PIERRE CARTIER

La conjecture locale de Langlands pour $GL(2)$ et la démonstration de Ph. Kutzko

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 550, p. 112-138

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__112_0>

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 550

550-01
Février 1980
[révisé en novembre 1980]

LA CONJECTURE LOCALE DE LANGLANDS POUR GL(2) ET LA DÉMONSTRATION DE Ph. KUTZKO

par Pierre CARTIER

Introduction.

La conjecture locale de Langlands est une petite partie émergée d'un énorme iceberg, découvert par Langlands, et qui concerne les relations entre fonctions automorphes, séries de Dirichlet et représentations linéaires des groupes de Galois (voir [1]).

Le problème est la classification complète des représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_2(F)$, où F est un corps local non-archimédien. Ce problème a été résolu par Gelfand et Graev en 1962 pour $F = \mathbb{Q}_p$ et $p \neq 2$ (voir [8]). Ces auteurs affirment que la classification reste substantiellement la même lorsque $p = 2$, mais sans donner de ce fait une justification convaincante. Il semble que Weil, guidé par ses résultats sur les séries de Dirichlet attachées aux formes automorphes, ait été le premier à émettre des doutes à ce sujet.

Une fois précisée la conjecture d'une correspondance entre représentations de $GL_2(F)$ et représentations de degré 2 du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ (ou plutôt du groupe W_F, voir le n° 1.3), il s'agissait de classifier ces deux sortes de représentations. Du côté galoisien, les premiers pas sont dûs à Weil [22] (voir 1974 e), suivi bientôt de Koch [13], Buhler [3], Henniart [11] et Zink [25].

Pour essayer d'établir la conjecture de Langlands, on a eu recours à deux sortes de méthodes. Tunnell [21] ne construit pas explicitement de représentations de $GL_2(F)$, mais utilise des arguments de comptage, et s'appuie de manière essentielle sur les résultats de Deligne et Serre [6] sur les fonctions automorphes de poids 1. Il prouve ainsi la conjecture de Langlands pour $\mathbb{Q}_2$ et toute extension de $\mathbb{Q}_2$ qui contient une racine cubique de l'unité. Pour aller plus loin, il faudrait étendre le travail de Deligne et Serre aux corps de nombres totalement réels de degré impair, ce qui présente de considérables difficultés techniques. Une autre méthode, elle aussi globale, a permis à Drinfeld et Deligne de traiter le cas d'un corps F de caractéristique $\neq 0$.

La méthode concurrente que j'ai proposée dès 1973, et qui a été poursuivie par Nobs, Wolfart, Henniart et finalement Kutzko est essentiellement "locale", mais oblige à une analyse très détaillée des méthodes de construction de représentations de $GL_2(F)$. Nobs [19] avec l'aide de Wolfart a complètement classifié les représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_2)$ et obtenu (à torsion près) quatre représentations exceptionnelles de ce groupe. De son côté, Henniart [11] a déterminé explicitement les 4 représentations imprimitives de degré 2 de $W_{\mathbb{Q}_2}$ (à torsion près) et le calcul détaillé des facteurs ε détermine la correspondance cherchée pour $F = \mathbb{Q}_2$.

La solution complète vient d'être apportée par Ph. Kutzko [18]. Dans sa thèse, il avait classifié par une méthode originale les représentations irréductibles de $SL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (pour $p \neq 2$) (problème résolu un peu avant par Tanaka en application des méthodes de Weil). Sa méthode de construction de représentations procède par induction à partir de représentations de sous-groupes compacts et ouverts. Un des points fondamentaux est le calcul des facteurs ε, qu'il a mené à bien avec l'aide de P. Gérardin [9].

Le plan de cet exposé est le suivant : la première partie est une mise au point, semi-historique, sur les fonctions L d'Artin, les invariants locaux qui leur sont associés et le lien avec les fonctions automorphes. Dans la deuxième partie, nous posons le problème et faisons une série de réductions. Enfin, la troisième partie esquisse la méthode de Kutzko et Gérardin.

Cette théorie a fait l'objet de deux cours à l'I.H.E.S., d'octobre 1977 à mai 1979. Des notes complètes existent pour le premier et peuvent être demandées à l'I.H.E.S..

§ 1. Les fonctions L d'Artin

1.1. Séries L abéliennes

Le prototype de toutes les séries de Dirichlet utilisées en théorie des nombres est la fonction ζ d'Euler et Riemann, dont nous rappelons succinctement les propriétés principales :

a) $\zeta(s)$ est une fonction méromorphe de la variable complexe s, avec un seul pôle en $s = 1$, simple et de résidu égal à 1 ;

b) si s est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{1}$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers ;

c) si l'on pose $\xi(s) = \pi^{-s/2}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \zeta(s)$, on a l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{2}$$

Dirichlet a ensuite introduit les séries $L(\chi,s)$ associées aux caractères χ qui portent son nom, puis vers 1870 Dedekind a défini la fonction $\zeta_E(s)$ associée à un corps de nombres E.

La forme la plus générale de série L abélienne a été introduite par Hecke vers 1916. Soit E une extension finie du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et soit $\mathcal{O}_E$ l'anneau des éléments de E entiers sur $\mathbb{Z}$. Par définition, une <u>place finie</u> de E est un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_E$; si x est un élément non nul de E, l'idéal principal (x) se décompose en facteurs premiers sous la forme $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$ avec des exposants entiers $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)$; on pose alors (*) $|x|_{\mathfrak{p}} = N\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$ et $|0|_{\mathfrak{p}} = 0$. Une <u>place infinie réelle</u> v est un homomorphisme de corps $\sigma : E \to \mathbb{R}$, et l'on pose alors $|x|_v = |\sigma(x)|$ pour $x \in E$. Enfin, une <u>place infinie complexe</u> est un couple v d'homomorphismes conjugués $\sigma, \bar{\sigma}$ de E dans $\mathbb{C}$, d'image non contenue dans $\mathbb{R}$; on pose alors $|x|_v = \sigma(x)\, \bar{\sigma}(x)$. Pour toute place v, l'application $x \mapsto |x|_v$ est une puissance (**) d'une valeur absolue sur le corps E, et l'on note E_v le corps complété correspondant. On a la formule du produit :

$$\prod_{v} |x|_v = 1 \qquad (x \in E,\ x \neq 0). \tag{3}$$

Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de E, on note $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ le sous-anneau de $E_{\mathfrak{p}}$ défini par la relation $|x|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, défini par la relation $|x|_{\mathfrak{p}} = 1$.

(*) On note $N\mathfrak{a}$ l'indice $(\mathcal{O}_E : \mathfrak{a})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_E$.

(**) et même une valeur absolue si v est finie ou infinie réelle.

Un caractère de Hecke est une famille $\chi = (\chi_v)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) pour toute place v de E, χ_v est un homomorphisme continu de $E_v^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$;

b) l'ensemble S des places finies $\mathfrak{p}$ telles que $\chi_{\mathfrak{p}}$ soit ramifié (i.e. $\chi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times) \neq \{1\}$) est fini ;

c) pour tout $x \in E$ non nul, on a $\prod_v \chi_v(x) = 1$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$. Si $\chi_{\mathfrak{p}}$ est ramifié, on pose $\chi(\mathfrak{p}) = 0$; sinon on pose $\chi(\mathfrak{p}) = \chi_{\mathfrak{p}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{p}})$ où $\tilde{\omega}_{\mathfrak{p}}$ est n'importe quel élément de $E_{\mathfrak{p}}$ tel que $|\tilde{\omega}_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = N\mathfrak{p}^{-1}$. Etendons cette définition à tous les idéaux de $\mathcal{O}_E$ de manière à satisfaire à $\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \chi(\mathfrak{a})\,.\,\chi(\mathfrak{b})$.

La série L de Hecke associée à χ est définie par

$$L_E(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\,.\,N\mathfrak{a}^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p})\,.\,N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} \tag{4}$$

lorsque $\operatorname{Re} s > 1$. Lorsque $E = \mathbb{Q}$ et que χ est d'ordre fini, on retrouve les séries L de Dirichlet. La fonction zêta de Dedekind est le cas particulier $\zeta_E(s) = L_E(\varepsilon, s)$ où le caractère unité ε satisfait à $\varepsilon_v = 1$ pour toute place v et $\varepsilon(\mathfrak{a}) = 1$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_E$.

1.2. Séries L non-abéliennes

Ces séries, d'un genre tout nouveau, ont été introduites par Artin en 1924, pour étudier la factorisation des fonctions $\zeta_E(s)$ et les relations multiplicatives entre ces fonctions.

Rappelons d'abord l'exemple classique d'une extension abélienne E de $\mathbb{Q}$. Il existe (théorème de Kronecker-Weber) un entier $f > 1$ tel que E soit contenu dans le corps R_f engendré par le groupe μ_f des racines f-ièmes de l'unité. Pour tout entier n étranger à f, soit σ_n l'automorphisme de R_f qui satisfait à $\sigma_n(\zeta) = \zeta^n$ pour tout $\zeta \in \mu_f$; l'application $n \longmapsto \sigma_n$ définit un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ sur le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(R_f/\mathbb{Q})$. Soit H l'ensemble des caractères de Dirichlet χ tels que $\chi(n) = 1$ pour tout entier n étranger à f tel que $\sigma_n \in \mathrm{Gal}(R_f/E)$. On a alors :

$$\zeta_E(s) = \prod_{\chi \in H} L(\chi, s) \quad . \tag{5}$$

Soient maintenant K un corps de nombres, et L une extension galoisienne finie de K, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit σ une représentation linéaire de G dans un espace V de dimension finie $\deg(\sigma)$. Etant donnée une place finie $\mathfrak{p}$ de K, soit $\mathfrak{P}$ une place de L au-dessus de $\mathfrak{p}$. On sait alors définir le sous-groupe de décomposition $D_{\mathfrak{P}}$, le sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{P}} \subset D_{\mathfrak{P}}$ et le générateur de Frobenius $Fr_{\mathfrak{P}}$ du groupe cyclique $D_{\mathfrak{P}}/I_{\mathfrak{P}}$. Si $V_{\mathfrak{P}}$ est le sous-espace de V formé des vecteurs invariants par $\sigma(I_{\mathfrak{P}})$, l'action de $\sigma(Fr_{\mathfrak{P}})$ est définie sans ambiguïté sur $V_{\mathfrak{P}}$. On montre que le nombre :

(6) $$L_{\mathfrak{p}}(\sigma, s) = \det(1-\sigma(Fr_{\mathfrak{P}}).N\mathfrak{p}^{-s}|V_{\mathfrak{P}})^{-1}$$

ne dépend que de $\mathfrak{p}$ et non de $\mathfrak{P}$, et que l'on a $I_{\mathfrak{P}} = \{1\}$, d'où $V_{\mathfrak{P}} = V$, pour presque tout $\mathfrak{p}$. On pose alors :

(7) $$L_{L/K}(\sigma, s) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(\sigma, s)$$

(produit convergent lorsque Re $s > 1$).

