (cf [41] par exemple). Une fois cette assertion établie, on peut par exemple choisir pour L un sous-groupe normal de l'un des groupes $L_2(X)$ (X un 2-centralisateur de G) de sorte que les quotients simples de L soient d'ordre maximal. C'est en utilisant une démarche analogue qu'Aschbacher peut démontrer le théorème suivant.

5.4. THEOREME. *Soit G un groupe fini simple non abélien tel qu'il existe un 2-centralisateur X avec $L_2(X) \neq \{1\}$ et que, pour tout 2-centralisateur X de G , on ait $[L_2(X), O_{2'}(X)] = \{1\}$. Alors l'une des assertions suivantes est vraie :*

(i) *Il existe un sous-groupe L de G tel que $L/Z(L)$ est simple, L ne centralise aucun de ses conjugués dans G , $C_G(L)$ est d'ordre pair et pour tout 2-sous-groupe non trivial P de $C_G(L)$ on a $L = L_2(C_G(P))$.*

(ii) *Il existe une involution t dans G telle que $L_2(C_G(t))$ possède un sous-groupe normal H ayant des 2-sous-groupes de Sylow quaternioniens et contenant t .*

Dans le cas où (ii) est vraie, grâce à 5.3 et quitte à choisir H minimal, on voit que la classe de conjugaison de H dans G satisfait aux condi-tions (1) et (2) du théorème 4.4, et G peut alors être identifié à l'aide de ce théorème.

Dans le cas où (i) est vraie, on voit que pour tout $g \in G - N_G(L)$

l'intersection $C_G(L) \cap C_G(L^g)$ est d'ordre impair ; par conséquent, si les 2-sous-groupes de Sylow de $C_G(L)$ sont quaternioniens, la classe de conjugaison de $C_G(L)$ satisfait encore aux conditions (1) et (2) du théorème 4.4.

Revenons à la situation générale décrite au début du paragraphe 5. Nous avons choisi une involution t de G telle que $L_2(C_G(t)) \neq \{1\}$; posons $L = L_2(C_G(t))$ et désignons par S un quotient simple de L . En raisonnant par récurrence, nous pouvons supposer que S est connu. Nous allons décrire, très sommairement, comment identifier G lorsque S parcourt l'ensemble des éléments "suffisamment grands" de $\mathcal{K}$.

Supposons d'abord que S soit un groupe de type de Lie en caractéristique impaire et de rang au moins 2 . On sait qu'il existe alors une involution t' dans L telle que $L_2(C_L(t'))$ possède un sous-groupe normal H' avec $t' \in H'$ et $H'/O_{2'}(H') \simeq SL_2(q)$ où q est impair. D'après la proposition 2.2, on obtient

$$t' \in H' \lhd L_2(C_G(<t,t'>)) \subset L_2(C_G(t')) .$$

Pour identifier G , à l'aide des théorèmes 5.3 et 4.4, il suffirait alors de démontrer que H' est encore normal dans $L_2(C_G(t'))$. Le lecteur pourra se reporter aux travaux de Thompson et Burgoyne [14] pour y trouver la démonstration du résultat suivant.

5.5. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien. Supposons qu'il existe une involution t dans G telle que $L_2(C_G(t))$ possède un quotient simple isomorphe à un groupe de Lie en caractéristique impaire et de rang au moins 2 . Alors G est également un groupe de type de Lie en caractéristique impaire.

