

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

VALENTIN POÉNARU

## **Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1980, exp. n° 529, p. 66-79

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1978-1979\\_\\_21\\_\\_66\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__66_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE THURSTON SUR LES DIFFÉOMORPHISMES DES SURFACES  
ET L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par Valentin POÉNARU

La théorie dont il sera question résout les trois problèmes suivants :

- 1°) décrire "toutes" les courbes simples fermées sur une surface, à isotopie près ;
- 2°) décrire "tous" les difféomorphismes d'une surface, à isotopie près ;
- 3°) mettre un bord "naturel" à l'espace de Teichmüller.

Pour la commodité de l'exposé, toutes les surfaces considérées seront connexes, orientables, compactes sans bord, de genre  $g > 1$ . En principe, les difféomorphismes qu'on va considérer, préservent l'orientation. En fait, toute la théorie peut s'étendre (avec certaines petites modifications) dans le cas non-orientable, en genre quelconque, quand il y a un bord.

Tous les résultats qui suivent, sauf mention explicite du contraire sont dus à W. Thurston ([1], [2]). Un autre document où le lecteur pourra trouver des démonstrations détaillées pour les résultats énoncés ci-dessous (à l'exception du théorème 9) est [3].

1. L'espace des courbes simples fermées sur une surface

Soit  $M_g$  une surface de genre  $g$ . On va noter par  $\mathcal{J}(M_g)$  l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples fermées non orientées et non homotopes à 0.

Je rappelle que deux courbes simples fermées sur  $M_g$  sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes [4]. De même, deux difféomorphismes d'une surface sont homotopes si et seulement s'ils sont isotopes (toujours [4]).

On va considérer l'application symétrique :

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} \xrightarrow{i} \mathbb{R}_+$$

où  $i(\alpha, \beta) = \{ \text{le nombre minimum d'intersections géométriques (c'est-à-dire de points communs) d'un représentant de } \alpha \text{ avec un représentant de } \beta \}$ . Il ne faut pas confondre ce nombre avec le cup-produit ou l'intersection algébrique, et, de toute façon, dans toute la théorie qui suit, on n'utilisera que des nombres non négatifs ; la topologie algébrique est, en principe, absente dans tout cet exposé.

Soient  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$  l'ensemble des fonctionnelles  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , muni de la topologie faible ainsi que de la multiplication par des scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , et  $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}})$  "l'espace projectif" correspondant  $(\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}} - 0) / \mathbb{R}_+$ .

L'application  $i$  induit une flèche naturelle

$$\mathcal{D} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$$

(où  $(i_*(\alpha))(\beta) = i(\alpha, \beta)$ ) et il n'est pas difficile de voir que :

1)  $i_* \mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}} - 0$  ;

2) la flèche composée  $\mathcal{D} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}} - 0 \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}})$  est injective. Le sous-espace

$$\overline{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{\pi \circ i_* \mathcal{D}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}})$$

est (par définition) le complété de l'espace des courbes simples fermées.

Remarque.- Bien entendu, tout ceci reste vrai pour le tore ( $g = 1$ ). Dans ce cas, le passage de  $\mathcal{D}$  à  $\overline{\mathcal{D}}$  n'est que le passage des nombres rationnels aux nombres réels quelconques. En général,  $\mathcal{D}$  est un objet "arithmétique" plus délicat à manipuler que  $\overline{\mathcal{D}}$ ; Thurston interprète les éléments de  $\overline{\mathcal{D}}$ , en particulier les "irrationnels", comme des feuilletages. Ceci sera expliqué au paragraphe suivant.

On va considérer aussi la flèche

$$i_* : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$$

où  $i_*(\lambda, \alpha) = \lambda i_*(\alpha)$ . Cette flèche est injective.

THÉORÈME 1.- On a des homéomorphismes :

a)  $i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}) = \mathbb{R}^{6g-6}$ . [Ceci est une partie de  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$ .]

b)  $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{S}^{6g-7}$ . [Ceci est une partie de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{D}})$ .]

