DALE HUSEMOLLER

# La décomposition des espaces des lacets et la torsion impaire des groupes d'homotopie

*Séminaire N. Bourbaki*, 1981, exp. n° 547, p. 54-72

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__54_0>

# LA DÉCOMPOSITION DES ESPACES DES LACETS ET LA TORSION IMPAIRE DES GROUPES D'HOMOTOPIE

[d'après F. COHEN, J.C. MOORE, J. NEISENDORFER, et P. SELICK]

par Dale HUSEMOLLER

Depuis la thèse de Serre [21], nous savons que les groupes d'homotopie des sphères sont finis sauf pour deux exceptions: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z} + (\text{fini})$. Les résultats classiques sont $\pi_i(S^n) = 0$ si $i < n$ et $\pi_i(S^1) = 0$ si $i > 1$. La determination des p - composants $\pi_*(S^n)_{(p)}$ des groupes $\pi_*(S^n)$ a commencé avec Serre [21], [22] et la thèse de Moore [12], mais il est encore un probleme trop difficile. Toutefois, on a de bons résultats sur la hauteur de la p - torsion pour n fixe.

Le fibré de Hopf $h : S^3 \longrightarrow S^2$ de fibre $S^1$ fournit un isomorphisme $h_* : \pi_i(S^3) \longrightarrow \pi_i(S^2)$ si $i \geqq 3$, le produit de $\Omega(h)$ et le plongement $S^1 \longrightarrow \Omega S^2$ est une équivalence d'homotopie $S^1 \times \Omega S^3 \longrightarrow \Omega S^2$. Alors $\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$, et $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ est fini si $i \geqq 4$. Nous avons aussi les résultats:

$$\pi_4(S^3) = \pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2, \quad \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12, \quad \pi_{2p}(S^3)_{(p)} = \mathbb{Z}/p,$$
$$\text{et } \pi_i(S^3)_{(p)} = 0 \text{ si } i < 2p.$$

Dans le travail de James [9] et [10] et de Toda [24] on trouve la relation

$$p^2\pi_i(S^3)_{(p)} = 0 \quad \text{si } i \geqq 4$$

pour tout p. Si $p = 2$, le calcul $\pi_6(S^3)_{(2)} = \mathbb{Z}/4$ montre que la hauteur de la 2 - torsion est $2^2$, mais M. Barratt a conjecturé que la hauteur de la p - torsion est p si p est impair.

THÉORÈME. (Selick [20]) <u>Pour</u> p <u>impair</u> $p\pi_i(S^3)_{(p)} = 0$ <u>si</u> $i \geqq 4$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de Selick puisque le théorème est un cas particulier des résultats qui suivent sur $S^{2n+1}$ pour tout n. Il existe une application $\Omega S^{4n-1} \longrightarrow \Omega S^{2n}$, qui généralise $\Omega h : \Omega S^3 \longrightarrow \Omega S^2$, telle que le produit de cette application et du plongement $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega S^{2n}$, tensorisé par $\mathbb{Z}[1/2]$, soit une équivalence d'homotopie $S^{2n-1}[1/2] \times \Omega S^{4n-1}[1/2] \longrightarrow \Omega S^{2n}[1/2]$, voir [12], [22]. Pour p impair, il suffit alors d'étudier les groupes d'homotopie des sphères impaires et la suspension double

$$E^2 : \pi_i(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_i(\Omega^2 S^{2n+1}) = \pi_{i+2}(S^{2n+1})$$

induite par $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}$.

Dans le travail [24], Toda montre que l'on a la relation $p^{2n}\pi_i(S^{2n+1})_{(p)} = 0$ si $i > 2n+1$ pour tout p impair. Barratt a conjecturé que la hauteur de la p-torsion dans le groupe $\pi_i(S^{2n+1})_{(p)}$ est $p^n$. Cette conjecture de Barratt résulte du théorème suivant. Rappelons qu'une sphère impaire localisée en un nombre premier p impair $S^{2n-1}_{(p)}$ a une structure de H-espace. L'application $p : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow S^{2n-1}_{(p)}$ est, donc, définie par $x \longmapsto x^p$.

THÉORÈME. (Cohen, Moore, et Neisendorfer [3], [4]). <u>L'application de suspension double</u> $E^2 : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$, <u>localisée en</u> p <u>impair, a un quasi-inverse</u> $\pi : \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)} \longrightarrow S^{2n-1}_{(p)}$ <u>tel que les composés</u> $E^2 \circ \pi = p$ <u>et</u> $\pi \circ E^2 = p$ <u>sur les</u> H - <u>espaces</u> $\Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$ <u>et</u> $S^{2n-1}_{(p)}$.

On a la suite des p-groupes abéliens

$$0 = \pi_j(S^1)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+2}(S^3)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+4}(S^5)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+2n}(S^{2n+1})_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \cdots$$

Par récurrence sur n, cela démontre la conjecture de Barratt

$$\boxed{p^n\pi_j(S^{2n+1})_{(p)} = 0 \quad \text{si } i > 2n+1}$$

Rappelons que $\tilde{K}(\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2^{a(n)}$ où $2^{a(n)} = c_{2n}$ [7, p. 219-221], et aussi $a(n+4) = 4 + a(n)$, $a(0) = 0$, $a(1) = 2$, $a(2) = 3$, $a(3) = 3$, $a(4) = 4, \ldots$

CONJECTURE. - (Barratt et Mahowald)

(1) $2^{a(n)}$. Tors $\pi_*(S^{2n+1})_{(2)} = 0$, et il existe un élément d'order $2^{a(n)}$.

(2) $2^{a(2n-1)}$. Tors $\pi_*(S^{2n})_{(2)} = 0$, et il existe un élément d'order $2^{a(2n-1)}$.