Supposons maintenant que S soit un groupe alterné de degré au moins 12. Il s'agit de démontrer que G est également un groupe alterné. En choisissant t de sorte que le degré de S soit le plus grand possible, on essaie d'abord de démontrer que S n'est isomorphe à aucun autre quotient de L , et en particulier que $C_G(t)$ stabilise S : lorsque l'hypothèse du théorème 5.4 est satisfaite, on se ramène au cas où L vérifie la condition (i) de ce théorème et l'unicité de S est alors claire ; sinon, on en profite pour construire des foncteurs de recollement dans le but de vérifier les conditions (1) et (2) de 5.1 pour le sous-groupe normal minimal de L qui couvre tous les quotients isomorphes à S , et on applique ce théorème 5.1. Ensuite, 1.4 garantit l'existence de $g \in G - C_G(t)$ tel que $t^g \in C_G(t)$ et en particulier t^g normalise le plus petit sous-groupe normal H de L qui couvre S ; pour la même raison, t normalise H^g . On essaie alors de démontrer que $<H,H^g>/O_{2'}(<H,H^g>)$ est un groupe alterné et que $<H,H^g>$ est un sous-groupe de contrôle fort de G , ce qui permet de conclure grâce au théorème 1.9. Tel est, très grossièrement résumé, le schéma que suivent Aschbacher-Seitz [8] et Solomon [41], [42], [43], pour établir le résultat suivant.

5.6. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien. Supposons qu'il existe une involution t dans G telle que $L_2(C_G(t))$ posssède un quotient isomorphe au groupe alterné de degré n avec $n > 11$. Alors G est également isomorphe à un groupe alterné.

Quitte à laisser de côté les groupes sporadiques et les "petits cas", il nous reste donc à examiner le cas où, pour toute involution s de G , les quo--tients simples de $L_2(C_G(s))$ sont des groupes de type de Lie en caractéristique 2. Il faut vérifier que cette hypothèse est absurde. Supposons de plus que les groupes de type de Lie qui interviennent sont de rang au moins 5 ; la conclusion de la proposition 2.5 est alors encore vraie dans notre situation, avec $p = 2$. A l'aide des foncteurs de recollement qui en résultent, on en déduit que

$$O_{2'}(C_G(s)) = \{1\} \quad \text{pour toute involution } s \text{ de } G ,$$

et en particulier que l'hypothèse du théorème 5.4 est satisfaite. Ainsi, l'asser--tion (i) de 5.4 est vérifiée ; de plus, on sait que les 2-sous-groupes de Sylow de $C_G(L)$ ne sont pas quaternioniens. On peut donc développer le même argument que ci-dessus pour aboutir à une contradiction. D'une manière plus précise, on a le résultat suivant, dû à Aschbacher-Seitz [8].

5.7. THEOREME. Soit G un groupe fini avec $O_{2'}(G) = \{1\}$ et possédant un sous-groupe L qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) le quotient $L/Z(L)$ est un groupe simple de type de Lie en caractéristique 2 et de rang au moins 5 ,

(2) le groupe L ne centralise aucun de ses conjugués dans G ,

(3) le groupe $C_G(L)$ est d'ordre pair, et pour tout 2-sous-groupe non trivial P de $C_G(L)$, on a $L = L_2(C_G(P))$.

Alors, ou bien $L_2(G) \simeq L \times L$, ou bien $L_2(G)$ est un groupe de type de Lie en caractéristique 2 et $L_2(G) \cap C_G(L)$ est d'ordre impair. En particulier, G n'est pas simple.

6. CATÉGORIE DE FROBENIUS FIDÈLE

Dans ce paragraphe, nous supposons que la catégorie de Frobenius de G relative au nombre premier 2 est fidèle. Nous appelons 2-normalisateur de G les normalisateurs de ses 2-sous-groupes non triviaux.

Rappelons que la simplicité de G entraîne l'existence d'au moins un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ — sinon, le centralisateur d'une involution est un sous-groupe de contrôle fort de G , et il suffit de faire appel à 1.3

pour voir que G ne peut être simple. Quitte à laisser de côté quelques "petis cas" — étudiés dans [1] par des méthodes *ad hoc* faisant usage de la théorie des caractères — nous allons supposer ici que G possède au moins un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Dans ce cas, grâce au théorème 3.4, dire que $\mathcal{F}_G$ est fidèle équivaut à dire que $C_X(O_2(X)) \subset O_2(X)$ pour tout 2-centralisateur X de G .