## 2. Feuilletages mesurés

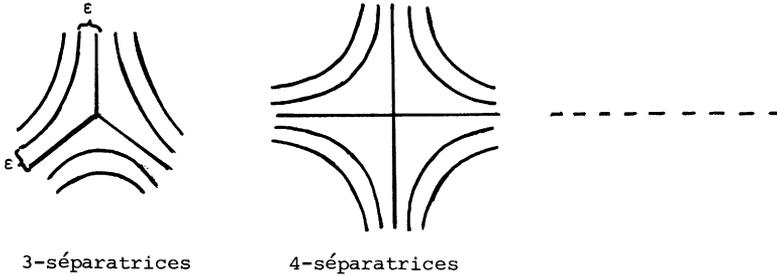
Il s'agit maintenant de donner une représentation géométrique, concrète, des fonctionnelles de  $i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{D}}$ .

Par définition, un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  sur  $M_g$  est un feuilletage de codimension 1 (avec des singularités isolées qui seront explicitées ci-dessous) muni d'une structure de distance invariante entre les feuilles. Ceci veut dire que (en dehors de singularités), on a des cartes  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{x, y\}$ , que

$\varphi^{-1}(y = \text{const.})$  sont les feuilles de  $\mathcal{F}|U$ , que les fonctions de transition

$$\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

ont la forme  $\varphi_{ij}(x,y) = (f(x,y), c \pm y)$  et que  $|y_1 - y_2|$  est la distance entre les feuilles respectives. Les feuilletages considérés ne sont pas nécessairement transversalement orientables. Les singularités sont comme ci-dessous :



Remarque.- Ce genre de structure apparaît, en fait, dans les cristaux liquides de type smectique.

On a la formule, plus ou moins immédiate :

$$2(\text{nombre des singularités}) - (\text{nombre des séparatrices}) = 2\chi(M_g) .$$

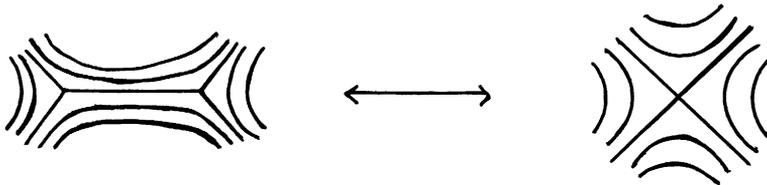
Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage mesuré et  $\gamma$  une courbe simple fermée, on définit :

$$\int_{\gamma} \mathcal{F} = \{ \text{la variation totale de la coordonnée } y \text{ de } p \in \gamma, \text{ calculée le long de } \gamma \}$$

et pour  $\alpha \in \mathcal{A}(M_g)$ , on introduit : 
$$i(\mathcal{F}, \alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} \int_{\gamma} \mathcal{F} .$$

Par définition,  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont "équivalents au sens de Schwartz" si,  $\forall \alpha$ , on a  $i(\mathcal{F}_1, \alpha) = i(\mathcal{F}_2, \alpha)$ , donc si  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  définissent la même fonctionnelle.

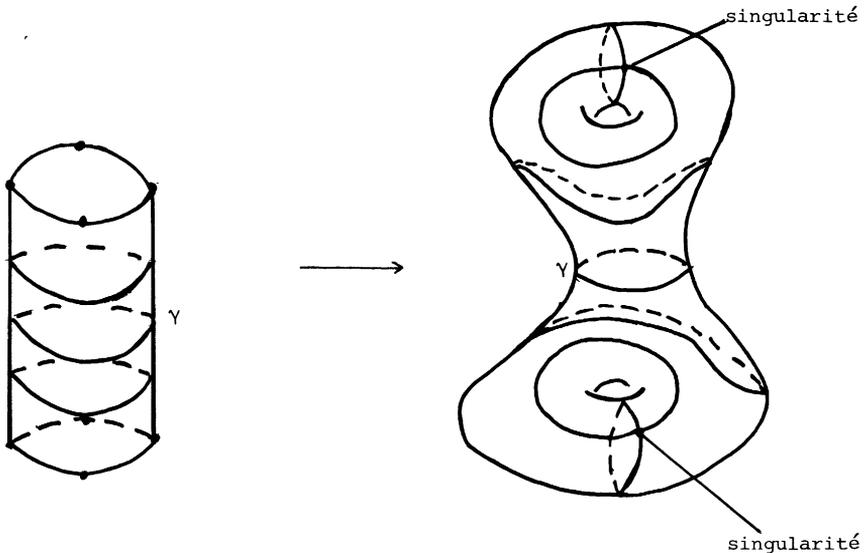
On dira que  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont "équivalents au sens de Whitehead" si l'on peut passer de l'un à l'autre par des isotopies et des déformations élémentaires du type suivant :