Voici les propriétés de base de ces fonctions L non-abéliennes :

a) <u>Soit</u> ε <u>la représentation unité de</u> G <u>définie par</u> $V = \mathbb{C}$ <u>et</u> $\varepsilon(g) = 1$ <u>pour tout</u> $g \in G$. <u>On a</u> $L_{L/K}(\varepsilon, s) = \zeta_K(s)$.

b) <u>Soient</u> M <u>une extension galoisienne de</u> K, <u>contenant</u> L, <u>et</u> $Res_L^M : Gal(M/K) \longrightarrow Gal(L/K)$ <u>l'homomorphisme de restriction</u>. On a :

(8) $$L_{L/K}(\sigma, s) = L_{M/K}(\sigma \circ Res_L^M, s) .$$

c) <u>Soit</u> K' <u>un corps intermédiaire entre</u> K <u>et</u> L, <u>et soit</u> σ' <u>une représentation du groupe de Galois</u> $G' = Gal(L/K')$. On a

(9) $$L_{L/K'}(\sigma', s) = L_{L/K}(Ind_{G'}^{G} \sigma', s) .$$

d) <u>Si</u> σ_1 et σ_2 <u>sont deux représentations de</u> G, <u>on a</u> :

(10) $$L_{L/K}(\sigma_1 \oplus \sigma_2, s) = L_{L/K}(\sigma_1, s) L_{L/K}(\sigma_2, s) .$$

De là, par des arguments faciles de théorie des groupes, on déduit les propriétés suivantes :

e) <u>Si</u> H <u>est l'ensemble des représentations irréductibles de</u> G (à isomorphisme près), <u>on a</u> :

(11) $$\zeta_L(s) = \prod_{\sigma \in H} L_{L/K}(\sigma, s)^{\deg(\sigma)} .$$

En particulier, si L/K est une extension abélienne, on a $\deg(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in H$.

f) <u>Soit</u> K_a <u>la plus grande extension abélienne de</u> K <u>contenue dans</u> L. <u>Pour toute représentation</u> σ <u>de degré</u> 1 <u>de</u> $Gal(L/K)$, <u>il existe une représentation</u> τ <u>de</u> $Gal(K_a/K)$ <u>telle que</u> $\sigma = \tau \circ Res_{K_a}^{L}$, <u>d'où</u> $L_{L/K}(\sigma, s) = L_{K_a/K}(\tau, s)$.

Enfin, par application d'un théorème classique de Brauer sur les groupes finis, on obtient la factorisation suivante :

(12) $$L_{L/K}(\sigma, s) = \prod_i L_{L/K_i}(\chi_i, s)^{n_i} ,$$

où K_i est un corps intermédiaire entre K et L , χ_i une représentation de degré 1 de $\mathrm{Gal}(L/K_i)$ et n_i un entier.

1.3. La loi de réciprocité d'Artin

Pour montrer que les séries L d'Artin associées à des représentations de degré 1 sont des séries L de Hecke, Artin a été amené à énoncer, puis à prouver sa célèbre loi de réciprocité.

Soit L un corps de nombres, extension abélienne du corps K . Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de K ; les objets $D_{\mathfrak{P}}$, $I_{\mathfrak{P}}$ et $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{P}}$ associés à une place $\mathfrak{P}$ de L au-dessus de $\mathfrak{p}$ ne dépendent en fait que de $\mathfrak{p}$ et seront donc notés $D_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{p}}$ et $\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$ respectivement. Voici l'énoncé de la loi de réciprocité :

Il existe une unique famille d'homomorphismes continus $\tau_v : K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ satisfaisant aux deux conditions :

a) pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de K , non-ramifiée dans L , et tout $x \in K^\times$, on a $\tau_{\mathfrak{p}}(x) = (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$;

b) pour tout $x \in K^\times$, on a $\prod_v \tau_v(x) = 1$ (d'après a), le produit n'a qu'un nombre fini de facteurs différents de 1).

Soit alors χ un caractère de $\mathrm{Gal}(L/K)$. La famille $\tilde{\chi} = (\chi \circ \tau_v)$ est un caractère de Hecke, et l'on a $L_{L/K}(\chi,s) = L_K(\tilde{\chi},s)$. De plus, pour qu'un caractère de Hecke θ de K soit de la forme $\tilde{\chi}$, pour L et χ convenables, il faut et il suffit qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\theta_v^m = 1$ pour toute place v de K . Ceci étant, la formule (11) est bien une généralisation de (5).

Donnons maintenant une formulation rapide du corps de classes local. Soit F un corps local non-archimédien. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F , $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et $\tilde{\omega}_F$ un générateur de $\mathfrak{p}_F$, $\kappa(F) = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel et q son ordre. La valuation de F est normalisée par $\mathrm{ord}_F(\tilde{\omega}_F) = 1$ et l'on pose $|x|_F = q^{-\mathrm{ord}_F(x)}$ pour x dans $F^\times$; on pose aussi $|0|_F = 0$. On pose $U_F^0 = \mathcal{O}_F^\times$ et $U_F^r = 1 + \mathfrak{p}_p^r$ pour $r \geqslant 1$.

Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique séparable de F . On note G_F le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F, I_F le sous-groupe de G_F qui induit l'identité sur le corps résiduel $\kappa(\overline{F})$ de $\overline{F}$. On appelle élément de Frobenius tout élément φ_F de G_F qui induit la transformation $x \longmapsto x^q$ sur $\kappa(\overline{F})$ et W_F est le sous-groupe de G_F engendré par φ_F et le sous-groupe d'inertie I_F .

On construit alors un homomorphisme T_F de W_F sur $F^\times$ qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

a') Si E est une extension abélienne finie de F, T_F définit par passage au quotient un isomorphisme $T_{E/F}$ de $\mathrm{Gal}(E/F) = W_F/W_E$ sur $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ (où $N_{E/F}$ est la norme de E à F).

b') Si $K, L, \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}$ sont comme plus haut, $\tau_\mathfrak{p}$ définit un isomorphisme de $K_\mathfrak{p}^\times/N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{P}^\times)$ sur $D_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$ qui est réciproque de $T_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}$. On notera que φ_F est défini à la multiplication près par un élément de I_F ; on le choisit de sorte que $T_F(\varphi_F) = \tilde{\omega}_F$ (ce choix n'est pas unique).

1.4. L'équation fonctionnelle des séries L

On vient de voir que toute série L d'Artin associée à une représentation de degré 1 est une série L de Hecke. D'après la formule (12), toute série L d'Artin est donc produit d'un nombre fini de séries L de Hecke (*). Compte tenu des résultats de Hecke, les séries L d'Artin se prolongent donc en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Soient K, L, G et σ comme au n° 1.2. Vu la propriété b) de 1.2, on ne restreint pas la généralité à supposer que L est galoisien sur $\mathbb{Q}$. Soit ρ la représentation de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ déduite de σ par induction de $\mathrm{Gal}(L/K)$ à $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, d'où $L_{L/K}(\sigma,s) = L_{L/\mathbb{Q}}(\rho,s)$. Si j est la conjugaison complexe dans L , notons $n_\pm(\rho)$ la multiplicité de la valeur propre ± 1 de $\rho(j)$ (on a $j^2 = 1$, d'où $\rho(j)^2 = 1$). Posons :

$$\xi(\sigma,s) = L_{L/K}(\sigma,s)\ \Gamma_+(s)^{n_+(\rho)}\ \Gamma_-(s)^{n_-(\rho)} \tag{13}$$

avec $\Gamma_+(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ et $\Gamma_-(s) = \Gamma_+(s+1)$.

L'équation fonctionnelle prend alors la forme :

$$\xi(\sigma,s) = \varepsilon(\sigma)[|d_K|^{\deg(\sigma)} N\mathfrak{f}(\sigma)]^{-s}\xi(\sigma^\vee,1-s) \tag{14}$$

Dans cette formule, $\sigma^\vee$ est la représentation contragrédiente de σ , d_K est le discriminant du corps K et $\mathfrak{f}(\sigma)$ est un idéal de $\mathcal{O}_K$, appelé le conducteur d'Artin de σ .

C'est un résultat fondamental que $\varepsilon(\sigma)$ et $\mathfrak{f}(\sigma)$ se calculent "localement". De manière précise, pour toute place v de K , finie ou non, choisissons une place w de L au-dessus de v , identifions $\mathrm{Gal}(L_w/K_v)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$, et notons σ_v la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(L_w/K_v)$. On a alors :

(*) Weil [22, voir 1951b] a défini une classe de fonctions L qui généralisent à la fois les fonctions L de Hecke et celles d'Artin.

(15) $\qquad \mathfrak{f}(\sigma) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f(\sigma_{\mathfrak{p}})}$,

où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ et l'entier $f(\sigma_{\mathfrak{p}})$ ne dépend que de $\sigma_{\mathfrak{p}}$.

Par ailleurs, choisissons pour toute place v de K un caractère $\psi_v \neq 1$ du groupe additif K_v ; on suppose que pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$, $\psi_{\mathfrak{p}}$ est trivial sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, et que l'on a

(16) $\qquad \prod_v \psi_v(x) = 1 \qquad$ pour tout $x \in K$.