## §1. L'homotopie modulo q des espaces lacets

Pour étudier la torsion de l'homologie $H_*(X) = H_*(X, \mathbb{Z})$, on utilise l'homologie $H_*(X, \mathbb{Z}/q)$ avec les coefficients finis $\mathbb{Z}/q$. C'est la même chose pour l'homotopie. La $\mathbb{Z}/q$ - sphère $S^n(q)$ ou espace de Moore, voir [11] et [18], se définit comme la cofibre de l'application de degré q,

$$S^{n-1} \xrightarrow{q} S^{n-1} \longrightarrow S^n(q) = S^{n-1} \cup_q e^n \quad (n > 1).$$

Les trois auteurs emploient la notation $P^n(q)$ pour $S^n(q)$, mais cette notation est réservée pour les espaces projectifs. Notons que $S^n(q)$ est une suspension $S(S^{n-1}(q)) = S^n(q)$ si $n > 2$. Les groupes d'homotopie (absolus ) sont $\pi_i(X) = [S^i, X]$ si $i \geqq 1$, et les groupes d'homotopie modulo q sont $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q) = [S^i(q), X]$ pour $i \geqq 2$; la structure des groupes se définit comme la structure de la suspension sur $S^i$ et $S^i(q)$.

Vu que $[S^n(2), S^n(2)] = \mathbb{Z}/4$ et $[S^n(q), S^n(q)] = \mathbb{Z}/q$ pour q impair, $(n \geqq 4)$, nous nous limitons au cas q impair. Dans ce cas-là, le groupe $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q)$ est un module sur l'anneau $\mathbb{Z}/q$.

Pour un espace X muni d'un point-base, décomposons l'homologie $H_*(X,R) = R \oplus \bar{H}_*(X,R)$ où $R = \mathrm{im}(H_*(*,R) \longrightarrow H_*(X,R))$ et $\bar{H}_*(X,R)$ est l'homologie réduite. Dans l'exposé, R désigne un anneau commutatif ayant un élément unité. Le composé $X \longrightarrow X \times X \longrightarrow X \wedge X$ induit un morphisme

$$\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(X \wedge X,R),$$

et le sous-foncteur $PH_*(X,R)$ des éléments primitifs se définit comme

$$PH_*(X,R) = \ker(\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(X \wedge X,R)).$$

Si $H_*(X,R)$ est R - plat, alors $\bar{H}_*(X \wedge X,R) = \bar{H}_*(X,R) \otimes \bar{H}_*(X,R)$ par le théorème de Künneth, et pour $x \in H_*(X,R)$, on a $x \in PH_*(X,R)$ si et seulement si $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, où $\Delta : H_*(X,R) \longrightarrow H_*(X,R) \otimes H_*(X,R)$ est la comultiplication sur la coalgèbre $H_*(X,R)$. Si $X = S(Y)$ est une suspension, alors $PH_*(X,R) = \bar{H}_*(X,R)$. Par exemple, $PH_*(S^n(q),R) = \bar{H}_*(S^n(q),R)$.

Choisissons un générateur $H_n(S^n(q), \mathbb{Z}/q) = \mathbb{Z}/q.i_n$, et définissons le <u>morphisme de Hurewicz</u> $\phi : \pi_n(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/q)$ par la relation $\phi([u]) = u_*(i_n)$ où $u : S^n(q) \longrightarrow X$ est une application. Le générateur est compatible avec un générateur de $H_n(S^n, \mathbb{Z})$, qui est donné.

(2.1) THÉORÈME. (de Hurewicz modulo q, voir [14], [15]).- Soit X un espace 1 - connexe. Alors $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q) = 0$ pour $i < n$ si et seulement si $\bar{H}_i(X, \mathbb{Z}/q) = 0$ pour $i < n$, et $\phi : \pi_i(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z}/q)$ est un isomorphisme pour $i = n$ et un épimorphisme pour $i = n + 1$.

La suite cofibrée, qui définit $S^n(q)$, se prolonge à

$$S^{n-1} \xrightarrow{q} S^{n-1} \longrightarrow S^n(q) \longrightarrow S^n \xrightarrow{q} S^n ,$$

et elle donne un couple exact:

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X) \arrow[rr] & & \pi_*(X) \arrow[dl] \\ & \pi_*(X, \mathbb{Z}/q). \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme de Hurewicz est un morphisme des couples exacts

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X) \arrow[rr, "q"] & & \pi_*(X) \arrow[dl] & & H_*(X) \arrow[rr, "q"] & & H_*(X) \arrow[dl] \\ & \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[ul] \arrow[rrrr, "\phi"] & & & & H_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

(2.2) Définition.- Les suites spectrales de Bockstein $E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p)$ et $E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$ sont les suites spectrales engendrées par les couples exacts ci-dessus. Ici p est un nombre premier $\neq 2$.

Le morphisme de Hurewicz induit un morphisme des suites spectrales $E^r\phi : E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$.

Puisque $PH_*(S^n(q), \mathbb{Z}/q) = \bar{H}_*(S^n(q), \mathbb{Z}/q)$ le morphisme de Hurewicz est défini comme $\phi : \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow PH_*(X, \mathbb{Z}/q) \subset H_*(X, \mathbb{Z}/q)$. De même, la suite spectrale de Bockstein $E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$ est une suite spectrale de coalgèbres, et le morphisme $E^r\phi$ est défini $E^r\phi : E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow PE^rH_*(X, \mathbb{Z}/p) \subset E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$.

Soit $\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow X$ le fibré des chemins, d'origine fixée, de fibre $\Omega X$ et de base X. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(EX,\Omega X; \mathbb{Z}/q) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(X,*; \mathbb{Z}/q) = \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[d, "\phi"] \\ H_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) & H_*(EX,\Omega X; \mathbb{Z}/q) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[r] & H_*(X,*; \mathbb{Z}/q) = \bar{H}_*(X, \mathbb{Z}/q). \end{tikzcd}$$

Le composé $H_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\partial^{-1}} H_*(EX,\Omega X; \mathbb{Z}/q) \longrightarrow \bar{H}_*(X, \mathbb{Z}/q)$ s'appelle la suspension $\sigma$. Donc le morphisme de Hurewicz $\phi$ de X est un composé de la suspension et du morphisme de Hurewicz $\phi$ de $\Omega X$, à isomorphisme près. Alors, on aura une meilleure chance d'apercevoir l'homotopie si on regarde $\phi$ sur $\Omega X$. Effectivement, la situation est très bonne modulo la torsion.

(1.3) THÉORÈME. [11]- Soit $Y$ un $H$ - espace, par exemple, $Y = \Omega X$. Le morphisme de Hurewicz sur les nombres rationnels $\phi \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow PH_*(Y,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

La multiplication des lacets $\Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ induit une structure d'algèbre (graduée ) sur $H_*(\Omega X,R)$, et en plus, une structure d'algèbre de Lie, avec le crochet $[x,y] = xy - (-1)^{ij}yx$ si $x \in H_i(\Omega X)$, $y \in H_j(\Omega X)$. Voir (3.1) pour la définition d'algèbres de Lie graduées. En plus, $PH_*(\Omega X,R)$ est une sous-algèbre de Lie de $H_*(\Omega X,R)$ muni de $[x,y]$. Si $H_*(\Omega X,R)$ est $R$ - plat, alors $H_*(\Omega X,R)$ est une algèbre de Hopf.