THÉORÈME 2.-  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont équivalents au sens de Schwartz si et seulement s'ils sont équivalents au sens de Whitehead.

L'ensemble des classes d'équivalence sera désigné par  $\mathcal{MF}(M_g)$  ; il s'identifie à une partie de  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$  dont il hérite une topologie. Il y a une inclusion naturelle  $i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{MF}$  définie comme suit. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et  $\gamma$  un représentant de  $\alpha \in \mathcal{A}$ . On peut toujours représenter  $M_g$  comme un cylindre  $[0, \lambda] \times S^1$  avec des identifications sur le bord, de telle façon que  $\lambda/2 \times S^1$  corresponde à  $\gamma$ . Ceci induit un feuilletage mesuré de  $M_g$  dont les feuilles lisses sont les courbes  $\mu \times S^1$  ( $0 < \mu < \lambda$ ), la distance entre les feuilles étant la différence de niveau.

Exemple :



En quelque sorte, on diffuse la mesure de Dirac 1-dimensionnelle concentrée le long de  $\gamma$  en une mesure (1-dimensionnelle) lisse. Une courbe simple fermée est ainsi un cas spécial de feuilletage mesuré !

Remarque.- Une construction analogue marche pour les courbes multiples. Mais il y a une différence essentielle : le feuilletage obtenu à partir d'une courbe simple est "uniquement ergodique" c'est-à-dire qu'à un facteur scalaire près, il possède une seule mesure (ou distance) transverse invariante. Ceci est manifestement faux dans le cas des courbes multiples. [Remarque : la notion "d'unique ergodicité" est utilisée ici dans un sens un peu plus large que d'habitude.]

THÉORÈME 3.- Par l'inclusion ci-dessus,  $\mathcal{MF}$  s'identifie à  $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})}$ .

En conséquence, l'image de  $\mathcal{MF} - 0$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ , notée  $\mathcal{PMF}(M_g)$ , s'identifie à  $\overline{\mathcal{J}}$ .

Les théorèmes 1, 2 et 3 se démontrent en même temps par un procédé qui est trop long et trop compliqué pour être exposé ici.

### 3. Espaces de Teichmüller

Dans cet exposé, l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(M_g)$  sera considéré comme l'ensemble des structures hyperboliques (c'est-à-dire métriques riemanniennes  $\gamma$  de courbure  $K = -1$ ) sur  $M_g$ , à isotopie près. Si  $\gamma$  est une telle métrique et  $\alpha \in \mathcal{J}$ , on va définir :

$$i(\gamma, \alpha) = \{ \text{la longueur de (l'unique) géodésique } \beta \in \alpha \}.$$

Ceci induit une injection :

$$\mathcal{T}(M_g) \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - 0 \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}).$$

Avec la topologie induite,  $\mathcal{T}(M_g) = \mathbb{R}^{6g-6}$  (Fricke, Nielsen,...). Dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ , les espaces  $\mathcal{T}(M_g)$  et  $\mathcal{MF}(M_g)$  sont disjoints. La même chose est vraie au niveau de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ .

THÉORÈME 4.- La fermeture de  $\pi \circ i_*(\mathcal{T}(M_g))$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$  est

$\pi \circ i_*(\mathcal{T}(M_g)) \cup \mathcal{PMF} = \pi \circ i_*(\mathcal{T}(M_g)) \cup \overline{\mathcal{J}}$ . Ceci donne une topologie naturelle  $\mathcal{T}(M_g) \cup \overline{\mathcal{J}}$  qui devient ainsi le disque  $D^{6g-6}$ .