Il existe alors une décomposition :

(17) $\qquad \varepsilon(\sigma) = \prod_v \varepsilon(\sigma_v, \psi_v)$

où les nombres $\varepsilon(\sigma_v, \psi_v)$ sont égaux à 1 pour presque toute place et ne dépendent que de σ_v et ψ_v (théorème de Langlands-Deligne).

1.5. L'équation fonctionnelle de Tate

On reprend les notations F , $\mathcal{O}_F$, ... de 1.3.

Soient χ un caractère de $F^\times$ (homomorphisme continu de $F^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$) et ψ un caractère additif non-trivial de F . L'exposant $f(\chi)$ de χ est le plus petit entier $r \geqslant 0$ tel que le noyau de χ contienne U_F^r , et $a(\psi)$ le plus grand entier m tel que le noyau de ψ contienne $\mathfrak{p}_F^{-m}$. On pose :

(18)
$$L(\chi,T) = \begin{cases} (1-\chi(\tilde{\omega}_F)T)^{-1} & \text{si } f(\chi) = 0 , \\ 1 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

de sorte qu'une série L abélienne s'écrit sous la forme $L(\chi,s) = \prod_{\mathfrak{p}} L(\chi_{\mathfrak{p}}, N\mathfrak{p}^{-s})$. On définit aussi le facteur gamma par

(19)
$$\Gamma(\chi,\psi,T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n} \int_{|x|=q^{-n}} \chi(x)^{-1}\, \psi(x)\, d_\psi x \quad ,$$

avec un choix de la mesure de Haar additive précisé plus loin. Formellement, l'équation fonctionnelle d'une série L abélienne s'écrit $\prod_v \Gamma(\chi_v, \psi_v, Nv^{-s}) = 1$ avec une définition convenable du facteur gamma pour les places infinies.

On démontre que $\Gamma(\chi,\psi,T)$ est le développement en série de Laurent d'une fonction rationnelle en T , à savoir

(20)
$$\Gamma(\chi,\psi,T) = \varepsilon(\chi,\psi)\, T^{f(\chi)+a(\psi)}\, L(\chi^{-1}, q^{-1}T^{-1}) L(\chi,T)^{-1} \ .$$

La constante $\varepsilon(\chi,\psi)$ satisfait aux propriétés suivantes (*) :

(*) Dans le système de Langlands, son facteur ε_L est donné par $\varepsilon_L(\chi,\psi) = \varepsilon(\chi.\nu^{1/2},\psi)$, ce qui simplifie certaines formules.

(21) $$\varepsilon(\chi,\psi^a) = \varepsilon(\chi,\psi)\ \chi(a)|a|_F^{-1/2}$$

(22) $$\varepsilon(\chi.\omega_t,\psi) = \varepsilon(\chi,\psi)\,t^{f(\chi)+a(\psi)}$$

(23) $$\varepsilon(\chi,\psi)\ \varepsilon(\nu\chi^{-1},\psi^{-1}) = 1$$

(24) $$|\varepsilon(\chi,\psi)| = q^{(f(\chi)+a(\psi))/2} \qquad \text{si } \chi \text{ est unitaire.}$$

On a posé $\psi^a(x) = \psi(ax)$, $\nu(x) = |x|_F$ et $\omega_t(x) = t^{\mathrm{ord}_F(x)}$. Lorsque $f(\chi) = a(\psi) = 0$, on a $\varepsilon(\chi,\psi) = 1$; lorsque $f(\chi) > 0$, on a :

(25) $$\varepsilon(\chi,\psi) = \int_F \chi(x)^{-1}\ \psi(x)\ d_\psi x$$

(intégrale sommée par couronnes).

L'équation fonctionnelle de Tate peut se formuler ainsi : si f est une fonction localement constante à support compact sur F, on pose :

(26) $$\hat{f}_\psi(x) = \int \psi(xy)\ f(y) d_\psi y\ ,$$

la mesure de Haar étant normalisée de sorte que l'on ait

(27) $$\int \hat{f}_\psi(x) d_\psi x = f(0)\ .$$

On montre que la série de Laurent :

$$L(\chi,T)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^n \int_{|x|=q^{-n}} f(x)\ \chi(x) d^\times x$$

(où $d^\times x$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif de F) est un polynôme en T et T^{-1}, dont la valeur pour $T=1$ est notée $\xi(f,\chi)$ (transformée de Mellin normalisée). On a alors :

(28) $$\xi(\hat{f}_\psi,\ \nu\chi^{-1}) = \varepsilon(\chi,\psi)\xi(f,\chi)\ .$$

1.6. Constantes locales

Si E est une extension galoisienne finie du corps local F, le groupe de Galois de E/F est isomorphe à W_F/W_E et toute représentation linéaire de $\mathrm{Gal}(E/F)$ sera donc considérée comme une représentation de W_F triviale sur W_E. Il suffit donc de définir les invariants locaux pour les représentations de W_F.

L'exposant (du conducteur) d'Artin d'une représentation σ de W_F est un entier positif $f(\sigma)$ caractérisé par les propriétés suivantes :

a) On a $f(\chi \circ T_F) = f(\chi)$ pour tout caractère χ de $F^\times$.

b) Soit (σ,V) une représentation de W_F, soit V' un sous-espace de V stable par $\sigma(W_F)$ et soit σ'(resp. σ'') la représentation définie par σ dans V'

(resp. $V'' = V/V'$). On a :

(29) $$f(\sigma) = f(\sigma') + f(\sigma'') \cdot$$

En particulier, on a $f(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = f(\sigma_1) + f(\sigma_2)$

c) Soient E une extension finie de F et τ une représentation de W_E. Notons $\mathrm{Ind}_E^F \tau$ la représentation de W_F induite par τ de W_E à W_F. On a alors :

(30) $$f(\mathrm{Ind}_E^F \tau) = f(E/F)[f(\tau) + \delta(E/F).\deg(\tau)]$$

où $f(E/F) = [\kappa(E) : \kappa(F)]$, et où la différente de E/F est $\mathfrak{P}_E^{\delta(E/F)}$.

On trouvera dans Serre [20] une formule explicite pour le calcul de $f(\sigma)$, qui montre que ce nombre ne dépend que de la restriction de σ à I_F.

Il est commode d'introduire l'exposant de Swan

(31) $$Sw(\sigma) = f(\sigma) - \dim V + \dim V^{I_F} ,$$

où V est l'espace de la représentation σ et V^{I_F} le sous-espace des vecteurs invariants par $\sigma(I_F)$.

Quand aux facteurs ε, ils sont caractérisés par les propriétés suivantes :

a') <u>On a</u> $\varepsilon(\chi \circ T_F,\psi) = \varepsilon(\chi,\psi)$ pour tout caractère χ de $F^\times$.

b') <u>On a</u> $\varepsilon(\sigma,\psi) = \varepsilon(\sigma',\psi)\, \varepsilon(\sigma'',\psi)$ <u>si</u> σ' <u>est une sous-représentation de</u> σ, <u>et</u> σ'' <u>la représentation-quotient</u>.

c') <u>Si</u> E <u>est une extension finie de</u> F, <u>il existe une constante</u> $\lambda_{E/F}(\psi)$ <u>telle que</u>, <u>pour toute représentation</u> τ <u>de</u> W_E, <u>on ait</u> :

(32) $$\varepsilon(\mathrm{Ind}_E^F \tau ,\psi) = \varepsilon(\tau, \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F})\, \lambda_{E/F}(\psi)^{\deg(\tau)}$$

(où $\mathrm{Tr}_{E/F}$ est la trace de E à F).

De plus, on a :

(33) $$\varepsilon(\sigma,\psi^a) = \varepsilon(\sigma,\psi)(\mathrm{Det}\ \sigma)(a)\ |a|_F^{-\deg(\sigma)/2}$$

(34) $$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2,\psi) = \varepsilon(\sigma_1,\psi)^{\deg(\sigma_2)} (\mathrm{Det}\ \sigma_2)(\tilde{\omega}_F)^{f(\sigma_1)+a(\psi)\deg(\sigma_1)} ,$$

(35) $$\varepsilon(\sigma,\psi)\ \varepsilon(\sigma^\vee \otimes \nu,\ \psi^{-1}) = 1 ,$$

où le caractère $\mathrm{Det}\,\sigma$ de $F^\times$ est défini par $\det \sigma = \mathrm{Det}\,\sigma \circ T_F$, où la représentation σ_2 est triviale sur I_F et où $\sigma^\vee$ est la représentation contragrédiente de σ.

1.7. <u>Lien avec les fonctions automorphes</u>

On fixe deux entiers $N \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ et un caractère ε de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ tel que $\varepsilon(-1) = (-1)^k$.

Le demi-plan de Poincaré H se compose comme d'habitude des nombres complexes $z = x + iy$ avec $y > 0$. Si f est une fonction holomorphe sur H, et γ un élément $\binom{a\ b}{c\ d}$ de $GL_2(\mathbb{R})$ de déterminant positif, on définit sur H une fonction $f|\gamma$ par :

(36) $$(f|\gamma)(z) = (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) .$$

On note comme d'habitude Γ le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ et $\Gamma_o(N)$ le sous-groupe de Γ formé des matrices $\binom{a\ b}{c\ d}$ où c est divisible par N . On note $S_k(\varepsilon,N)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes f sur H satisfaisant aux conditions suivantes ("formes automorphes paraboliques") :

a) <u>on a</u> $f|\gamma = \varepsilon(d)f$ <u>pour tout</u> $\gamma = \binom{a\ b}{c\ d}$ <u>dans</u> $\Gamma_o(N)$;

b) <u>pour tout</u> γ <u>dans</u> Γ , <u>la fonction</u> $f|\gamma$ <u>tend vers</u> 0 <u>selon la base de filtre formée des demi-plans</u> $\operatorname{Im} z > Y$.