Il s'agit de démontrer alors que, sauf 7 exceptions sporadiques, G est un groupe de type de Lie en caractéristique 2 . Fixons donc notre attention sur les groupes de type de Lie en caractéristique 2 ; deux méthodes sont essentiel--lement utilisées pour identifier ces groupes :

- Lorsque le rang est au moins 3 et que le corps de définition a au moins 4 éléments, on met en évidence "suffisamment" de sous--groupes réductifs — ce qui implique d'étudier les ℓ-centralisateurs pour des nombres premiers ℓ impairs — et on identifie le groupe à l'aide de résultats du type de 4.1.
- Dans les autres cas, on étudie les sous-groupes paraboliques — ce qui revient, d'après Borel-Tits [10], à étudier les 2-norma--lisateurs — et on identifie le groupe essentiellement à l'aide du théorème 4.3.

Mais comment décider *a priori* quels sont le "rang" et le "corps de définition" de G ? On introduit à ce sujet les paramètres suivants :

6.1. <u>Pour chaque nombre premier impair</u> ℓ , <u>on note</u> $e_\ell(G)$ <u>le plus grand entier</u> n <u>tel que</u> G <u>possède un</u> 2-<u>normalisateur conténant au moins un sous-groupe isomorphe à</u> $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$. <u>On note</u> e(G) <u>le plus grand des</u> $e_\ell(G)$ <u>lorsque</u> ℓ <u>parcourt l'ensemble des nombres premiers impairs</u>.

La résolubilité des groupes d'ordre impair et le théorème 1.1 garantissent que $e(G) > 0$. Si G est un groupe de type de Lie en caractéristique 2 et le corps de définition est de cardinal au moins 4 , e(G) coïncide, à une unité près, avec le rang de G ; par contre, si le corps de définition n'a que deux éléments, e(G) n'approxime que la moitié du rang, mais alors, dans presque tous les cas, on n'a l'égalité $e_\ell(G) = e(G)$ que lorsque $\ell = 3$.

Supposons d'abord que $e(G) > 3$. Dans ce cas, Gorenstein et Lyons étudient la structure locale relative à un nombre premier impair ℓ "bien placé" par rapport à 2 ; or, comme on l'a déjà expliqué dans le premier paragraphe, cette étude locale ne peut aboutir à l'identification de G qu'à l'aide d'un résultat sur les sous-groupes de ℓ-contrôle fort; ce préalable est résolu par le théorème suivant, dû à Aschbacher [7], qui généralise un résultat analogue démontré par Thompson dans le cadre de sa classification des groupes simples minimaux. La démonstration de ce théorème est particulièrement difficile, et fait appel à nombre de résultats auxiliaires.

6.2. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien dont tous les sous--groupes propres sont des $\mathcal{K}$-groupes. Supposons que $e(G) > 3$ et que, pour tout 2-centralisateur X de G, on ait $C_X(O_2(X)) \subset O_2(X)$. Alors, il existe un nombre premier impair ℓ avec $e_\ell(G) > 3$ tel que, si H est un sous-groupe de ℓ-contrôle fort de G, on ait $O_2(H) = \{1\}$.

A l'aide de ce théorème, les travaux de Gorenstein-Lyons [29] et de Gilman-Griess [21] établissent le résultat suivant.

6.3. THEOREME. Les notations et les hypothèses étant celles de 6.2, ou bien G est un groupe de type de Lie en caractéristique 2, ou bien il existe un 2-normalisateur maximal N tel que tout sous-groupe abélien caractéristique de $O_2(N)$ soit cyclique.

Décrivons sommairement la démarche suivie dans la démonstration de 6.3. Le travail de Gorenstein-Lyons [29] consiste à développer l'étude locale de G par rapport aux nombres premiers impairs ℓ qui satisfont à la conclusion du théorème 6.2 et pour lesquels $e_\ell(G)$ est le plus grand possible.