Il existe une application $\theta ; S^{i+j}(q) \longrightarrow S^i(q) \wedge S^j(q)$ puisque l'espace $S^i(q) \wedge S^j(q)$ se décompose en le bouquet $S^{i+j}(q) \vee S^{i+j-1}(q)$. Si $u : S^i(q) \longrightarrow \Omega X$ et $v : S^j(q) \longrightarrow \Omega X$ sont deux applications continues, on forme le commutateur dans $\Omega X$: $w = u.v.u^{-1}.v^{-1} : S^i(q) \wedge S^j(q) \longrightarrow \Omega X$, et le composé avec $\theta$ est un crochet $[u,v] ; S^{i+j}(q) \longrightarrow \Omega X$. Le crochet est défini sur les classes d'homotopie

$$[\ ,\ ] : \pi_i(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \times \pi_j(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow \pi_{i+j}(\Omega X, \mathbb{Z}/q),$$

et il s'appelle le crochet de Lie (ou de Samelson ou de Whitehead).

(1.4) THÉORÈME. [14], [15] - Soit $q$ un entier premier à 6. Alors $\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q)$ est un algèbre Lie (graduée), et si $q = p$ un nombre premier, alors la suite spectrale de Bockstein $E^r\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p)$ est une suite spectrale d' algèbres de Lie. Le morphisme de Hurewicz est un morphisme d'algèbres de Lie, et si $q = p$, alors,

$$E^r\phi : E^r\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow PE^rH_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie différentielles.

## §2. Les espaces principaux et la décomposition de leurs suspensions

Soit $X \longrightarrow \Omega SX$ le plongement canonique et la suspension induite $\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(\Omega SX,R)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}_*(X,R) \otimes H_*(\Omega SX,R) & \xrightarrow{\psi} & \bar{H}_*(\Omega SX,R) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \bar{H}_*(\Omega SX,R) \otimes H_*(\Omega SX,R), & \end{array}$$

induit par le produit sur l'algèbre $H_*(\Omega SX,R)$, définit le morphisme $\psi$.

(2.1) THÉORÈME. [7, p. 289] Si $H_*(X,R)$ est R - plat, alors $\psi$ est un isomorphisme, et la suspension se prolonge à l'algèbre tensorielle

$$T(\bar{H}_*(X,R)) \longrightarrow H_*(\Omega SX,R)$$

en un isomorphisme l'algèbres. De plus, $T(\bar{H}_*(X,R))$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf, qui est induit par la structure de coalgèbre sur $H_*(X,R)$, et le morphisme ci-dessus est un isomorphism d'algèbres de Hopf.

(2.2) Exemples.- L'homologie $H_*(\Omega S^{m+1},R) = T(x_m)$ est l'algèbre tensorielle sur un générateur $x_m$ de dimension m. L'homologie $H_*(\Omega S^{m+1}(p^r),\mathbb{Z}/p^r) = T(v_m,u_{m-1})$ est l'algèbre tensorielle sur deux générateurs $v_m$ et $u_{m-1}$. Notons $\Delta(x_m) = x_m \otimes 1 + 1 \otimes x_m$ où $x_m$ est un élément primitif, et où $u_{m-1}$ et $v_m$ sont primitifs sauf pour le cas $m = 2$ et $p^r = 2$. Si m est impaire, $x_m^2$ est aussi primitif, puisque $(x_m \otimes 1)(1 \otimes x_m) = -(1 \otimes x_m)(x_m \otimes 1)$ et $\Delta(x_m^2) = x_m^2 \otimes 1 + 1 \otimes x_m^2$. Donc par (1.3) le morphisme de Hurewicz rationnel est un isomorphisme

$$\pi_*(\Omega S^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.x_{2n} \quad \text{et} \quad \pi_*(\Omega S^{2n}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.x_{2n-1} \oplus \mathbb{Q}.x_{2n-1}^2,$$ et ceci implique que les $\pi_i(S^n)$ sont finis sauf pour $\pi_m(S^m) = \mathbb{Z}$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z} + (\text{fini})$.

(2.3) PROPOSITION. [7, p.292]- Il existe une décomposition

$$S(X \times Y) = S(X) \vee S(Y) \vee S(X \wedge Y)$$

à homotopie près.

Faisons le produit de $S^m \longrightarrow \Omega S^{m+1}$ k - fois avec lui-même $(S^m)^k \longrightarrow \Omega S^{m+1}$, et observons que $H_{nk}((S^m)^k) \longrightarrow H_{mk}(\Omega S^{m+1})$ est un isomorphisme. D'ailleurs, par (2.3)

$$S((S^m)^k) = S^{mk+1} \vee \text{(bouquet des sphères de dim < mk+1)}$$

La suspension $S((S^m)^k) \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$ se restreint à $u_k : S^{mk+1} \longrightarrow S\Omega S^{m+1}$ telle que l'application sur le bouquet $u : \bigvee_{k=1} S^{mk+1} \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$, où $u|S^{mk+1} = u_k$, soit un isomorphisme d'homologie.

(2.4) THÉORÈME.- *L'application* $u : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$ *est une équivalence d'homotopie.*

Pour le reste de cette section tout espace est localisé en un nombre premier p.

(2.5) *Définition.*- Soit $S^m\{p^r\}$ (ou $S^m\{p^r\} \longrightarrow S^m$) la fibre homotopique de $S^m \xrightarrow{p^r} S^m$. Soit $F^m\{p^r\}$ (ou $F^m\{p^r\} \longrightarrow S^m(p^r)$) la fibre homotopique de $S^m(p^r) \longrightarrow S^m$.