Le mot naturel veut dire que  $\text{Diff } M_g$  agit continûment sur cet espace de Teichmüller compactifié :  $\overline{\mathcal{T}(M_g)} = \mathcal{T}(M_g) \cup \overline{\mathcal{J}}$ .

Remarque.- Il y a d'autres compactifications connues de l'espace de Teichmüller, mais celle de Thurston est la seule qui soit naturelle.

Ainsi  $\Phi \in \text{Diff } M_g$  agit continûment sur  $\overline{\mathcal{T}(M_g)} = D^{6g-6}$ , et en appliquant le théorème de point fixe de Brower, on trouve le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.- Si  $\Phi \in \text{Diff } M_g$ , alors, ou bien  $\Phi$  laisse fixe un point de l'espace de Teichmüller (dans quel cas  $\Phi$  est isotope à un difféomorphisme périodique), ou bien  $\Phi$  laisse fixe un élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{MF}(M_g))$ .

4. Classification des difféomorphismes

Le corollaire 5 peut être poursuivi par une analyse plus raffinée de ce qu'un difféomorphisme peut faire. Le résultat est le suivant :

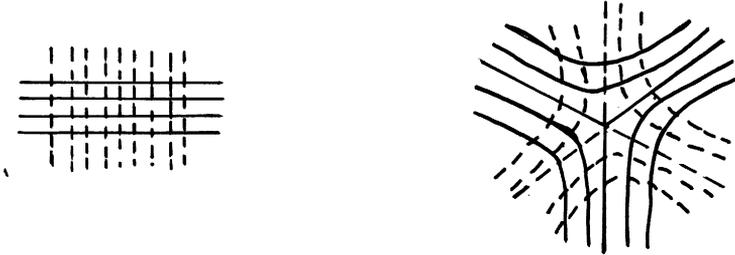
THÉORÈME 6.- Tout difféomorphisme de  $M_g$  est isotope à un difféomorphisme  $\Phi$  qui fait l'une des choses (mutuellement exclusives) suivantes :

1) "Cas elliptique" :  $\Phi$  est une isométrie pour une certaine structure hyperbolique de  $M_g$  .

2) "Cas hyperbolique ou pseudo-Anosov" : il existe un nombre  $\lambda > 1$  et deux feuilletages mesurés  $\mathcal{F}^u$ ,  $\mathcal{F}^s$  transverses, tels que :

$$\Phi(\mathcal{F}^s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}^s, \quad \Phi(\mathcal{F}^u) = \lambda \mathcal{F}^u .$$

Le fait que  $\mathcal{F}^u$  et  $\mathcal{F}^s$  sont "transverses" veut dire qu'ils ont les mêmes singularités et qu'ils se coupent comme suit :



3) "Cas parabolique ou réductible" :  $\Phi$  laisse invariant un système  $\Gamma$  de courbes simples fermées deux à deux disjointes non homotope à 0 . Les courbes partagent  $M_g$  en régions invariantes où  $\Phi$  est du type I ou II, (pour une définition "à bord" appropriée).

La démonstration de ce théorème fait grand usage des "partitions de Markov" (Yu Sinaï, [5]).

Voici un résultat d'analyse spectrale non linéaire :

THÉORÈME 7.- Soit  $\Phi$  un difféomorphisme de  $M_g$  . Il existe un système fini de "valeurs propres" de  $\Phi$  , qui sont des entiers algébriques  $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$  tels que,  $\forall \alpha \in \mathcal{L}$  et toute métrique  $\gamma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(\gamma, \Phi^n \alpha)^{1/n} = \{ \text{l'un des } \lambda_j \} .$$

$\Phi$  est isotope à un pseudo-Anosov si et seulement si  $k = 1$  et  $\lambda_1 = \lambda > 1$  . Le degré de l'entier algébrique  $\lambda$  est borné en fonction de  $g$  .