Soit donc ℓ un tel nombre premier, posons $n = e_\ell(G)$ et soit E un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ contenu dans un 2-normalisateur de G. Pour chaque sous-groupe F de E d'ordre ℓ^2, posons $\mathcal{R}(F) = \bigcap_g O_{\ell'}(C_G(g))$ où g parcourt l'ensemble des éléments non triviaux de F : la première étape consiste à démontrer que $\mathcal{R}(F)$ — ou $[\mathcal{R}(F),E]$ si $\ell = 3$ — est d'ordre impair. Pour ceci, Gorenstein et Lyons démontrent à l'aide des propriétés des $\mathcal{K}$-groupes que l'on a $\mathcal{R}(F) \cap C_G(F') = \mathcal{R}(F') \cap C_G(F)$, où F et F' sont des sous-groupes d'ordre ℓ^2 de E, dès que $\ell > 5$. Dans ce cas il résulte du théorème 3.2, d'abord que l'application $\mathcal{R}$ se prolonge en un foncteur de recollement sur E contenu dans G, et ensuite que le sous-groupe $\mathcal{R}(1)$ engendré par les $\mathcal{R}(F)$, où F parcourt l'ensemble des sous-groupes non triviaux de E, est d'ordre premier à ℓ et vérifie $\mathcal{R}(1) \cap C_G(F) = \mathcal{R}(F)$. En désignant par H le normalisateur de $\mathcal{R}(1)$, on en déduit par exemple que H contient $N_G(F)$ pour tout sous-groupe F de E d'ordre au moins ℓ^2, et contient aussi tout sous-groupe K de G d'ordre premier à ℓ normalisé par E. Ainsi, H se présente comme un "bon candidat" à être un sous-groupe de ℓ-contrôle fort de G, auquel cas le choix de ℓ entraîne $O_2(H) = \{1\}$, d'où $O_2(\mathcal{R}(1)) = \{1\}$. L'étude du $\mathcal{K}$-groupe $\mathcal{R}(1)$, compte tenu du choix extrémal de ℓ, montre alors, d'abord que $L_2(\mathcal{R}(1)) = \{1\}$, ensuite que $\mathcal{R}(1)$ doit être d'ordre impair.

(En fait, notre présentation sommaire ne peut rendre compte de la complexité de la démonstration de Gorenstein-Lyons : d'une part nous oublions les cas $\ell = 3$ et $\ell = 5$; d'autre part, même lorsque $\ell > 5$, il est difficile de "se déplacer" de E vers les autres ℓ-sous-groupes abéliens d'exposant ℓ — comme on l'a fait au paragraphe 3 — du fait du choix particulier de E)

Passons à l'étape suivante : on essaie de démontrer une assertion analoque à 5.4.(i) relative au nombre premier ℓ . Le cas où $\ell = 3$ pose des difficultés particulières — qui sont *a priori* prévisibles d'après ce qui a été dit ci-dessus — et c'est alors qu'intervient l'hypothèse suivante :

($\mathcal{H}$) Si N est un 2-normalisateur maximal de G qui contient E , il existe au moins un sous-groupe abélien caractéristique de $O_2(N)$ qui n'est pas cyclique.

Sous cette hypothèse on démontre que G possède un sous-groupe L tel que

(1) Le quotient L/Z(L) est un groupe simple de type de Lie en caractéristique 2 .

(2) Les ℓ-sous-groupes de Sylow de $C_G(L)$ sont cycliques.

(3) Le groupe E normalise L et son image dans le groupe des automorphismes extérieurs de L/Z(L) est contenue dans le sous-groupe des automorphismes extérieurs diagonaux.

(4) Posant $F = E \cap C_G(L)$, on a $|F| = \ell$ et $L = L_\ell(C_G(F))$.