On a un diagramme commutatif où la ligne horizontale est une suite cofibrée, et les lignes obliques sont des fibrés associés aux applications horizontales.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S^m \arrow[r, "p^r"] & S^m \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^{m+1}(p^r) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^{m+1} \arrow[r, "p^r"] \arrow[d, dashed] & S^{m+1} \arrow[r] & \cdots \\
& Y^m \arrow[ur] & F^{m+1}\{p^r\} \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & S^{m+1}\{p^r\} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & Y^{m+1} \arrow[ur] & & \\
& \Omega S^{m+1} \arrow[r, "\Omega p^r"] \arrow[ur] \arrow[d, equal] & \Omega S^{m+1} \arrow[r] \arrow[ur] & \Omega S^{m+2}(p^r) \arrow[ur] & & & \\
& \Omega S^{m+1} \arrow[ur, "\Omega p^r"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

L'espace $\Omega S^m$ agit sur $F^m\{p^r\}$ et $S^m\{p^r\}$, et les espaces sont principaux au sens homotopique. Les applications $\Omega S^m \longrightarrow F^m\{p^r\}$ et $\Omega S^m \longrightarrow S^m\{p^r\}$ sont $\Omega S^m$ - équivariants. L'existence des quatre flèches verticales, qui complète le diagramme, résulte des propriétés généraux des suites de fibrés.

$S^m \longrightarrow F^{m+1}\{p^r\}$, $F^{m+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{m+1}$, $S^{m+1}(p^r) \longrightarrow S^{m+1}\{p^r\}$, $S^{m+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{m+2}(p^r)$.

(2.6) THÉORÈME.-

(1) $\bar{H}_*(F^{m+1}\{p^r\},R)$ *est un* $H_*(\Omega S^{m+1},R)$ - *module libre de rang* 1. *Une base est l'image par* $H_m(S^m,R) \longrightarrow H_m(F^{m+1}\{p^r\},R)$ *d'un générateur de* $H_m(S^m,R)$.

(2) $\bar{H}_*(S^{m+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p^s)$ $(s \leq r)$ *est un* $H_*(\Omega S^{m+1}, \mathbb{Z}/p^s)$ - *module libre de rang* 2. *Une base est l'image par* $H_i(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s) \longrightarrow H_i(S^{m+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p^s)$ *d'un générateur de* $H_m(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s)$ *et un générateur de* $H_{m+1}(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s)$.

Les deux suites spectrales sur $\mathbb{Z}/p^r$ avec $E^2 = H_*(S^{m+1}(p^r)) \otimes H_*(\Omega S^{m+1})$ et $E^2 = H_*(S^{m+1}) \otimes H_*(\Omega S^{m+1})$ dégénèrent. Maintenant, on applique la méthode, qui donne (2.4). Faisons agir $\Omega S^{m+1}$ $(k-1)$ - fois sur $F^{m+1}\{p^r\}$

$$\begin{tikzcd} F^{m+1}\{p^r\} \times (\Omega S^{m+1})^{k-1} \arrow[r] & F^{m+1}\{p^r\} \\ S^m \times (S^m)^{k-1} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} ,$$

et observons que $H_{mk}(S^m \times (S^m)^{k-1}) \longrightarrow H_{mk}(F^{m+1}\{p^r\})$ est un isomorphisme. De plus, par (2.3),

$$S(S^m \times (S^m)^{k-1}) \simeq S^{mk+1} \vee \text{(bouquet des sphères de dim < mk+1)},$$

et la suspension se restreint à $u_k : S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ telle que l'application $u' : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ soit un isomorphisme d'homologie, donc, une équivalence d'homotopie.

Faisons agir $\Omega S^{m+1}$ $(k-1)$ fois sur $S^{m+1}\{p^r\}$

$$\begin{tikzcd} S^{m+1}\{p^r\} \times (\Omega S^{m+1})^{k-1} \arrow[r] & S^{m+1}\{p^r\} \\ S^m \times (S^m)^{k-1} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et observons que $H_{mk}(S^m(p^r) \times (S^m)^{k-1}) \longrightarrow H_{mk}(S^{m+1}\{p^r\})$ est un isomorphisme sur $\mathbb{F}_p$ de la suite spectrale de Bockstein. Encore, par (2.3),

$$S(S^m(p^r) \times (S^m)^{k-1}) \simeq S^{mk+1}(p^r) \vee \text{(bouquet d'autres espaces)},$$

et la suspension se restreint à $u_k : S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$ telle que l'application $u'' : \bigvee_k S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$ soit un isomorphisme d'homologie, donc, une équivalence d'homotopie.

(2.7) THÉORÈME.- <u>Les applications</u>
$u' : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ <u>et</u> $u'' : \bigvee_k S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$
<u>sont des équivalences d'homotopie.</u>

## §3. Préliminaires algébriques I. Algèbres de Lie libres.

Tous les modules et les algèbres sont gradués sur un anneau commutatif R ayant un élément unité dans ce §.

(3.1) Définition.- Une algèbre de Lie est un module L muni d'une application bilinéaire $[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$ telle que

(a) (antisymétrie) $[x,y] = (-1)^{ij}[y,x]$ si $x \in L_i$, $y \in L_j$,

(b) (identité de Jacobi) $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - (-1)^{ij}[y,[x,z]]$ si $x \in L_i$, $y \in L_j$, et $z \in L_k$, et

(c) $[x,[x,x]] = 0$ si x a un degré impair.

Dans notre cas, L est connexe, c'est-à-dire, $L_0 = 0$. Un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ d'algèbres de Lie est un morphisme des modules tel que $f([x,y]) = [f(x),f(y)]$.

Soit A une algèbre. Le crochet sur A se définie par $[x,y] = xy - (-1)^{ij}yx$ si x de $L_i$, y de $L_j$. Le module A muni de $[x,y]$ est une algèbre de Lie, désignée par Lie(A) ou A. A toute algèbre de Lie L, nous associons une algèbre associative U(L) et un morphisme $i : L \longrightarrow U(L)$ d'algèbres de Lie tel que pour tout morphisme $f : L \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$, il existe un seul morphisme $g : U(L) \longrightarrow A$ tel que $g \circ i = f$. On peut construire U(L) comme le quotient de T(L), l'algèbre tensorielle, par l'idéal I engendré par les $x \otimes y - (-1)^{ij} y \otimes x - [x,y]$ où $x \in L_i$, $y \in L_j$.