Soit $f \in S_k(\varepsilon,N)$ et soit $\omega(N) = \binom{0\ -1}{N\ \ 0}$. On voit aussitôt que $g = f|\omega(N)$ appartient à $S_k(\varepsilon^{-1},N)$. On peut alors développer f et g en séries de Fourier :

(37) $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e(nz) \quad , \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e(nz)$$

avec l'abréviation usuelle $e(z) = e^{2\pi i z}$. Soit χ un caractère de conducteur f_χ étranger à N . Posons

(38) $$\xi_f(\chi,s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi(n)n^{-s}$$

(39) $$\xi_g(\chi,s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\chi(n)n^{-s} .$$

On montre facilement que $\xi_f(\chi,s)$ et $\xi_g(\chi,s)$ se prolongent en des fonctions holomorphes de s , bornées dans toute bande verticale. De plus, Weil [24] a établi l'équation fonctionnelle

(40) $$\xi_f(\chi,s) = C_\chi\,(Nf_\chi^2)^{k/2-s}\,\xi_g(\bar\chi,k-s)$$

avec :

(41) $$C_\chi = i^k\,\varepsilon(f_\chi)\,\chi(-N)g(\bar\chi)g(\chi)^{-1} \quad ;$$

la somme de Gauss $g(\chi)$ est égale à $\sum_{m \bmod . f_\chi} \chi(m)^{-1}\, e(m/f_\chi)$.

La réciproque est fondamentale ; elle est due à Weil. Supposons données deux suites (a_n) et (b_n) de nombres complexes telles que les séries de Dirichlet définies dans (38) et (39) convergent absolument pour $\operatorname{Re} s > k-s_o$ (où $s_o > 0$) et se prolongent analytiquement en des fonctions <u>holomorphes</u> sur $\mathbb{C}$, bornées dans toute bande verticale. Si l'équation fonctionnelle (40) est vérifiée pour les valeurs de C_χ données par (41) , alors les formules (37) définissent des formes automorphes $f \in S_k(\varepsilon,N)$ et $g \in S_k(\varepsilon^{-1},N)$ et l'on a : $f|\omega(N) = g$.

On suppose désormais qu'on a $k = 1$, d'où $\varepsilon(-1) = -1$.

Soit σ une représentation irréductible de degré 2 du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de conducteur N (au sens d'Artin) et de déterminant ε . *Supposons que les séries* L *d'Artin* $L(\sigma \otimes \chi,s)$ *soient holomorphes dans* $\mathbb{C}$ *pour tout caractère* χ *de conducteur étranger à* N . Une analyse de l'équation fonctionnelle des séries $L(\sigma \otimes \chi,s)$ s'appuyant essentiellement sur la formule (34), a permis à Langlands de montrer qu'*il existe une forme automorphe parabolique primitive* (= newform au sens d'Atkin-Lehner) $f \in S_1(\varepsilon,N)$ *telle que* $\xi_f(\chi,s) = \xi(\sigma \otimes \chi,s)$ *pour tout caractère* χ *de conducteur étranger à* N (la fonction $\xi(\sigma,s)$ est définie dans (13)).

Réciproquement, Serre et Deligne [6] ont prouvé que *toute forme parabolique primitive* $f \in S_1(\varepsilon,N)$ *est ainsi associée à une représentation irréductible* σ *de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *de conducteur* N *et de déterminant* ε *pour laquelle les séries* $L(\sigma \otimes \chi,s)$ *sont holomorphes*.

S'appuyant sur ce résultat, Tate a pu déterminer explicitement une représentation σ de conducteur 133 dont l'image dans $PGL_2(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ telle que $L(\sigma,s)$ soit holomorphe. Puis Buhler [3] a construit un exemple d'une extension K de $\mathbb{Q}$, non-ramifiée en-dehors de 2 et 5 , de groupe de Galois $\mathfrak{A}_5$ avec la propriété suivante : *si* $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est une représentation telle que le noyau de la représentation projective associée se factorise par* $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, *alors* $L(\sigma,s)$ *est une fonction entière*. Le point intéressant est que le groupe $\mathfrak{A}_5$ n'est pas résoluble. On doit à Langlands des résultats plus généraux.

§ 2. La conjecture de Langlands

2.1. Présentation des acteurs

Le corps local F est fixé. Deligne [5] a introduit un groupe de Weil modifié DW_F et montré que les représentations de DW_F étaient classifiées par des systèmes $\Sigma = (V, \sigma, N)$ où σ est une représentation de W_F d'espace V, et N un endomorphisme nilpotent de V tel que

$$(42) \qquad \sigma(w)\, N\, \sigma(w)^{-1} = |w|^{-1} N$$

pour tout $w \in W_F$ (on pose $|w| = |T_F(w)|_F$). Pour un tel système, on pose $Sw(\Sigma) = Sw(\sigma)$, $L(\Sigma, t) = \det(1 - t\sigma(\varphi_F) \mid V_o)^{-1}$ et

$$(43) \qquad \varepsilon(\Sigma, \psi) = \varepsilon(\sigma, \psi) \det(-\sigma(\varphi_F) \mid V^{I_F}/V_o) \ ;$$

on a noté V_o l'ensemble des vecteurs annulés par N et invariants par $\sigma(I_F)$.

La catégorie de représentations ainsi définie admet des sommes directes et des produits tensoriels (attention $N = N_1 \otimes 1 + 1 \otimes N_2$) et les objets semi-simples sont ceux pour lesquels $N = 0$ et la représentation σ est semi-simple. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note Σ_n le système (V_n, σ_n, N_n) où $V_n = \mathbb{C}[t]/(t^n)$, où N_n est la multiplication par t et où $\sigma_n(w)$ est l'opération $P(t) \longmapsto |w|^{(n-1)/2} P(|w|^{-1}t)$ pour un polynôme P . On note R_n l'ensemble des classes d'isomorphismes de systèmes <u>indécomposables</u> $\Sigma = (V,\sigma,N)$ où V est de dimension n et σ est semi-simple. <u>Ces systèmes sont de la forme</u> $\tau \otimes \Sigma_{n/m}$ <u>où</u> m <u>divise</u> n <u>et</u> τ <u>est une représentation irréductible de degré</u> m <u>de</u> W_F .

Soit par ailleurs D un corps non commutatif de degré n^2 sur son centre F . On note $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D et $\mathfrak{p}_D$ l'idéal bilatère maximal de $\mathcal{O}_D$; on note aussi $Tr_{D/F}$ et $N_{D/F}$ respectivement la trace et la norme <u>réduites</u> de D à F . On note S_n l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de dimension finie de $D^\times$. Si ρ est une telle représentation, on note $j(\rho)$ le plus petit des entiers $j \geqslant 0$ tels que le noyau de ρ contienne $1 + \mathfrak{p}_D^{j+1}$.

CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE :

<u>Il existe une bijection</u> Φ_n <u>de</u> R_n <u>sur</u> S_n <u>avec les propriétés suivantes</u> :

a) $\Phi_n(\Sigma_n)$ <u>est la représentation unité de</u> $D^\times$.

b) <u>Soit</u> χ <u>un caractère de</u> $F^\times$. <u>On a</u> $\Phi_n(\Sigma \otimes (\chi \circ T_F)) = \Phi_n(\Sigma) \otimes (\chi \circ N_{D/F})$ <u>pour</u> $\Sigma \in R_n$.

c) <u>On a</u> $j(\Phi_n(\Sigma)) = Sw(\Sigma)$ <u>pour</u> $\Sigma \in R_n$.

d) <u>Si</u> $\rho = \Phi_n(\Sigma)$, <u>la restriction</u> ω_ρ <u>de</u> ρ <u>à</u> $F^\times \subset D^\times$ <u>est égale à</u> $\mathrm{Det}\,\Sigma$.

e) <u>Pour tout caractère additif</u> $\psi \neq 1$ <u>de</u> F, <u>on a</u> $\varepsilon(\Sigma,\psi) = \varepsilon(\rho,\psi)$ <u>si</u> $\rho = \Phi_n(\Sigma)$.

A propos de la condition e), rappelons que l'équation fonctionnelle de Tate (cf. n° 1.5) s'étend au cas d'un corps non-commutatif D . Par exemple, si (ρ, V) est une représentation irréductible de $D^\times$ dont le noyau ne contient pas $\mathfrak{O}_D^\times$, on a

$$\varepsilon(\rho,\psi).1_V = \int_{D^\times} |N_{D/F}(x)|^{(1-n)/2}\, \rho(x)^{-1}\, \psi_{D/F}(x)\, d_\psi x \quad . \tag{44}$$

On a posé $\psi_{D/F} = \psi \circ \mathrm{Tr}_{D/F}$ et la transformation de Fourier est définie par

$$\hat{f}_\psi(x) = \int \psi_{D/F}(xy)\, f(y)\, d_\psi y \quad . \tag{45}$$

Mentionnons pour mémoire le cas $n = 1$: ici R_1 (resp. S_1) se compose des représentations de degré 1 de W_F (resp. $F^\times$) , et la bijection cherchée est donnée par $\Phi_n^{-1}(\chi) = \chi \circ T_F$ pour tout $\chi \in S_1$.

2.2. <u>Dénombrements</u> (*)

Lorsque n n'est pas divisible par la caractéristique résiduelle p de F , R. Howe et L. Corwin ont beaucoup progressé dans la détermination des représentations de $D^\times$. En s'appuyant sur ces résultats, W. Zink aurait déterminé dans ce cas une bijection Φ_n qui satisfait aux propriétés a), b), c) et d). On ne sait rien sur les facteurs ε .

Décrivons maintenant le cas $p = n$. Tout d'abord R_n se compose ici des représentations $\Sigma_n \otimes (\chi \circ T_F)$, qui doivent correspondre via Φ_n aux représentations $\chi \circ N_{D/F}$ de degré 1 de $D^\times$, et des représentations irréductibles de degré n de W_F . Fixons un entier $j \geqslant 0$. Soit $R_n(j)$ l'ensemble des représentations irréductibles de degré n de W_F , telles que $\mathrm{Sw}(\sigma) = j$ et $(\mathrm{Det}\,\sigma)(\tilde{\omega}_F) = 1$. De même, soit $S_n(j)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles ρ de $D^\times$, de degré > 1 , telles que $j(\rho) = j$ et $\rho(\tilde{\omega}_F) = 1$. <u>Les ensembles</u> $R_n(j)$ <u>et</u> $S_n(j)$ <u>sont finis</u>.