Comme point de départ, on considère un 2-normalisateur maximal N conténant E et on démontre l'existence d'un sous-groupe F de E d'ordre ℓ tel que $[E, O_2(N) \cap C_G(F)] \neq \{1\}$ et $L_\ell(C_G(F)) \neq \{1\}$ à l'aide de l'hypothèse ($\mathcal{H}$), de l'imparité de $\mathcal{R}(F)$ établie dans l'étape précédente, et du choix extrémal de ℓ . Le long travail consiste alors à démontrer que $L_\ell(C_G(F))$ satisfait bien aux conditions (1)-(4) ci-dessus.

En fait, Gorenstein et Lyons poussent l'étude ℓ-locale plus loin en étudiant la structure des groupes $L_\ell(C_G(F'))$ où F' parcourt un certain ensemble de sous-groupes de E d'ordre ℓ ayant un groupe de points fixes sur L "suffisamment gros" : il s'agit de faire apparaître dans chacun un quotient simple E-stable qui soit un groupe de type de Lie en caractéristique 2 et qui ne soit pas "couvert" par L .

A ce stade, Gilman et Griess prennent la relève jusqu'à l'identi--fication de G . "En gros" ils montrent d'abord que le quotient $N_G(E)/C_G(E)$ est un groupe de Weyl en utilisant le groupe de Weyl de L/Z(L) qui apparaît comme sous-groupe; puis ils exhibent, à l'aide de résultats du type de 4.1, un sous-groupe H de G isomorphe à un groupe simple de type de Lie en caracté--ristique 2 qui contient $N_G(E)$, L et des "voisins" de L mis en évidence par Gorenstein et Lyons. On arrive alors aux limites de l'étude ℓ-locale : on sait "à peu près" que H est un sous-groupe de ℓ-contrôle fort de G . Mais ici, H est connu et il a une structure "suffisamment riche" pour "se déplacer" de ℓ à 2 et montrer qu'il est encore un sous-groupe de 2-contrôle fort, donc que $H = G$ d'après le théorème 1.9.

Lorsque $e(G) = 3$, Aschbacher démontre, par des méthodes semblables, que l'alternative de 6.3 est encore valable dans ce cas, à l'aide d'un résultat analogue à 6.2.

CAS OU L'HYPOTHESE (H) N'EST PAS SATISFAITE

Lorsque $e(G) > 2$, il reste maintenant à étudier le cas où il existe un 2-normalisateur maximal N tel que tout sous-groupe abélien caracté--ristique de $O_2(N)$ soit cyclique. Dans ce cas, la structure de $O_2(N)$ est bien connue grâce à un résultat classique de P. Hall : il existe un espace vectoriel V sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et un 2-groupe T cyclique, dihédral, semi-dihédral ou quaternionien, tels que $O_2(N)$ soit isomorphe au groupe défini sur $T \times V \times V°$ par le produit :

$$(t,v,\varphi)(t',v',\varphi') = (tt'\varphi(v'), v+v', \varphi+\varphi')$$

où $V°$ est le dual de V et où l'on a identifié le groupe additif de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au sous-groupe d'ordre 2 de $Z(T)$.

Il n'est pas difficile d'exhiber une telle situation dans les groupes de Chevalley sur le corps à deux éléments lorsque toutes les racines ont même longueur — en fait, dans ce cas T est d'ordre 2. D'une manière analogue, on obtient le même résultat dans les groupes tordus correspondants lorsque le corps des point fixes est de cardinal 2. Les résultats d'Aschbacher [5], Timmesfeld [48] et S. Smith [39], [40] montrent que ce sont les seuls cas, hormis quelques exceptions lorsque $\dim(V) < 6$. En particulier, ils démontrent le théorème suivant.

6.4. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien tel que, pour tout 2-centralisateur X de G, on ait $C_X(O_2(X)) \subset O_2(X)$. Supposons qu'il existe un 2-normalisateur maximal N de G tel que $O_2(N)$ contienne un sous-groupe (abélien) d'exposant 2 et d'ordre 2^8, et tel que tout sous-groupe abélien caractéristique de $O_2(N)$ soit cyclique. Alors, G est un groupe de type de Lie défini sur le corps à deux éléments.