Les difféomorphismes pseudo-Anosov ont toute une suite de propriétés remarquables.

1) On commence par remarquer qu'à partir des mesures transverses 1-dimensionnelles de  $\mathcal{F}^u$ ,  $\mathcal{F}^s$ , on construit une mesure (de probabilité) 2-dimensionnelle invariante pour  $\Phi$ . Avec ceci,  $\Phi$  est Bernoulli et son entropie est  $h(\Phi) = \log \lambda$ .

2) Je commence par rappeler la définition de l'entropie topologique  $h_{\text{TOP}}(f)$  pour une application continue  $f : X \rightarrow X$ , où  $X$  est compact (Adler et Weiss). D'abord, si  $u$  est un recouvrement ouvert fini de  $X$ , on définit :

$$N(u) = \{ \text{la cardinalité minimale d'un recouvrement } u' \subset u \} .$$

Ensuite, on introduit :

$$h(f, u) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \log N(u \cap f^{-1}u \cap \dots \cap f^{-(n-1)}u)$$

et finalement

$$h_{\text{TOP}}(f) = \sup_u h(f, u) .$$

[Une définition équivalente est la suivante : pour chaque mesure de probabilité  $f$ -invariante (et il y en a toujours), on construit une entropie de  $f$ , dans le sens de la théorie de la mesure ; le sup de ces entropies est  $h_{\text{TOP}}(f)$ . L'équivalence des deux définitions est un fait bien connu.]

THÉORÈME 8.- Si  $\Phi$  est pseudo-Anosov, son entropie topologique est minimale dans la classe d'isotopie respective. On a :

$$h_{\text{TOP}}(\Phi) = h(\Phi) = \log \lambda .$$

3) Thurston a donné une vaste "généralisation" du théorème d'uniformisation, en dimension 3. En voici un morceau :

THÉORÈME 9.- Soit  $V^3$  une variété fermée de dimension 3, fibrée sur  $S^1$

$$\begin{array}{ccc} M_g & \hookrightarrow & V^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

$V^3$  admet une structure hyperbolique si et seulement si la monodromie

$\Phi : M_g \hookrightarrow$  est isotope à un pseudo-Anosov.

Pour la démonstration, je renvoie au grand travail de Thurston [2]. On pourra remarquer aussi que, vu le théorème de rigidité de Mostow [6], une structure hyperbolique est un objet beaucoup plus difficile à attraper en dimension 3 que sur une surface.

4)  $\mathcal{F}^u$  et  $\mathcal{F}^s$  projectivisés sont les uniques points fixes de  $\Phi$ . La géodésiques de  $\mathcal{T}M_g$  qui les joint est invariante. Tout le reste bouge ; c'est vraiment la même image que celle d'un élément hyperbolique de  $SL(2, \mathbb{R})$  agissant sur  $\text{Im } z \geq 0$ . [Ceci est la partie "unicité" du théorème de classification des difféomorphismes de Thurston.]

En fait, il y a, jusqu'à un certain point, des analogies entre l'espace de Teichmüller et le demi-plan de Poincaré.

Le Théorème 6 est une vaste généralisation de la discussion élémentaire suivante : si  $\varphi$  est un difféomorphisme du tore  $T^2$ ,  $\varphi$  est isotope à un  $\Phi \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Pour un tel  $\Phi$ , on a trois cas :

- a) le cas elliptique où les valeurs propres sont imaginaires et  $\Phi$  est une rotation hyperbolique d'ordre fini ;
- b) le cas parabolique où les valeurs propres sont égales (et de module 1) où  $\Phi$  est un "twist de Dehn" ;
- c) le cas hyperbolique où les valeurs propres sont réelles et distinctes (et donc irrationnelles) et  $\Phi$  est un difféomorphisme d'Anosov.