Pour construire des représentations de degré n de W_F , on part d'une extension E de F de degré n , et d'un caractère Λ de $E^\times$ et l'on pose $I(E/F,\Lambda) = \mathrm{Ind}_E^F(\Lambda \circ T_E)$; c'est une représentation de conducteur égal à $f(E/F).[f(\Lambda) + \delta(E/F)]$ d'après la formule (30) . Si E est galoisienne sur F , la représentation $I(E/F,\Lambda)$ est irréductible si et seulement si l'on a $\Lambda^\sigma \neq \Lambda$ pour tout $\sigma \neq 1$ dans le groupe de Galois de E/F , et $I(E/F,\Lambda)$ est isomorphe à $I(E/F,\Lambda')$ si et seulement si Λ et Λ' sont conjugués par Gal(E/F) .

(*) Je m'appuie ici sur un exposé récent de H. Koch à Paris.

Le théorème suivant pour $n = p = 2$ est une partie essentielle de la démonstration de la conjecture de Langlands par Tunnell [21] .

THÉORÈME (Tunnell, Koch, Zink). - Lorsque $n = p$, les ensembles $R_n(j)$ et $S_n(j)$ ont même cardinal.

Supposons $n=p$. Il y a trois classes de représentations irréductibles de degré p de W_F :

a) Les représentations $I(E/F,\Lambda)$ où E est l'extension non-ramifiée de degré p de F . On a

$$(46)\qquad Sw(I(E/F,\Lambda)) = p.(f(\Lambda)-1)$$

et l'on obtient ainsi les représentations σ telles que p divise $Sw(\sigma)$. Le décompte de $R_n(j)$ est donc facile si p divise j , et les résultats de R. Howe donnent aussi le cardinal de $S_n(j)$ dans ce cas.

b) Les représentations $I(E/F,\Lambda)$ où E est une extension ramifiée de degré p de F . On a alors

$$Sw(I(E/F,\Lambda)) = f(\Lambda) - \delta(E/F) + p$$

et ce nombre n'est pas divisible par p . Nous ne formulerons pas le critère d'irréductibilité qui est délicat lorsque E n'est pas galoisien sur F . Il est évident que si deux paires (E_i,Λ_i) sont conjuguées par $Gal(\bar{F}/F)$, les représentations $I(E_i/F,\Lambda_i)$ de W_F sont isomorphes, mais il existe en plus des isomorphismes exceptionnels, où E_1 et E_2 ne sont pas conjuguées sur F .

Lorsque j n'est pas divisible par p , le nombre de représentations de $R_p(j)$ ainsi obtenues est égal à

$$(47)\qquad I(j) = p(q-1)^2 q^{j-1}(1 - A(j)\, q^{[r/(p^2+p)] - [r/(p+1)]})$$

avec $r = (p-1)j$. On a $A(j) = 0$ lorsque $r \geqslant p(p+1)\, ord_F(p)$ et, dans le cas contraire, $A(j)$ est égal à $[\frac{p}{2}]\frac{q+1}{q-1}$ ou à 1 selon que r est divisible par $p+1$ ou non. Cette formule est due à Tunnell lorsque $p=2$ et à Zink dans le cas général.

c) Les représentations primitives de degré p de W_F . Une étude approfondie de ce cas est due à Koch [13] et à Kutzko [15]. Si σ est une représentation de W_F , il existe une plus petite extension L de F telle que $\sigma(W_L)$ se compose d'homothéties (L est le corps centrique de σ). Si σ est de degré p et si T est la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans L , alors L est une extension galoisienne de T , de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et la restriction σ_T de σ à W_T est de la forme $I(E/T,\Lambda)$ où E est cyclique de degré p sur T et contenue dans L . Les conducteurs se calculent par les formules suivantes de Buhler et Zink :

$$(48)\qquad Sw(\sigma).e(T/F) = Sw(\sigma_T)$$

(49) $$(p-1)\mathrm{Sw}(\sigma_T) = \delta(L/T) - e(L/T) + 1 \qquad (*)$$

On peut alors assez facilement calculer le nombre de représentations imprimitives dans $R_p(j)$, et d'après le résultat de b), on voit que $R_p(j)$ possède $p(q-1)^2q^{j-1}$ éléments lorsque p ne divise pas j . Par ailleurs, Tunnell a calculé le nombre d'éléments de $S_p(j)$ et trouvé le même résultat.

2.3. <u>Représentations galoisiennes de degré 2</u>

On fait facilement l'énumération des systèmes (V,σ,N) où V est de dimension 2 et σ semi-simple.

a) <u>Le cas spécial</u> Σ_α : $V = \mathbb{C}^2$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, α est un caractère de $F^\times$ et $\sigma_\alpha(w) = \alpha(T_F(w))\begin{pmatrix} |w|^{-1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{1/2} \end{pmatrix}$. C'est le seul cas où $N \neq 0$.

b) <u>Le cas réductible</u> : $V = \mathbb{C}^2$, $\sigma_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \circ T_F & 0 \\ 0 & \beta \circ T_F \end{pmatrix}$ où α , β sont des caractères de $F^\times$.

c) <u>Les représentations imprimitives de degré</u> 2 sont les $I(E/F,\Lambda)$ où E est une extension quadratique de F , et Λ un caractère de $E^\times$ distinct de son conjugué par $\mathrm{Gal}(E/F)$.

d) <u>Les représentations primitives de degré</u> 2 n'existent que pour $p = 2$. Si (V,σ) est une telle représentation, l'image de $\sigma(W_F)$ dans le groupe projectif $PGL(V)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$. Avec les notations du n° 2.2, on a une tour de corps

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ E \arrow[dr, dash] & E' \arrow[d, dash] & E'' \arrow[dl, dash] \\ & T \arrow[d, dash] & \\ & F & \end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{Gal}(L/T)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $[T:F]$ égal à 3 dans le cas $\mathfrak{A}_4$ et à 6 dans le cas $\mathfrak{S}_4$. Il y a en tout cas trois extensions quadratiques de T contenues dans L , notées ici E , E' et E'' . Dans le cas $\mathfrak{S}_4$, T contient l'extension quadratique non-ramifiée F_{nr} de F , et il est modérément ramifié sur F_{nr} ; dans le cas $\mathfrak{A}_4$, T peut être non-ramifié ou modérément ramifié sur F .

Soit σ une représentation de degré n de W_F . Si χ est un caractère de W_F tel que $\sigma \otimes \chi$ soit équivalent à σ , la considération du déterminant montre qu'on a $\chi^n = 1$. D'après la théorie du corps de classes, il existe donc une extension abélienne K_σ de F telle que $\sigma \otimes \chi$ soit équivalente à σ si et seulement si χ est trivial sur W_{K_σ} . On dira que K_σ est le <u>corps d'imprimitivité de</u> σ .

(*) On note $e(L/M)$ l'indice de ramification de L sur M .

D'après Koch et Zink, une représentation irréductible σ de degré p est primitive si et seulement si l'on a $K_\sigma = F$. Lorsque σ est une représentation imprimitive de degré 2 , on doit distinguer deux cas :

c_1) Simplement imprimitif : K_σ est une extension quadratique de F , c'est la seule extension quadratique E de F telle que σ soit isomorphe à $I(E/F,\Lambda)$ et le caractère Λ est défini à la conjugaison près par $\mathrm{Gal}(E/F)$.

c_2) Triplement imprimitif : K_σ est une extension biquadratique de F , contenant trois extensions quadratiques E_1 , E_2 et E_3 , et σ est de la forme $I(E_i/F,\Lambda_i)$ pour $i = 1$, 2, 3 .

Précisons que pour $p \neq 2$, il n'y a pas de représentation primitive de W_F et qu'il existe, à torsion près par un caractère de W_F , une seule représentation triplement imprimitive de degré 2 de W_F .

2.4. Représentations admissibles irréductibles du groupe $G = GL_2(F)$

Une représentation (π,V) de G est dite admissible si :

a) le stabilisateur de tout vecteur de V est un sous-groupe ouvert de G ;

b) pour tout sous-groupe ouvert U de G , l'ensemble des vecteurs de V invariants par $\pi(U)$ est de dimension finie.

L'irréductibilité est entendue au sens algébrique. Si χ est un caractère de $F^\times$, la représentation $\pi \otimes \chi$ opère dans l'espace V de π par les opérateurs $\chi(\det g)\pi(g)$. Si π est une représentation admissible irréductible, il existe un caractère ω_π de $F^\times$ tel que $\pi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \omega_\pi(a).1_V$; c'est le caractère central de π . Enfin, on définit la contragrédiente $\pi^\vee$ d'une représentation admissible π et l'on montre que $\pi^\vee$ est équivalente à $\pi \otimes \omega_\pi^{-1}$ si π est irréductible. On a $(\pi^\vee)^\vee = \pi$.

Nous rappellerons quelques points de la théorie de Jacquet et Langlands [12]. Soit (π,V) une représentation admissible irréductible de G , et soit $V^\vee$ l'espace de $\pi^\vee$ qui est de manière naturelle en dualité avec V . Considérons les séries formelles

$$M_{f,v,v'}(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{-n/2}T^n \int_{|\det g|=q^{-n}} f(g) \langle v',\pi(g).v\rangle d^\times g \; , \tag{50}$$

où $d^\times g$ est une mesure de Haar sur G , $v \in V$, $v' \in V^\vee$ et f est une fonction localement constante à support compact sur l'espace $M_2(F)$ des matrices 2×2 . On montre qu'il existe une fraction rationnelle $L(\pi,T)$ de la forme $P(T)^{-1}$ où P est un polynôme de degré $\leqslant 2$, de terme constant 1 , et telle que l'ensemble des séries formelles $M_{f,v,v'}(T)$ soit égal à $L(\pi,T).\mathbb{C}[T,T^{-1}]$. On note alors $\xi(f,\pi|v,v')$ la valeur pour $T = 1$ du polynôme de Laurent $L(\pi,T)^{-1}M_{f,v,v'}(T)$.