(3.2) Remarque.- Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dit qu'il existe une filtration $F_pU(L)$ telle que le module gradué associé $E^0U(L)$ est isomorphe à une algèbre symétrique sur une suspension de L. Si L est un module libre, alors $i : L \longrightarrow U(L)$ est un monomorphisme scindé, et U(L) est un module libre. Si L est connexe, et si tout $L_m$ est libre de rang a(m), alors $U(L)_m$ est libre de rang fini, et la série de Poincaré est

$$\chi_{U(L)}(t) = \Sigma_{m \geq 0} (\mathrm{rang}\ U(L)_m)\, t^m = \frac{\prod_{n\geq 1} (1 + t^{2n+1})^{a(2n+1)}}{\prod_{n \geq 1} (1 - t^{2n})^{a(2n)}}$$

Soit W un module. L'algèbre de Lie libre L(W) engendré par W se définit par la propriété suivante de $i : W \longrightarrow L(W)$ : Pour tout morphisme $f : W \longrightarrow L$, où L est une algèbre de Lie, il existe un seul morphisme $g : L(W) \longrightarrow L$ tel que $g \circ i = f$. Si W est connexe ($W_0 = 0$), L(W) est de même connexe.

(3.3) Remarque.- Si W est un module libre, L(W) est un module libre, et $U(L(W)) \longrightarrow T(W)$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Inversement, si L est une algèbre de Lie avec U(L) isomorphique a T(W) ou W est libre et connexe, L est isomorphique a L(W). Si W est connexe et si tout $W_m$ est libre de rang fini, L(W) a une séries de Poincaré
$\chi_{L(W)}(t) = \Sigma_{1\leq m}\, a(m)t^m$ et $\chi_{T(W)}(t) = \dfrac{1}{1 - \chi_W(t)} = \dfrac{\prod_{n\geq 1}(1 + t^{2n+1})^{a(2n+1)}}{\prod_{n\geq 1}(1 - t^{2n})^{a(2n)}}$ .

(3.4) PROPOSITION.- Soit $0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$ une suite exacte d'algèbres de Lie, qui sont libres de type fini. Alors U(L) est isomorphe à $U(L'') \otimes U(L')$ comme U(L') - module à droite et comme U(L") - comodule à gauche.

Donc $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U(L')}(t).\chi_{U(L'')}(t)$.

(3.5) PROPOSITION.- Soit L' une sous-algèbre de Lie de L telle que L = L(W) soit libre, L et W soient R - libre et connexe, et $L' \longrightarrow L$ soit scindé comme un morphisme des modules. Alors L' est une algèbre libre L(W') avec W" un R - module libre. Si W est de type fini, W' l'est aussi.

Voir [3, p. 130] pour (3.4) et (3.5).

Soit $L = L\langle u_{2n}, v_{2n+e}\rangle$, e = +1 ou -1, l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs $u_{2n}$ et $v_{2n+e}$ de degrés 2n et 2n+e. Considérons les deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & [L,L] & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L^{ab} = \langle u,v\rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \langle u\rangle & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où <u,v> et <u> sont les algèbres de Lie commutatives des rangs 2 et 1.

(a). On pose $Q(A) = \operatorname{coker}(\phi : I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A))$, les éléments indécomposables pour une algèbre A connexe où $A = R \oplus I(A)$. Par (3.5) les algèbres de Lie [L,L] et L' sont aussi libres comme L. Donc, pour [L,L] = L(W), on a U([L,L]) = T(W) où W = QU([L,L]), et pour L' = L(W"), on a U(L') = T(W') où W" = QU(L').

(b). D'après (3.4), nous avons les décompositions
$U(L) = T(u,v) = U\langle u,v\rangle \otimes T(W)$ et $U(L) = T(u,v) = U\langle u\rangle \otimes T(W')$.
Ici $U\langle u,v\rangle$ est l'algèbre symétrique $S(u,v)$ engendrée par u et v, et $U\langle u\rangle$ est l'algèbre symétrique $S(u)$ sur u. Dans ce cas la $S(u)$ est l'algèbre de polynomes de u.

(c). Formons les éléments de $[L,L]$

$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})([u_{2n},v_{2n+e}]) = x_k \qquad \deg(x_k) = 2nk + 4n + e,$$
$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})([v_{2n+e},v_{2n+e}]) = y_k \qquad \deg(y_k) = 2nk + 4n + 2e,$$

et les éléments de $L'$

$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})(v_{2n+e}) = z_k, \qquad \deg(z_k) = 2nk + 2n + e.$$

Dans le module des éléments indécomposables $W = Q(U([L,L]))$, les éléments $x_k$, $y_k$ pour $k = 0, 1, \ldots$ sont linéairement indépendants, et dans le module des éléments indécomposables $W'' = Q(U(L'))$, les éléments $z_k$ pour $k = 0, 1, \ldots$ sont linéairement indépendants par un critérium de Cohen, Moore, et Neisendorfer [3, p. 132].

(3.6) <u>Remarques</u>.- Calculons les séries de Poincaré. D'abord $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U\langle u,v\rangle}(t) . \chi_{U([L,L])}(t)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{1 - t^{2n} - t^{2n+e}} = \frac{1 + t^{2n+e}}{1 - t^{2n}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_W(t)}$$

Donc $\chi_W(t) = \dfrac{t^{4n+e} + t^{4n+2e}}{1 - t^{2n}} = t^{4n+e} \sum_{0\leq k} t^{2nk} + t^{4n+2e} \sum_{0\leq k} t^{2nk}$,

et les éléments $x_k$, $y_k$ $(0\leq k)$ forment une base de $Q(U([L,L])) = W$. Cela montre que: <u>$[L,L]$ est une algèbre de Lie libre sur les générateurs</u> $x_k$, $y_k$ $(0\leq k)$.

D'autre part, $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U\langle u\rangle}(t).\chi_{U(L')}(t)$ peut **s'écrire**

$$\frac{1}{1 - t^{2n} - t^{2n+e}} = \frac{1}{1 - t^{2n}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_{W'}(t)}$$

Donc $\chi_{W'}(t) = \dfrac{t^{2n+e}}{1 - t^{2n}} = t^{2n+e} \sum_{0\leq k} t^{2nk}$,

et les éléments $z_k$ $(0\leq k)$ forment une base de $Q(U(L')) = W'$. Cela **montre** que: <u>$L'$ est une algèbre de Lie libre sur les générateurs</u> $z_k$ $(0\leq k)$.