Donnons une idée de la démonstration. Aschbacher montre d'abord que sous les hypothèses ci-dessus, T est soit d'ordre 2, soit dihédral ou quaternionien d'ordre 8. Dans ce cas, en posant $P = O_2(N)$, le quotient $P/Z(P)$ est un groupe abélien d'exposant 2 et l'application qui à chaque élément de P associe son carré induit une forme quadratique sur $P/Z(P)$ à valeurs dans $Z(P)$; or, $|Z(P)| = 2$ et si z est l'involution de $Z(P)$, il est clair que $N = C_G(z)$; ainsi, N/P s'identifie à un sous-groupe du groupe orthogonale de $P/Z(P)$. D'autre part, d'après 1.4, il existe $g \in G - C_G(z)$ tel que $z^g \in C_G(z)$. Alors, Timmesfeld étudie l'action de $P^g \cap N$ sur l'espace $P/Z(P)$, ce qui lui permet "en gros" d'identifier N/P grâce au théorème 4.3 (le groupe orthogonale de $P/Z(P)$ possède bien une classe d'involutions radicielles).

La dernière étape — developpée par Timmesfeld pour $A_n(2)$ et ${}^2A_n(2)$ et par S. Smith dans les autres cas — consiste à démontrer que la classe de conjugaison de z dans G est encore une classe d'involutions radicielles, auquel cas le théorème 4.2 permet de conclûre.

(On remarquera qu'ici on s'appuie à nouveau sur la structure locale de G relative au nombre premier 2).

CAS OU $e(G) < 3$

Il s'agit ici d'identifier les groupes de type de Lie de rang au plus 2 en caractéristique 2 , hormis trois cas de rang supérieur définis sur le corps de cardinal 2 et cinq groupes sporadiques. Cette partie a été la dernière en date à être résolue et la classification a été considérée comme achevée lorsque Mason a annoncé que la démonstration du résultat suivant était complète.

6.5. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien dont tout sous-groupe propre est un $\mathcal{K}$-groupe. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) On a $e(G) < 3$.

(2) Pour tout 2-centralisateur X de G , on a $C_X(O_2(X)) \subset O_2(X)$.

(3) Le groupe G possède au moins un 2-normalisateur non résoluble.

(4) Tout 2-sous-groupe de Sylow de G est contenu dans au moins deux 2-normalisateurs maximaux de G .

Alors, G est un groupe de type de Lie de rang 2 en caractéristique 2 , ou l'un des huit groupes suivants : $A_3(2)$, $A_4(2)$, $B_3(2)$, les groupes de Mathieu M_{22} , M_{23} , M_{24} , les groupes de Janko J_3 , J_4 .

Le 15 juillet dernier Mason ne disposait pas encore d'un preprint et on a dû se contenter de lire son exposé dans [33] où il décrit une partie de sa démarche (*)."En gros" il s'agit de mettre en évidence la structure des groupes paraboliques — mis à part les cas sporadiques. C'est à dire, en partant de 2-normalisateurs N non résolubles, il s'agit d'analyser quels éléments de $\mathcal{K}$ peuvent intervenir dans $N/O_2(N)$ et quelles représentations fait apparaître l'action de N sur $O_2(N)$. Dans la plupart des cas étudiés, l'identification finale est faite à l'aide du théorème 4.3.

Le cas où les 2-normalisateurs de G sont tous résolubles était déjà résolu grâce aux travaux de Thompson [46], Janko [32], F. Smith [38], Gorenstein--Lyons [28], qui fournissent le résultat suivant.

6.6. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien. Supposons que tout 2-normalisateur de G soit résoluble et que G possède un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Alors, G est un groupe de type de Lie de rang 1 en caractéristique 2 ou le groupe dérivé de ${}^2F_4(2)$.