Soit $\psi \neq 1$ un caractère additif de F . La transformation de Fourier des fonctions localement constantes à support compact sur $M_2(F)$ est définie par

(51) $$\hat{f}_\psi(u) = \int \psi(\mathrm{Tr}(uu'))f(u')d_\psi u'$$

avec une mesure autoduale $d_\psi u'$ (voir formule (27)). L'équation fonctionnelle de Godement-Jacquet [10] s'écrit alors

(52) $$\xi(\hat{f}_\psi, \pi^\vee \otimes \nu | v, v') = \varepsilon(\pi,\psi)\xi(f,\pi|v',v) ,$$

où la constante $\varepsilon(\pi,\psi)$ ne dépend pas de f , v , v' , et où $\nu(x) = |x|_F$.

2.5. La conjecture de Langlands pour $GL_2(F)$

Indiquons d'abord la classification des représentations admissibles irréductibles de G .

a') Les représentations spéciales π_α (α est un caractère de $F^\times$) : L'espace de la représentation est le quotient par les constantes de l'espace des fonctions localement constantes sur la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$. L'action de G est donnée par

(53) $$\pi_\alpha(g).f(x) = \alpha(\det g)f(\frac{dx-b}{-cx+a}) \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Elle a mêmes facteurs L et ε que la représentation spéciale α de DW_F .

b') La série principale $\pi_{\alpha,\beta}$ (où α,β sont des caractères de $F^\times$) : Lorsque $\alpha \neq \beta$, l'espace de la représentation se compose des fonctions localement constantes sur $P = F^2 \setminus \{0\}$, satisfaisant à

(54) $$f(t.x) = |t|_F^{-1}\alpha(t)^{-1}\beta(t)f(x) \qquad (t \in F^\times , \ x \in P),$$

et l'action de G est donnée par

(55) $$\pi_{\alpha,\beta}(g).f(x) = |\det g|^{-1/2}\beta(\det g).f(g^{-1}x) .$$

Le cas où $\alpha = \beta$ est exceptionnel ; la représentation $\pi_{\alpha,\alpha}$ est de degré 1 et correspond au caractère $\alpha \circ \det$ de G . Dans tous les cas, $\pi_{\alpha,\beta}$ a mêmes facteurs L et ε que la représentation $\sigma_{\alpha,\beta}$ de W_F .

c') Les représentations cuspidales : on peut prendre pour espace l'espace $C_c^\infty(X)$ des fonctions localement constantes à support compact sur l'ensemble X des caractères additifs $\psi \neq 1$ de F . La représentation est normalisée par

(56) $$\pi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(\psi) = f(\psi^a)\psi(b) \quad ;$$

c'est le modèle de Kirillov (on rappelle qu'on a $\psi^a(x) = \psi(ax)$).

Pour achever de décrire une telle représentation, il suffit de se donner l'opérateur $W_\pi = \pi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, car le groupe G est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Or on a l'équation fonctionnelle de Jacquet-Langlands (*), lointaine héritière des calculs de Weil rappelés au n° 1.7. :

(57) $$\Lambda_\psi(W_\pi f, \nu\omega^{-1}\chi^{-1}) = \varepsilon(\pi \otimes \chi,\psi)\Lambda_\psi(f,\chi)$$

où $\psi \in X$, χ est un caractère de $F^\times$ et $f \in C_c^\infty(X)$. On a posé

(*) Avec quelques modifications, cette équation s'applique aussi aux représentations non cuspidales de G .

(58) $$\Lambda_\psi(f,\chi) = \int_{F^\times} |a|_F^{-1/2}\chi(a)f(\psi^a)d^\times a$$

(transformée de Mellin). Il résulte aussitôt de là que la représentation cuspidale π est entièrement caractérisée par les invariants $\varepsilon(\pi\otimes\chi,\psi)$, qui déterminent le caractère central ω_π par

(59) $$\varepsilon(\pi,\psi^a) = |a|_F^{-1}\omega_\pi(a)\varepsilon(\pi,\psi) \quad (*).$$

Un théorème fondamental de Jacquet et Langlands [12, § 15] affirme l'<u>existence d'une bijection</u> $\sigma \longmapsto \pi_\sigma$ <u>de l'ensemble des représentations de degré</u> >1 <u>de</u> $H^\times$ (où H est l'algèbre des quaternions sur F) <u>sur l'ensemble des représentations cuspidales de</u> G , caractérisée par

(60) $$\varepsilon(\pi_\sigma\otimes\chi,\psi) = \varepsilon(\sigma\otimes\chi,\psi)$$

pour tout $\psi\in X$ et tout caractère χ de $F^\times$.

On peut alors reformuler la conjecture de Langlands sous la forme d'<u>une bijection</u> $\Sigma\longmapsto\pi(\Sigma)$ <u>de l'ensemble des représentations</u> Σ <u>de degré</u> 2 <u>de</u> DW_F , <u>dont la restriction à</u> W_F <u>est semi-simple, sur l'ensemble des représentations admissibles irréductibles de</u> $GL_2(F)$. Cette bijection est caractérisée par les relations :

(61) $$\pi(\Sigma\otimes(\chi\circ T_F)) = \pi(\Sigma)\otimes\chi$$

(62) $$L(\pi(\Sigma),T) = L(\Sigma,T)$$

(63) $$\varepsilon(\pi(\Sigma),\psi) = \varepsilon(\Sigma,\psi) \quad .$$

Elles entraînent que le déterminant de Σ est le caractère central de $\pi(\Sigma)$.

Explicitement, la correspondance est la suivante :

Σ	$\pi(\Sigma)$
Σ_α	π_α
$\sigma_{\alpha,\beta}$	$\pi_{\alpha,\beta}$
$I(E/F,\Lambda)$	$W(E/F,\Lambda)$

<u>La représentation de Weil</u> $W(E/F,\Lambda)$ de $GL_2(F)$ se construit ainsi : soient E une extension quadratiqué de F et V l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $E\times X$. On définit une représentation r de $GL_2(F)$ sur V par les formules

(64) $$r\begin{pmatrix}1&b\\0&d\end{pmatrix}f(x;\psi) = \psi(db^{-1}N_{E/F}(x))f(x;\psi^{1/d})$$

(65) $$r\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}f(x;\psi) = \lambda_{E/F}(\psi)\int_E \psi(Tr_{E/F}(x\bar{y}))f(y;\psi)d_\psi y \quad ;$$

la constante $\lambda_{E/F}(\psi)$ est celle de la formule (32) et $\bar{x}$ est le conjugué sur F d'un élément x de E . Par ailleurs, le groupe $E^\times$ agit sur V par

(66) $$H_t f(x;\psi) = |t|_E^{1/2}f(tx;\psi^{1/N(t)})$$

(on a posé $N_{E/F}=N$) et cette action commute à celle de G . On note V_Λ le

(*) On a $L(\pi,T)=1$ si et seulement si π est cuspidale.

quotient de V par le sous-espace engendré par les éléments $H_t f - \Lambda(t)f$, et r_Λ la représentation-quotient de G dans V_Λ . Alors (V_Λ, r_Λ) est la représentation de Weil $W(E/F,\Lambda)$.

Lorsque $p \neq 2$, il n'y a pas d'autres représentations de DW_F ou de $GL_2(F)$, et la conjecture est explicitement démontrée.

Lorsque $p = 2$, il reste à construire les représentations exceptionnelles de $GL_2(F)$, c'est-à-dire celles qui sont associées aux représentations primitives de degré 2 de W_F .

§ 3. La méthode de Kutzko

Pour simplifier, on écrit désormais $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_F$, etc...

3.1. Conducteurs d'une représentation de $GL_2(F)$

Soit (π,V) une représentation admissible irréductible de $G = GL_2(F)$. On a défini le facteur local $\varepsilon(\pi,\psi)$ de π . Au moyen de l'équation fonctionnelle de Jacquet-Langlands, on démontre l'existence d'un entier $f(\pi)$ tel que

(67) $$\varepsilon(\pi \otimes \omega_t, \psi) = \varepsilon(\pi,\psi) t^{f(\pi)+2a(\psi)}$$

où le caractère ω_t est égal à t^{ord} . D'après la formule (34), on a donc $f(\pi(\Sigma)) = f(\Sigma)$ si Σ est une représentation de degré 2 de DW_F , dont la restriction à W_F est semi-simple.

On note $sf(\pi)$ le minimum des entiers $f(\pi \otimes \chi)$, où χ parcourt l'ensemble des caractères de $F^\times$; on dit que π est primordiale si l'on a $sf(\pi) = f(\pi)$, c'est-à-dire $f(\pi \otimes \chi) \geqslant f(\pi)$ pour tout χ . En interprétant les résultats d'Atkin et Lehner sur les "newforms" , Casselman a caractérisé ainsi l'entier $sf(\pi)$. Supposons pour simplifier que π soit primordiale, de caractère central ω_π ; pour chaque entier $n \geqslant 0$ notons V_n le sous-espace de V formé des vecteurs v tels que

(68) $$\pi\begin{pmatrix} a & b \\ \tilde{\omega}^n c & d \end{pmatrix} v = \omega_\pi(d).v \qquad (b\,,c \text{ dans } \mathcal{O}\,,\quad a\,,d \text{ dans } \mathcal{O}^\times\,)$$

Alors V_n est de dimension $\max(0, n - f(\pi) + 1)$; en particulier, on a $V_n \neq (0)$ si et seulement si $n \geqslant f(\pi)$ et $V_{f(\pi)}$ est de dimension 1 (pour une démonstration simple, voir Deligne [4]).