## §4. Décomposition de $\Omega S^{2n+2}$ et $\Omega S^{2n+2}(p^r)$

Le plongement $v : S^{2n+1} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$ et le crochet $u' = [v,v] : S^{4n+2} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$, qui induit une application $u : \Omega S^{4n+3} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$, ont un produit $w$ sur $\Omega S^{2n+2}$. L'application $w : S^{2n+1} \times \Omega S^{4n+3} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$ induit un isomorphisme d'homologie avec coefficients d'un corps pour toutes caractéristiques sauf 2. Donc on a:

(4.1) THÉORÈME. voir [22], [13] - L'application $w$ localisée

$$w : S^{2n+1}[1/2] \times \Omega S^{4n+3}[1/2] \longrightarrow \Omega S^{2n+2}[1/2]$$

est une équivalence d'homotopie.

Supposons que tous les espaces soient localisés en p, un nombre premier > 3. Pour décomposer $\Omega S^{2n+2}(p^r)$, nous utilisons l'homologie $H_*(\Omega S^{2n+2}(p^r), \mathbb{Z}/p^r) = T(u_{2n}, v_{2n+1}) = U(L)$ où $L = L\langle u_{2n}, v_{2n+1}\rangle$ est l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs $u_{2n}$ et $v_{2n+1}$, voir (2.1) et (3.6). L'algèbre enveloppante universelle se décompose comme un produit tensoriel des $U([L,L])$ - modules à droite et des $U(L^{ab})$ - comodules à gauche $T(u_{2n}, v_{2n+1}) = U(L) = U(L^{ab}) \otimes U([L,L])$ d'après (3.4).

L'application $S^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$, qui est définie par le diagramme après (2.5), est une injection en homologie sur le facteur $U(L^{ab})$ de $U(L)$. On a donc un isomorphisme $H_*(S^{2n+1}\{p^r\}) \otimes U([L,L]) \longrightarrow U(L) = H_*(\Omega S^{2n+2}(p^r), \mathbb{Z}/p^r)$.

D'après (3.6), $[L,L]$ est une algèbre de Lie libre engendrée par les éléments $ad^k(u)[v,v]$ et $ad^k(u)[u,v]$ pour $k \geq 0$, qui sont dans l'image du morphisme de Hurewicz. Il existe une application $S^{4n+2+2kn}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ telle que l'image de $H_*(S^{4n+2+2kn}(p^r), \mathbb{Z}/p^r)$ soit le sous-module libre engendré par les éléments $ad^k(u)[v,v]$ et $ad^k(u)[u,v]$. Le bouquet des applications $\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+2+2kn}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ induit une application de $T = \Omega(\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+3+2kn}(p^r)) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$. Cette application et $S^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ donne le produit $S^{2n+1}\{p^r\} \times T \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$, qui est un isomorphisme d'homologie avec coefficients dans $\mathbb{Z}/p^r$.

(4.2) THÉORÈME. [3] - L'application au-dessus

$$S^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega(\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+3+2kn}(p^r)) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$$

est une équivalence d'homotopie.

La décomposition de $\Omega S^{2n+2}(p^r)$ est analogue à celle de Serre $\Omega S^{2n+2} \simeq S^{2n+1} \times \Omega S^{4n+3}$, car $\Omega S^{4n+3}(p^r)$ est un facteur de T. La décomposition de $\Omega S^{2n+1}(p^r)$ est plus difficile, et elle est très proche de la décomposition de $\Omega F^{2n+1}(p^r)$, qui est étudiée dans §6, §7.

## §5. Préliminaires algébriques II. Algèbres différentielles de Lie

Une algèbre différentielle A sur R est une algèbre A munie d'une différentielle $\beta : A \longrightarrow A$ de degré -1 telle que $\beta(xy) = \beta(x)y + (-1)^i x\beta(y)$ si $x \in A_i$, $y \in A_j$. L'homologie $H_*(A)$ de A a une structure canonique d'algèbre. Si A est commutative, $H_*(A)$ l'est aussi.

Une algèbre différentielle de Lie L sur R est une algèbre de Lie L munie d'une différentielle $\beta : L \longrightarrow L$ de degré -1 telle que

$$\beta([x,y]) = [\beta(x),y] + (-1)^i[x,\beta(y)] \quad \text{si } x \in L_i,\ y \in L_j.$$

L'homologie $H_*(L)$ de L a une structure canonique d'algèbre de Lie induite par la structure sur L. Si L est commutative, $H_*(L)$ l'est aussi.

(5.1) Remarque.-

Si M est un module différentiel tel que M et $H_*(M)$ soient R - plats, le morphisme canonique $Z_*(M) \longrightarrow H_*(T(M))$ induit un morphisme $T(H_*(M)) \longrightarrow H_*(T(M))$, qui est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Ici T(M) est une algèbre de Hopf où tout élément de M est primitif dans T(M). Par exemple, si $M = R.x \oplus R.\beta(x)$ est de rang 2 avec $H_*(M) = 0$, on a $H_*(T(M)) = R$.

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ dans ce §. Si A est une algèbre différentielle commutative sur k, on a la relation $\beta(x^{p^j}) = 0$ pour tout x de $A_n$. De plus, si A est $S(x_m, \beta x_m)$, l'algèbre symétrique engendrée par $x_m$, de degré m, et $\beta x_m$. L'homologie est

$$\begin{aligned} H(S(x_m,\beta x_m)) &= k && \text{si } m = 2n+1, \\ &= S(x_m^{\,p}, x_m^{\,p-1}\beta x_m) && \text{si } m = 2n. \end{aligned}$$

(5.2) Remarque.-

Si A est une algèbre sur k, on a la relation

$$\beta(x^{p^j}) = \mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x)), \quad \text{et alors} \quad \beta[\mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x))] = 0$$

où $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$. Dans une algèbre différentielle de Lie $\beta[\mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x))] = 0$, puisque c'est vrai dans la sous-algèbre de Lie engendrée par x et $\beta(x)$ de $T(x,\beta(x))$.

## §6. La Décomposition de $F^{2n+1}\{p^r\}$

Tous les espaces sont localisés en p impair.

(6.1) THÉORÈME.- *Il existe une décomposition à homotopie près*

$$S^{2n-1} \times \prod_{j \geq 1} S^{2np^j-1}\{p^{r+1}\} \times \Omega(\textstyle\bigvee_i S^{n(i)}(p^r)) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}$$

*où* $n(i) \geq 4n-1$ *et* $n(i) \longrightarrow +\infty$. *La restriction à* $S^{2n-1}$ *de cette application est le composé* $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ *de* $E^2$ *et d'une application de la suite des fibrés, qui définit l'espace* $F^{2n+1}\{p^r\}$. (voir (2.5)).