(*) Dans cet exposé, le groupe de Janko J_3 n'apparaît pas dans la liste des groupes simples connus satisfaisant aux conditions (1)-(4) ci-dessus. Il s'agit sans doute d'une coquille, car il suffit de regarder les propriétés de J_3 énoncées par exemple dans [29] pour se convaincre qu'il satisfait à ces conditions.

Enfin, le cas où un 2-sous-groupe de Sylow de G n'est contenu que dans un unique 2-normalisateur maximal de G peut être traité grâce aux travaux récents d'Aschbacher [7] et de Solomon [44] qui jouent un rôle auxiliaire dans la démonstration du théorème 6.2. En particulier, ils démontrent le résultat suivant.

6.7. THEOREME. Soit G un groupe fini simple non abélien. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) Pour tout 2-centralisateur X de G , on a $C_X(O_2(X)) \subset O_2(X)$.

(2) Le groupe G possède un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

(3) Tout 2-sous-groupe de Sylow de G n'est contenu que dans un seul 2-normalisateur maximal de G .

Alors, G est un groupe de type de Lie de rang 1 en caractéristique 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.ALPERIN, R.BRAUER et D.GORENSTEIN — Finite simple groups of 2-rank two, Scripta Math.,29(1973) 191-214.

[2] M.ASCHBACHER — Finite groups generated by odd transpositions, I-IV, Math. Z.,127(1972) 45-56; J.Algebra,26(1973) 451--459; 460-478; 479-491.

[3] M.ASCHBACHER — On finite groups of component type, Illinois J.Math., 19(1975) 87-115.

[4] M.ASCHBACHER — Standard subgroups of alternating type centralized by a 4-group (à paraître)

[5] M.ASCHBACHER — Finite groups in which the generalized Fitting group of the centralizer of some involution is symplectic but not extraspecial, Comm.Algebra,4(1976) 595-616.

[6] M.ASCHBACHER — A characterization of Chevalley groups over finite fields of odd order, Ann.of Math.,106(1977) 353-398; 399-468; correction,111(1980) 411-414.

[7] M.ASCHBACHER — The uniqueness case for finite groups (à paraître).

[8] M.ASCHBACHER et G.SEITZ — On finite groups with a standard component of known type, Osaka J.Math.,13(1976) 439-482;II (à paraître)

[9] H.BENDER — Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt, J.Algebra, 17(1971) 527-554.

[10] A.BOREL et J.TITS — Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques des groupes réductifs,I Invent.Math.,12(1971) 95-104.

[11] E.BOMBIERI — Thompson's problem, ($\sigma^2 = 3$), Invent.Math.,58(1980) 77-100

[12] R.BRAUER — "On the structure of groups of finite order", Proc. Internat.Congr.Math.Amsterdam 1954, I, 209-217

[13] M.BROUE — p-Composants d'un groupe fini et B-conjeture de Thompson, preprint 1977

[14] N.BURGOYNE — Finite groups with Chevalley-type components, Pacific J.Math.,72(1977) 341-350.

[15] C.CHEVALLEY — Sur certains groupes simples, Tôhoku Math.J.,7(1955) 14-66.

[16] W.FEIT — On a class of doubly transitive permutation groups, Illinois J.Math.,4(1960) 170-186.

[17] W.FEIT et J.THOMPSON — Solvability of groups of odd order, Pacific J.Math., 13(1963) 775-1029.

[18] B.FISCHER — Groups generated by 3-transpositions, Invent.Math., 13(1971) 232-246; University of Warwick, preprint.

[19] P.FONG et G.SEITZ — Groups with (B,N)-pair of rank 1, I,II, Invent. Math.,21(1973) 1-57; 24(1974) 191-237.

[20] G.FROBENIUS — Über auflösbare Gruppen, V, S.-B.Preuss.Akad. Berlin (1901) 1324-1329.

[21] R.GILMAN et R.GRIESS — A characterization of finite groups of Lie type in characteristic 2 (en préparation)

[22] G.GLAUBERMAN — Central elements in core-free groups, J.Algebra, 4(1966) 403-420.