3.2. Un théorème d'induction

On note K le sous-groupe $GL_2(\mathcal{O})$ de G et Z le sous-groupe cyclique de G engendré par la matrice $\begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} \end{pmatrix}$. Si τ est une représentation irréductible (continue) de ZK , on dit que τ est cuspidale s'il n'existe aucun vecteur non-nul invariant par les opérateurs $\tau\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $b \in \mathcal{O}$. Casselman a prouvé les deux faits suivants (*) :

a) Si τ est une représentation cuspidale de ZK, la représentation induite $\mathrm{Ind}_{ZK}^{G}\tau$ est somme directe d'une famille de représentations admissibles irréductibles cuspidales de G.

b) Toute représentation admissible irréductible cuspidale apparaît dans la décomposition d'une représentation $\mathrm{Ind}_{ZK}^{G}\tau$ comme dans a).

Kutzko [16] a obtenu un critère d'irréductibilité pour les représentations induites. Si τ est une représentation irréductible de ZK, on note $f(\tau)$ le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que la restriction de τ à K se factorise par $GL_2(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$; on pose ensuite $sf(\tau) = \min_{\rho} f(\tau \otimes \rho)$, où ρ parcourt les caractères de $\mathcal{O}^\times$ et enfin, on note $r(\pi)$ le plus petit entier $r \geqslant 0$ tel qu'il existe un vecteur non-nul invariant par tous les opérateurs $\tau\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\omega}^r b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $b \in \mathcal{O}$. Autrement dit τ est cuspidale si et seulement si $r(\tau) > 0$. On dit que τ est non-ramifiée si l'on a $r(\tau) = sf(\tau)$.

Kutzko a montré que l'application $\tau \longmapsto \mathrm{Ind}_{ZK}^{G}\tau$ est une bijection de l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles non-ramifiées de ZK sur l'ensemble des (classes de) représentations admissibles irréductibles cuspidales π de G telles que $sf(\pi)$ soit pair. Ceci étant, un argument de comptage facile montre que les représentations ainsi obtenues ne sont autres que les représentations de Weil $W(E/F,\Lambda)$ associées à l'extension quadratique non-ramifiée E de F ("série discrète non ramifiée").

Les autres représentations de G sont obtenues comme suit. On introduit le sous-groupe K' de K des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathfrak{p}$, et le sous-groupe cyclique Z' de G engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\omega} & 0 \end{pmatrix}$; alors Z' normalise K' donc $Z'K'$ est un sous-groupe de G. On adapte à K' les définitions précédentes, et l'on montre que l'application $\tau \longmapsto \mathrm{Ind}_{Z'K'}^{G}\tau$ est une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles non-ramifiées de $Z'K'$ sur l'ensemble des représentations admissibles irréductibles cuspidales π de G telles que $sf(\pi)$ soit impair ("série discrète ramifiée").

Remarquons que, à conjugaison près, les images de K et K' dans $PGL_2(F)$ sont les deux sous-groupes compacts maximaux de $PGL_2(F)$. Carayol (C.R. Acad. Sci., série A, 288 (1979), p. 17-20) a généralisé ces résultats au cas de $GL_m(F)$ avec m premier.

(*) Voir par exemple ma contribution à [2] pour les propriétés des représentations induites.

3.3. Construction de la série discrète ramifiée selon Kutzko [16]

Nous présentons cette construction sous une forme plus intrinsèque due à P. Gérardin et moi-même. Soit E une extension quadratique de F, considérée comme espace vectoriel de dimension 2 sur F. On note A l'algèbre des endomorphismes de E et l'on identifie E à une sous-algèbre de A au moyen de la représentation régulière ; on a donc $A = E \oplus \sigma.E$, où σ est l'élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Pour tout entier m, on note $\mathfrak{P}_A^m$ l'ensemble des $u \in A$ tels que $u(\mathfrak{P}_E^n) \subset \mathfrak{P}_E^{n+m}$ pour tout entier n ; on pose en particulier $\mathfrak{O}_A = \mathfrak{P}_A^o$. C'est une algèbre sur $\mathfrak{O}$, dont nous notons U_A ou U_A^o le groupe multiplicatif, sous-groupe de $A^\times$. Le choix d'une base convenable de E identifie A à $M_2(F)$, $A^\times$ à $GL_2(F)$ et U_A à K (resp. K') si E est non-ramifiée (resp. ramifiée). On montre aussi que $E^\times.U_A$ est un sous-groupe de $A^\times$, isomorphe à ZK ou $Z'K'$ selon le cas. Une construction analogue s'applique au cas où l'on remplace A par l'algèbre des quaternions sur F. Le groupe $\Gamma = E^\times.U_A$ est filtré par la suite des sous-groupes $\Gamma_m = E^\times.(1+\mathfrak{P}_A^m)$.

La trace de E à F est une forme linéaire t sur E ; notons Q le sous-groupe de $A^\times$ formé des u tels que $t(u(x)) = t(x)$ pour tout $x \in E$. On voit aussitôt qu'on a $A^\times = E^\times.Q$ (décomposition unique).

Le cas qui nous intéresse est celui où E est ramifié sur F ; on pose $\delta = \delta(E/F) - e(E/F) + 1$, de sorte que l'on a $\delta = 0$ si et seulement si $p \neq 2$ (cas modérément ramifié). Considérons alors un triple (Λ, m, η) satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Λ <u>est un caractère de</u> $E^\times$.

b) <u>Si</u> $m \leqslant \delta$, <u>on a</u> $\Lambda = 1$; <u>si</u> $m > \delta$, <u>on a</u>

$$2m - \delta = f(\Lambda) \leqslant f(\Lambda.(\chi \circ N_{E/F}))$$

<u>pour tout caractère</u> χ <u>de</u> $F^\times$.

c) η <u>est un caractère additif de</u> $\mathfrak{P}_E^{m-\delta}$, <u>dont le noyau contient</u> $\mathfrak{P}_E^{2m-\delta}$, <u>mais non</u> $\mathfrak{P}_E^{2m-\delta-1}$.

d) <u>On a</u> $\Lambda(1+x) = \eta(x)$ <u>pour tout</u> $x \in \mathfrak{P}_E^m$ <u>lorsque</u> $m > \delta$.

On montre alors qu'il existe un caractère θ de Γ_m caractérisé par la formule

$$\theta(x.(1+u+\sigma.v)) = \Lambda(x)\eta(u) \tag{69}$$

pour $x \in E^\times$, u,v dans E tels que $u+\sigma v \in \mathfrak{P}_A^m$ (ce qui implique $u \in \mathfrak{P}_E^{m-\delta}$). La représentation induite par θ de Γ_m à $A^\times$ est une représentation admissible irréductible cuspidale de $A^\times$, notée $K(E/F,\Lambda,m,\eta)$. L'irréductibilité se prouve en montrant que la restriction au groupe Q (isomorphe au groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in F^\times$, $b \in F$) est l'unique représentation irréductible de dimension infinie de ce groupe.

Le choix d'une base de E identifiant $A^\times$ à G, on a donc construit des représentations de G. D'après Kutzko, les représentations de la forme $K(E/F,\Lambda,m,\eta) \otimes \chi$ sont toutes les représentations admissibles irréductibles cuspidales

π de G avec $sf(\pi)$ impair.

3.4. Représentations exceptionnelles de $GL_2(F)$

Nous disposons de deux constructions de représentations de la série discrète ramifiée, celle de Weil et celle de Kutzko. Il s'agit de les comparer.

Examinons d'abord le cas où $p \neq 2$. Soit E une extension quadratique ramifiée de F ; avec les notations de 3.3, on a $\delta = 0$. Soit Λ un caractère de $E^\times$ tel que $f(\Lambda) > 0$ et $f(\Lambda) \leq f(\Lambda.(\chi \circ N_{E/F}))$ pour tout caractère χ de $F^\times$. Alors $f(\Lambda)$ est un nombre pair, et l'on pose $m = f(\Lambda)/2$ et $\eta(x) = \Lambda(1+x)$ pour $x \in \mathfrak{P}_E^m$. La représentation $K(E/F,\Lambda,m,\eta)$ sera notée plus simplement $K(E/F,\Lambda)$; son caractère central est la restriction λ de Λ à $F^\times$. Par ailleurs, la représentation de Weil $W(E/F,\Lambda)$ a un caractère central égal à $\lambda\omega_{E/F}$, où $\omega_{E/F}$ est l'unique caractère $\omega \neq 1$ de $F^\times$ tel que $\omega \circ N_{E/F} = 1$. Les représentations $K(E/F,\Lambda)$ et $W(E/F,\Lambda)$ ne sont donc pas isomorphes, mais il existe une bijection $\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda}$ telle que $K(E/F,\Lambda) = W(E/F,\tilde{\Lambda})$; autrement dit, la représentation $I(E/F,\tilde{\Lambda})$ de W_F et la représentation $K(E/F,\Lambda)$ de $GL_2(F)$ se correspondent par l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de Langlands.

L'application $\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda}$ a été déterminée par Gérardin il y a quelques années, grâce au calcul des facteurs $\varepsilon(\pi\otimes\chi,\psi)$ où π est de la forme $K(E/F,\Lambda)$. Il s'agit essentiellement de calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_m} \theta(x)\chi(N_{A/F}x)\psi(Tr_{A/F}x)d^\times x \ , \tag{70}$$

où le caractère θ de Γ_m est défini par la formule (69), et où $N_{A/F}$ et $Tr_{A/F}$ sont respectivement la norme et la trace réduites de A à F . Le calcul est élémentaire.

Passons au cas $p = 2$. La partie la plus difficile de l'article [9] de Gérardin et Kutzko est consacrée au calcul de l'intégrale (70) dans ce cas. A partir de là, on peut déterminer pour toute représentation de Weil $W(E/F,\Lambda)$ une représentation de la forme $K(E_1/F,\Lambda_1,m_1,\eta_1) \otimes \chi$ qui lui est isomorphe. On notera que dans certains cas, on a $E_1 \neq E$ de sorte qu'il faut changer d'extension quadratique.