Pour une esquisse de la démonstration ($p > 3$), considérons le diagramme commutatif induit par le fibré $F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$, et le morphisme de Hurewicz

$$\begin{tikzcd}
 & L(u_{2n}, v_{2n-1}) \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
\pi_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \arrow[d, "\phi"] \\
H_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p) \arrow[r] & H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \arrow[d, equal] \\
 & T(x_{2n}, y_{2n-1}) & T(x_{2n}).
\end{tikzcd}$$

Ici $T(x_{2n}, y_{2n-1})$ et $T(x_{2n})$ sont les algèbres tensorielles, et on choisit $u_{2n}$, $v_{2n-1}$ tels que $\phi(u_{2n}) = x_{2n}$ et $\phi(v_{2n-1}) = y_{2n-1}$. Les éléments $u_{2n}$, $v_{2n-1}$ engendrent une sous-algèbre de Lie libre $L(u_{2n}, v_{2n-1})$ de $\pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$. Les différentielles de Bockstein sur $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$ sont determinées par

$$\beta_s(x_{2n}) = 0 \text{ si } s < r \text{ et } \beta_r(x_{2n}) = y_{2n-1}.$$

Pour $n > 1$, nous montrons l'existence des facteurs $S^{2np^j-1}\{p^{r+1}\}$ dans le produit faible $\prod$, qui est la limite inductive des produits finis. Ces facteurs s'appliquent avec le point base dans $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ et $\Omega S^{2n+1}(p^r)$, et les facteurs $\Omega(\bigvee_i S^{n(i)}(p^r))$ sont envoyés par un isomorphisme sur un facteur direct de $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ et $\Omega S^{2n+1}(p^r)$. D'apres (5.2), on a pour $j = 1$

$$\beta_r(\mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)) = 0,$$

puisque $\beta_r(x_{2n}) = y_{2n-1}$ implique que $\beta_r(u) = v$. La relation est valable dans $E^r\pi_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\})$ et $E^r\pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r))$ par la théorie des produits relatifs de Samelson. Cherchons un élément $w$ tel que $\beta_r(w) = \mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)$. On calcule dans l'algèbre tensorielle $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$

$$\beta_r(x^{p^j} - \phi(w)) = \mathrm{ad}(x)^{p^j-1}(y) - \phi(\mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)) = 0$$

puisque $\phi$ est un morphisme d'algèbres de Lie. D'après (5.1), l'homologie

$$\bar{H}_*[H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p), \beta_r] = \mathbb{Z}/p,$$

et il existe z dans $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r))$ de degré impair avec $\beta_r(z) = x^{p^j} - \phi(w)$. Cet élément z donne zéro dans $H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)$; donc, $x^{p^j}$ et $\phi(w)$ s'appliquent sur le même élément de $H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)$, et cela implique que

$$x^{p^j} \text{ appartient à } \operatorname{im}(\phi : \pi_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)),$$

ce qui est absurde par la non-existence des éléments de Hopf invariant un modulo p, voir [23] et [9]'. Donc un tel w n'existe pas, et $ad^{p^j-1}(u)(v)$ définit un élément de $E^{r+1}\pi_{2np^j-1}(\Omega S^{2n+1}(p^r))$, qui s'applique sur zéro dans $\pi_{2np^j-1}(\Omega S^{2n+1})$.

Cet élément défini modulo $p^{r+1}$ dans l'homotopie de $\Omega S^{2n+1}(p^r)$ se relève à $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ dans la suite de fibrés par la théorie des produits relatifs de Samelson, voir [3,§6]. On a donc une application

$$S^{2np^j-1}(p^{r+1}) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\},$$

qui induit une application

$$\Omega S^{2np^j}(p^{r+1}) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\},$$

et nous composons avec $S^{2np^j-1}\{p^{r+1}\} \longrightarrow \Omega S^{2np^j}(p^{r+1})$ de (2.5). Nous formons le produit faible sur tout $j \geqq 1$ pour trouver le premier facteur.

Pour l'autre facteur, voir [3,§12].

## §7. La quasi-inverse de la suspension double $E^2$

Rappelons le diagramme commutatif suivant (tous les espaces soient localisés en $p > 2$):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
F^{2n+1}\{p^r\} \arrow[r] \arrow[d] & S^{2n+1}(p^r) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\Omega S^{2n+1} \arrow[r] & S^{2n+1}\{p^r\} \arrow[r] & S^{2n+1} \arrow[r, "p^r"] & S^{2n+1}
\end{tikzcd}$$

où $X \longrightarrow F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n}$ est un fibré. Le théoreme ci-dessous découle de (6.1).

(7.1) THÉORÈME.- Il existe un espace $Y$ et une application $Y \longrightarrow \Omega X$ tels que le composé suivant est une équivalence d'homotopie (la dernière application est le produit sur un espace des lacets)

$$S^{2n-1} \times Y \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega X \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}.$$

Soit $r = 1$. Nous avons un diagramme commutatif où $I$ est l'inverse de l'équivalence d'homotopie du théorème (7.1).

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Omega^2 S^{2n+1} \arrow[dl] \arrow[dd, "\Omega^2 p"] \\
S^{2n-1} \times Y \arrow[r] \arrow[d] & \Omega F^{2n+1}\{p\} \times \Omega F^{2n+1}\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega F^{2n+1}\{p\} \arrow[ll, bend right, "\text{inverse} = I"'] \arrow[dr] & \\
S^{2n-1} \times * \arrow[r] & \Omega^2 S^{2n+1} \times \Omega^2 S^{2n+1} \arrow[rr] & & \Omega^2 S^{2n+1}
\end{tikzcd}$$

Cela nous conduit à une factorisation de $\Omega^2 p$

$$\Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p\} \xrightarrow{\text{proI}} S^{2n-1} \xrightarrow{E^2} \Omega^2 S^{2n+1}.$$

Soit $\pi : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}$ le composé des deux premières applications. Alors, $E^2 \circ \pi$ est $\Omega^2 p$; $\pi \circ E^2$ est de degré $p$, c'est-à-dire, $\pi \circ E^2 = p$.