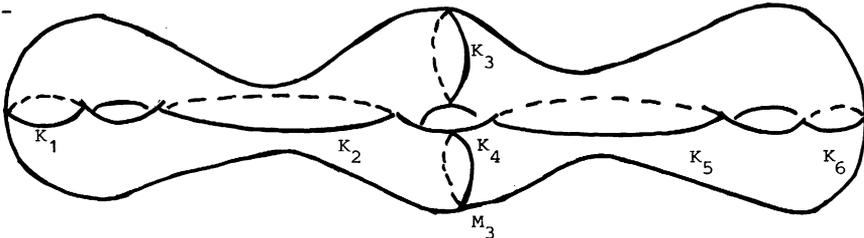
Remarque.- Dans le cas du tore  $T^2 = M_1$ , il y a des analogues (faciles) des théorèmes  $1 \rightarrow 5$  qui sont vrais aussi. Bien entendu, dans ce contexte on parle de structures plates (normalisées par la condition que  $\text{aire } T^2 = 1$ ),  $\mathcal{T}(T^2) = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{PM}\mathcal{F}(T^2) = S^1$ , les feuilletages mesurés sont non singuliers, et ainsi de suite.

5. Comment Thurston met un bord naturel à l'espace de Teichmüller

Dans ce paragraphe, je vais donner quelques idées sur la démonstration du théorème 4. Pour plus de détails, on pourra consulter, par exemple, [3].

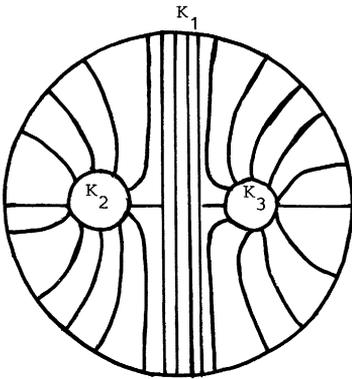
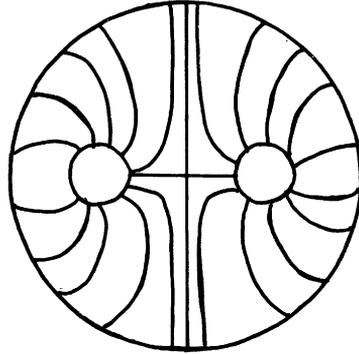
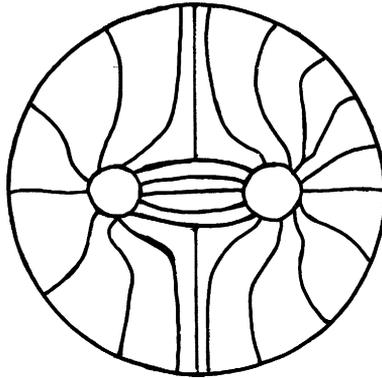
Voici, pour commencer, une description (très simplifiée) de  $\mathcal{MF}(M_g)$ . D'abord, par un système de  $3g-3$  courbes simples fermées disjointes  $K_1, K_2, \dots, K_{3g-3}$ ,  $M_g$  peut être décomposée en  $2g-2$  "pantalons" (c'est-à-dire disques à deux trous).

Exemple.-



Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage mesuré. Pour simplifier, on va supposer que tous les nombres  $i(\mathcal{F}, K_j) = m_j$  sont non nuls et tous les  $K_j$  sont transverses à  $\mathcal{F}$ . A vrai dire, cette hypothèse simplificatrice masque la plus grande partie des difficultés du problème. Le lecteur désireux de plus de détails pourra s'en rendre compte en regardant, par exemple, [3].

Soit  $P$  le pantalon de bord  $K_1, K_2, K_3$ . On peut montrer que les classes d'équivalence (de Whitehead) de feuilletages mesurés sur  $P$ , transverses au bord, sont caractérisées par les nombres  $m_1, m_2, m_3$ , qui peuvent être arbitraires. Les dessins qui suivent donnent une idée de ce qui se passe.

cas :  $m_1 > m_2 + m_3$ cas :  $m_1 = m_2 + m_3$ cas où les  $m_1, m_2, m_3$  satisfont aux inégalités du triangle  $m_1 < m_2 + m_3$ , e.a.d.s.