A partir de là, Kutzko [17] a déterminé les représentations exceptionnelles, c'est-à-dire les représentations de la forme $K(E/F,\Lambda,m,\eta)$ qui ne sont pas isomorphes à une représentation de Weil. En particulier, lorsque $F = \mathbb{Q}_2$, on retrouve les quatre représentations exceptionnelles déterminées par Nobs [19].

Pour interpréter les résultats, Kutzko introduit une notion de relèvement ("tame lift"). Soit F_1 une extension modérément ramifiée de F et soit π une représentation de $GL_2(F)$ de la forme $K(E/F,\Lambda,m,\eta)$. Posons

$$E_1 = EF_1 \ , \quad \Lambda_1 = \Lambda \circ N_{E_1/F_1} \ , \quad \eta_1 = \eta \circ Tr_{E_1/E}$$

et déterminons l'entier m_1 de sorte que l'on ait

$$f(\Lambda_1) = 2m_1 - \delta_1$$

avec $\delta_1 = \delta(E_1/F_1) - e(E_1/F_1) + 1$. Le relèvement π_{F_1} de π est la représentation $K(E_1/F_1,\Lambda_1,m_1,\eta_1)$ de $GL_2(F_1)$.

On prouve alors les deux théorèmes suivants (*) :

a) Supposons que F_1 soit une extension cyclique de degré premier de F . Pour qu'une représentation π' de la série discrète ramifiée de $GL_2(F_1)$ soit de la forme π_{F_1} où π appartient à la série discrète ramifiée de $GL_2(F)$, il faut et il suffit que la classe d'isomorphisme de π' soit invariante par le groupe de Galois de F_1 sur F .

b) Si π est une représentation exceptionnelle de $GL_2(F)$, il existe une unique extension modérément ramifiée T de F , de groupe de Galois isomorphe à $\mathfrak{A}_3$ ou $\mathfrak{S}_3$, et telle que π_T ne soit pas une représentation exceptionnelle de $GL_2(T)$.

3.5. La construction fondamentale

Vu les dénombrements effectués au n° 2.2, la preuve de la conjecture de Langlands pour $GL_2(F)$ se ramène au problème suivant :

Soit σ une représentation primitive de degré 2 du groupe W_F . Construire une représentation exceptionnelle π de $GL_2(F)$ telle que $\varepsilon(\pi\otimes\chi,\psi) = \varepsilon(\sigma\otimes(\chi\circ T_F),\psi)$ quels que soient le caractère multiplicatif χ de F et le caractère additif $\psi \neq 1$ de F . Prouver que toute représentation exceptionnelle de $GL_2(F)$ est ainsi obtenue.

Soit donc σ une représentation primitive de degré 2 de W_F . D'après le n° 2.3, il existe une unique extension modérément ramifiée T de F , de groupe de Galois isomorphe à $\mathfrak{A}_3$ ou $\mathfrak{S}_3$, telle que la restriction σ_T de σ à W_T soit imprimitive. De plus, quitte à remplacer σ par $\sigma\otimes\chi$, où χ est un caractère de W_F , on peut supposer qu'on a $f(\sigma\otimes\chi) \geq f(\sigma)$ pour tout caractère χ de W_F , et que $\operatorname{Det}\sigma$ est un caractère de $F^\times$, d'ordre fini non divisible par 3 .

Nous ne considérerons en détail que le cas où le groupe $\mathrm{Gal}(T/F)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_3$. Comme σ_T est une représentation imprimitive de W_T , il existe une représentation π' de $GL_2(T)$ non exceptionnelle, ayant les mêmes facteurs L et ε que σ_T (à savoir une représentation $W(E/T,\Lambda)$ convenable). Il est clair que la classe d'isomorphisme de π' est invariante par $\mathrm{Gal}(E/T)$ et il existe donc une représentation exceptionnelle π de $GL_2(F)$ dont le relèvement π_T à $GL_2(T)$ soit isomorphe à π' .

Il s'agit de prouver l'égalité

(71) $$\varepsilon(\pi\otimes\chi,\psi) = \varepsilon(\sigma\otimes(\chi\circ T_F),\psi)$$

pour tout caractère χ de $F^\times$; on fixe le caractère additif $\psi \neq 1$ de F et l'on pose $\psi_T = \psi\circ \mathrm{Tr}_{T/F}$. Le cas où $f(\chi) \leq 1$ se traite sans difficulté en se ramenant à des sommes de Gauss sur un corps fini. On peut alors se limiter au cas où χ est

(*) La partie a) utilise de manière essentielle la théorie du "base change" de Langlands.

d'ordre fini non divisible par 3 . Soit Φ le corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par les racines de l'unité d'ordre non divisible par 3 . Sous les hypothèses faites, les deux membres de l'égalité (71) appartiennent à Φ . De plus, on prouve les formules

(72) $$\varepsilon(\sigma \otimes (\chi \circ T_F),\psi)^3 = \varepsilon(\sigma_T \otimes (\chi_T \circ T_T),\psi_T)$$

(73) $$\varepsilon(\pi \otimes \chi,\psi)^3 = \varepsilon(\pi_T \otimes \chi_T,\psi_T)$$

où $\chi_T = \chi \circ N_{T/F}$. Par construction, la représentation σ_T de W_T a les mêmes facteurs ε que la représentation π_T de $GL_2(T)$. On a donc

$$\varepsilon(\sigma \otimes (\chi \circ T_F),\psi)^3 = \varepsilon(\pi \otimes \chi,\psi)^3 \quad ;$$

mais le corps Φ ne contenant aucune racine cubique de l'unité, un élément de Φ a au plus une racine cubique dans Φ . Ceci achève la preuve de la relation (71).

Le même raisonnement peut se lire à l'envers. Partant d'une représentation exceptionnelle π de $GL_2(F)$, on construit comme à la fin du n° 3.4 une extension T de F telle que π se relève en une représentation non exceptionnelle π_T de $GL_2(T)$. A π_T correspond une représentation imprimitive σ' de W_T , dont la classe d'isomorphisme est invariante par $Gal(T/F)$. Par un argument élémentaire de théorie des groupes, il existe une représentation σ de degré 2 de W_F dont σ' soit la restriction à W_T , et telle que $\operatorname{Det} \sigma = \omega_\pi$. On prouve l'égalité (71) comme ci-dessus.

Ceci achève la description de la démonstration de la conjecture de Langlands par Kutzko.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Formes automorphes et séries de Dirichlet [d'après R.-P. Langlands], in Sém. Bourbaki, 1974/75, exposé n° 466, Lect. Notes in Math., vol. 514, Springer, 1976.

[2] A. BOREL et W. CASSELMAN (éditeurs) - Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symposia in Pure Math., vol. 33, A.M.S., 1979.

[3] J. BUHLER - Icosahedral Galois representations, Lect. Notes in Math., vol. 654, Springer, 1978.

[4] P. DELIGNE - Formes modulaires et représentations de GL(2) , in Modular functions of one variable II, p. 55-105, Lect. Notes in Math., vol. 349, Springer, 1973.

[5] P. DELIGNE - Les constantes des équations fonctionnelles, ibid., p. 501-597.

[6] P. DELIGNE et J.-P. SERRE - Formes modulaires de poids 1 , Annales Sci. E.N.S., 4e série, 7(1974), p. 507-530.

[7] A. FRÖHLICH (éditeur) - Algebraic number fields (L-functions and Galois properties), Academic Press, 1977.

[8] I. GELFAND, M. GRAEV et I. PIATESKII-SHAPIRO - Representation theory and automorphic functions, Saunders, 1969.

[9] P. GÉRARDIN et Ph. KUTZKO - Facteurs locaux pour GL(2) , à paraître aux Annales Scientifiques E.N.S..

[10] R. GODEMENT et H. JACQUET - Zeta functions of simple algebras, Lect. Notes in Math., vol. 260, Springer, 1972.

[11] G. HENNIART - Représentations du groupe de Weil d'un corps local, Publ. Math. Orsay, 1979 (= thèse de 3e cycle).

[12] H. JACQUET et R.-P. LANGLANDS - Automorphic forms on GL(2) , Lect. Notes in Math., vol. 114, Springer, 1970.

[13] H. KOCH - Classification of the primitive representations of the Galois groups of local fields, Inv. Math., 40(1977), p. 195-216.

[14] H. KOCH - On the local Langlands conjecture for central division algebras of index p , prépublication, Berlin, 1979.

[15] Ph. KUTZKO - The irreducible imprimitive local Galois representations of prime degree, Journ. Alg., 57(1979), p. 101-110.

[16] Ph. KUTZKO - On the supercuspidal representations of GL_2 , I , II , Amer. Journ. Math., 100(1978), p. 43-60 et p. 705-716.

[17] Ph. KUTZKO - The exceptional representations of GL_2 , à paraître.

[18] Ph. KUTZKO - The Langlands conjecture for GL_2 of a local field, à paraître aux Annals of Mathematics.

[19] A. NOBS - Les représentations exceptionnelles de $GL_2(\mathbb{Q}_2)$ et $PGL_2(\mathbb{Q}_2)$, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, Tome 286(1978), p. 767-769.

[20] J.-P. SERRE - Corps locaux, 2e édit., Actu. Sci. Ind. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[21] J. TUNNELL - On the local Langlands conjecture for GL(2) , Inv. Math., 46(1978), p. 179-200.

[22] A. WEIL - Oeuvres scientifiques (Collected papers), 3 vol., Springer, 1979.

[23] A. WEIL - Basic Number theory, 3e édit., Grundlehren der Math. Wiss., Band 144, Springer, 1976.

[24] A. WEIL - Dirichlet series and automorphic forms, Lect. Notes in Math., vol. 189, Springer, 1971.

[25] W. ZINK - Counting primitive projective representations of local Galois groups, prépublication, Berlin, 1978.

Référence ajoutée en novembre 1980 :

[26] Ph. KUTZKO - The Langlands conjecture for GL_2 of a local field, Bull. Amer. Math. Soc. (new series), 2(1980), p. 455-458.

Pierre CARTIER,
I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 BURES-SUR-YVETTE.