(7.2) THÉORÈME.- L'application de suspension double $E^2 : S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}$ a un quasi-inverse $\pi : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}$ tel que $E^2 \circ \pi = p$ et $\pi \circ E^2 = p$ sur les H-espaces $\Omega^2 S^{2n+1}$ et $S^{2n-1}$.

## §8. Les exposants

(8.1) Définition.- Un espace X simplement connexe a l'exposant $p^r$ en un nombre premier p si $p^r.\mathrm{Tors}\ \pi_*(X)_{(p)} = 0$. Un H-espace X a l'exposant multiplicatif k si l'application "puissance kème", $k : X \longrightarrow X$, définie par $x \longmapsto x^k$, est homotopiquement triviale.

Théorème (7.2) implique que $S^{2n+1}$ a l'exposant $p^n$ en p pour un nombre premier impair p. Cette assertion est la meilleure possible; en effet $S^{2n+1}$ n'a pas l'exposant $p^{n-1}$ en p selon les résultats de B. Gray [6]'.

Si $X\{k\}$ désigne la fibre de l'application $k : X \longrightarrow X$ pour un H-espace X, alors $\Omega^3(X\{k\})$ a le même type d'homotopie que l'espace $\mathrm{Map}(S^4(k),X)$ de la suite fibrée

$$\mathrm{Map}(S^4(k),X) \longrightarrow \mathrm{Map}(S^3,X) \longrightarrow \mathrm{Map}(S^3,X) = \Omega^3X.$$

Pour un H-espace X, le H-espace $\Omega^3(X\{k\})$ a l'exposant 2k, et dans le cas où k soit impair, il a l'exposant k. Pour tout k impair, on a $k.\pi_*(S^{2n+1}\{k\}) = 0$, puisque la sphère localisée $S^{2n+1}[1/2]$ est un H-espace, et les considérations ci-dessus sont applicables à $X = S^{2n+1}[1/2]$.

(8.2) Résultats sur les exposants. [3], [16], [17].

(a) La composante de l'identité de $\Omega^{2n+1}S^{2n+1}$ a l'exposant $p^n$.

(b) Voici une variante plus précise du théorème (7.2): La fibre de la suspension double $E^2 : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$ a une structure de H-espace naturelle telle que son exposant multiplicatif soit p.

L'étude de la décomposition des espaces lacets a son origine dans le problème de la détermination de l'exposant de $S^m(p^r)$. D'après [3], on a un exposant $p^{2r+1}$ pour $S^m(p^r)$ si p est > 3. Le travail récent de Neisendorfer nous donne l'assertion suivante:

(c) Le H-espace $\Omega^2S^m(p^r)$ est d'exposant multiplicatif $p^{r+2}$ pour tout p impair et $m \geq 3$. La conjecture est, que $S^m(p^r)$ a l'exposant $p^{r+1}$, et qu'il existe un exposant pour $S^m(2^r)$.

(8.3) La conjecture de Moore. Tout complexe fini X simplement connexe, tel que $\pi_*(X) \otimes Q$ soit de dimension totale finie, a un exposant en tous les nombres premiers p, c'est-à-dire, il existe n(p) pour chaque nombre premier p tel que $p^{n(p)}.\mathrm{Tors}\ \pi_*(X)_{(p)} = 0$.

BIBLIOGRAPHE

[1] J.F. ADAMS - The sphere, considered as an H - space mod p, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 12 (1961), p. 52-60.

[2] W. BROWDER - Torsion in H - spaces, Ann. of Math., 74 (1961), p. 24-51.

[3] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Torsion in homotopy groups, Ann. of Math., 109 (1979), p. 121-168.

[4] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math., 110 (1979), p. 549-565.

[5] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Note on higher torsion in the homotopy groups of single suspensions, Illinois Journal, (to appear, 1980).

[6] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Decomposition of loop spaces and applications to exponents, Proceedings of the Aarhus Topology Symposium (to appear, Lecture Notes).

[7] D. HUSEMOLLER - Fibre Bundles, 2nd. Ed., Springer Verlag, 1966.

[8] I. JAMES - Reduced product spaces, Ann. of Math., 62 (1955), p. 190-197.

[9] I. JAMES - On the suspension sequence, Ann. of Math., 65 (1957), p. 74-107.

[10] J.W. MILNOR and J.C. MOORE - On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math., 81 (1965), p. 211-264.

[11] J.C. MOORE - On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group, Ann. of Math., 59 (1954), p. 549 - 557.

[12] J.C. MOORE - The double suspension and p - primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), p. 28-37.

[13] J.C. MOORE - Some applications of homology theory to homotopy problems, Ann. of Math., 58 (1953), p. 325-350.

[14] J.A. NEISENDORFER - Homotopy theory modulo an odd prime, Princeton University Thesis, 1972.

[15] J.A. NEISENDORFER - Primary homotopy theory, Mem. A.M.S. No. 232 (1980).

[16] J.A. NEISENDORFER - Smaller exponents for Moore spaces, (to appear).

[17] J.A. NEISENDORFER - 3 Primary exponents, (to appear).

[18] F.P. PETERSON - Generalized cohomotopy groups, Amer. J. Math, 78 (1956), p. 259 - 281.

[19] P.S. SELICK - Odd primary torsion in the homotopy groups of spheres, Princeton University Thesis, 1977.

[20] P.S. SELICK - Odd primary torsion in $\pi_k(S^3)$, Topology, 17 (1978), p. 407 - 412.

[21] J-P. SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Ann. of Math., 54 (1951), p. 425 - 505.

[22] J-P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. of Math., 58 (1953), p. 258 - 294.

[23] N. SHIMADA and T.YAMANOSHITA - On triviality of the mod p Hopf invariant, Japan J. of Math., 31 (1961), p. 1 - 25.

[24] H. TODA-On the double suspension $E^2$, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., Ser. A, 7 (1965), p. 103 - 145.

[25] H. TODA - p - primary components of homotopy groups II, mod p Hopf invariant, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto, Ser. A, 31 (1958), p. 143 - 160.

[26] G.W. WHITEHEAD - On mappings into group-like spaces, Comment. Mth. Helv., 28 (1954), p. 320 - 328.

[6]' B. Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology, 8 (1969), p. 219-232.

[9]' A. Liulevicius, The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations, Mem. A.M.S. No. 42 (1962).

Dale HUSEMOLLER

Haverford College
Haverford, PA 19041
USA