Notre  $\mathcal{T}$  est caractérisé par :

- (i) ce qu'il fait sur chaque pantalon (donc  $3g-3$  paramètres) ;
- (ii) la manière de recoller les pantalons (encore  $3g-3$  paramètres : les (logarithmes des) angles de recollement autour des courbes  $K_j$ ).

Ceci donne une vague idée pourquoi  $\mathcal{MF}(M_g) = \mathbb{R}^{6g-6}$ . Il faut dire que toute la difficulté de la vraie démonstration réside, d'une part, dans le fait que les  $m_i$  peuvent s'annuler et, d'autre part, dans le fait qu'on doit exprimer les angles de recollement en termes de fonctionnelles de  $\mathbb{R}_+^{\Delta}$ . Dans la rédaction [3], ceci est fait par des formules explicites construites par A. Fathi.

L'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(M_g)$  peut être décrit en termes analogues : une fois la décomposition de  $M_g$  en pantalons fixée (à isotopie près) et la métrique hyperbolique  $\gamma$  choisie, on peut supposer que les  $K_j$  sont des géodésiques. Mais un pantalon hyperbolique à bords géodésiques est complètement caractérisé par les longueurs des bords qui peuvent être arbitraires. Ainsi, un point de l'espace de Teichmüller est repéré par :

- (i) ce qu'il fait sur chaque pantalon, donc  $3g-3$  longueurs arbitraires ;
- (ii) la manière de recoller les pantalons, donc encore  $3g-3$  paramètres : les (logarithmes des) angles de recollement ...

Remarque. - L'espace de Teichmüller est :  $\{ \text{l'ensemble des structures hyperboliques} \} / \text{Diff}_0(M_g)$  où  $\text{Diff}_0(M_g) = \{ \text{la composante de l'identité dans } \text{Diff } M_g \}$ .

Ceci fait que les paramètres de recollement sont dans  $\mathbb{R}$ . Si l'on divisait par  $\text{Diff } M_g$  (Schottky), ils seraient des vrais angles, dans  $S^1$ .

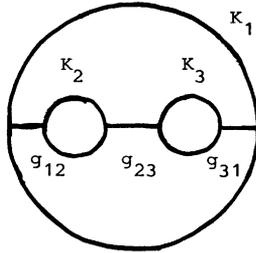
Maintenant, Thurston commence par construire une projection  $q : \mathcal{T}(M_g) \rightarrow \mathcal{MF}(M_g)$ . Cette projection dépend d'un choix de décomposition en pantalons. Soient  $\gamma$  une structure hyperbolique et  $P$  l'un des pantalons, de bords  $K_1, K_2, K_3$  que l'on pourra supposer géodésiques. Soient  $l_1, l_2, l_3$  les longueurs de  $K_1, K_2, K_3$ . A un changement de notation près, on a toujours l'une des situations suivantes :

$$\alpha) \quad l_1 > l_2 + l_3 \quad ,$$

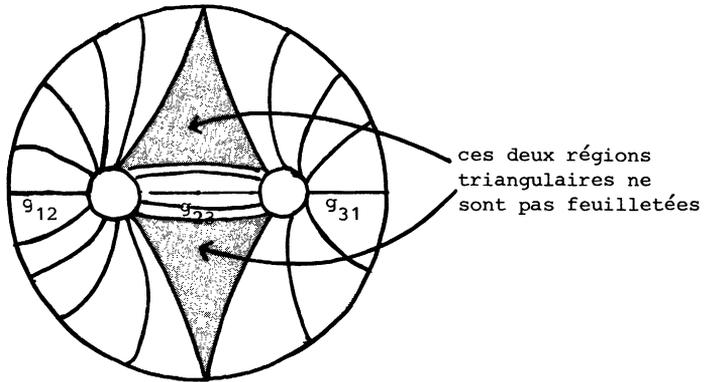
$$\beta) \quad l_1 = l_2 + l_3 \quad ,$$

$$\gamma) \quad \text{les } l_1, l_2, l_3 \text{ satisfont aux inégalités du triangle.}$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'on est dans la troisième situation. Il existe des uniques coutures géodésiques orthogonales au bord, comme ci-dessous :



A partir de ce dessin, on essaie de feuilletter le pantalon par des lignes à égale distance (hyperbolique) comme ci-dessous :



Il nous reste deux régions triangulaires pas feuilletées. Ceci est sans conséquence car toute la théorie des feuilletages mesurés peut être faite avec des feuilletages "partiels" (aussi, on peut "écraser" ces triangles en des points singuliers d'un feuilletage partout défini).