[23] G.GLAUBERMAN — On solvable signalizer functors in finite groups, Proc.London Math.Soc.(3),33(1976) 1-27.

[24] D.GOLDSCHMIDT — Solvable signalizer functors on finite groups, J.Algebra,21(1972) 137-148.

[25] D.GOLDSCHMIDT — Strongly closed 2-subgroups of finite groups, Ann.of Math.,102(1975) 475-489.

[26] D.GORENSTEIN — On the centralizers of involutions in finite groups, J.Algebra,11(1969) 243-277.

[27] D.GORENSTEIN et K.HARADA — Finite groups whose 2-subgroups are generated by most 4 elements, Mem.Amer.Math.Soc. No.147(1974) 1-464.

[28] D.GORENSTEIN et R.LYONS — Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups, J.Algebra,38(1976) 453-522.

[29] D.GORENSTEIN et R.LYONS — The local structure of finite groups of characte--ristic 2 (à paraître)

[30] D.GORENSTEIN et J.WALTER — Centralizers of involutions in balanced groups, J.Algebra,20(1972) 284-319.

[31] C.HERING, W.KANTOR et G.SEITZ — Finite groups with a split BN-pair of rank 1, I,II, J.Algebra,20(1972) 435-475; 476-494.

[32] Z.JANKO — Nonsolvable finite groups all of whose 2-local subgroups are solvable I,J.Algebra 21(1972) 458-517.

[33] G.MASON — "Quasithin groups", Finite Simple Groups II, ed. M.Collins, Academic Press, 1980.

[34] P.MACBRIDE — Nonsolvable signalizer functors on finite groups, (à paraître)

[35] L.PUIG — Structure locale dans les groupes finis, Bull.Soc. Math.France, Mémoire 47(1976).

[36] G.SEITZ — Chevalley groups as standard subgroups I, Illinois J.Math.,90(1979) 36-57; II,III (à paraître).

[37] E.SHULT — On a class of doubly transitive groups, Illinois J.Math.,16(1972) 434-455.

[38] F.SMITH — Finite simple groups all of whose 2-local subgroups are solvable, J.Algebra,34(1975) 481-520.

[39] S.SMITH — A charectarization of orthogonal groups over GF(2), J.Algebra,62(1980) 39-60.

[40] S.SMITH — A characterization of finite Chevalley and twisted groups of type E over GF(2), J.Algebra,62(1980) 101-117.

[41] R.SOLOMON — Finite groups of intrinsec 2-components of type A_n, J.Algebra,33(1975) 498-522.

[42] R.SOLOMON — Standard components of alternating type, I,II, J.Algebra,41(1976) 496-514; 47(1977) 162-179.

[43] R.SOLOMON — 2-signalizers in finite groups of alternating type, Comm.Algebra,6(1978) 529-549.

[44] R.SOLOMON — On certain 2-local blocks, Proc.London Math.Soc. (à paraître).

[45] M.SUZUKI — On a class of doubly transitive groups, Ann.of Math.,75(1962) 105-145.

[46] J.THOMPSON — Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, I-VI, Bull.Amer.Math.Soc., 74(1968) 383-437; Pacific J.Math.,33(1970) 431-536; 39(1971) 483-534; 48(1973) 511-592; 50(1974) 215-297; 51(1974) 573-630.

[47] F.TIMMESFELD — Groups generated by root-involutions, I,II, J.Algebra,33(1975) 75-135; 35(1975) 367-441.

[48] F.TIMMESFELD — Finite simple groups in which the generalized Fitting group of the centralizer of some involution is extraspecial, Ann.of Math.,107(1978) 297-369.

[49] J.TITS — "Buildings of Spherical Type and Finite (B,N)-Pairs" (Lecture Notes 386), Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[50] H.ZASSENHAUS — Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 11(1936) 17-40.

Michel BROUE et Lluis PUIG
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05