On fait quelque chose d'analogue dans les situations  $\alpha$ ),  $\beta$ ), et ceci dans tous les pantalons. Ainsi, on a construit  $q$ , qui est un homéomorphisme de  $\mathcal{J}(M_g)$  sur l'ouvert  $U(K_1, K_2, \dots, K_{3g-3})$  constitué par les feuilletages mesurés tels que  $V_{m_j} \neq 0$ .

LEMME FONDAMENTAL. - Soient  $\varepsilon > 0$  et  $V(\mathcal{K}, \varepsilon)$  l'ouvert de  $\mathcal{J}(M_g)$  défini par les métriques hyperboliques telles que toutes les longueurs des  $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_{3g-3})$  (réalisées par des géodésiques) sont  $> \varepsilon$ . Pour tout  $\alpha \in \mathcal{J}$ , il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $\gamma \in V(\mathcal{K}, \varepsilon)$ , on ait :

$$i(q(\gamma), \alpha) \leq i(\gamma, \alpha) \leq i(q(\gamma), \alpha) + C.$$

Vague idée de démonstration. La première inégalité est facile. Pour la seconde

inégalité, on se réduit au lemme local suivant :

" Soit  $\varepsilon > 0$  .

Il existe une constante  $C'$  ayant la propriété suivante. Pour toute métrique hyperbolique  $\gamma$  sur le pantalon  $P$ , telle que chaque composante du bord soit une géodésique de longueur  $> \varepsilon$ , et pour tout arc simple  $\beta$  de  $P^2$  allant du bord au bord, transversalement au feuilletage  $q(\gamma)$ , il existe un arc  $\beta'$  homotope à  $\beta$ , à extrémités fixées, tel que :

$$\text{long}_\gamma(\beta') \leq i(q(\gamma), \beta) + C' . "$$

L'idée de la démonstration du lemme local est la suivante (dans le cas où  $l_1, l_2, l_3$  satisfont aux inégalités triangulaires, et pas très différente dans les autres cas). En essayant de pousser  $\beta$  aussi loin que possible des deux triangles non feuilletés, on le remplace par un arc immergé (mais proche d'un arc simple) constitué par des arcs longeant le bord et les diagonales de rectangles feuilletés. Puisqu'on est au voisinage des arcs simples, il y a au plus trois telles diagonales qui elles-mêmes sont remplacées par des coutures et des arcs le long des feuilles. Ceci donne un  $\beta'$  dont la longueur se décompose en deux termes : la partie le long du bord, qui est majorée par  $i(q(\gamma), \beta)$  et les coutures dont les longueurs sont bornées supérieurement puisque  $l_1, l_2, l_3$  sont bornées inférieurement. Pour plus de détails, je renvoie à [3].

COROLLAIRE du LEMME FONDAMENTAL.- Soit  $x_n$  une suite de  $V(\mathcal{K}, \varepsilon)$  qui converge vers l'infini dans  $\mathcal{J}(M_g)$ . Alors  $\pi_{i_*}(x_n) \in \mathcal{P}(R_+^d)$  converge si et seulement si  $\pi_{i_*}q(x_n)$  converge et dans ce cas les deux suites ont la même limite.

On pourra remarquer que  $\mathcal{J}(M_g)$  peut être recouvert par deux cartes du type  $V(\mathcal{K}, \varepsilon)$ . [Ces deux cartes s'obtiennent en fabriquant deux décompositions en pantalons  $\mathcal{K}'$ ,  $\mathcal{K}''$  telles que  $\forall i(K'_j, K''_k) > 0$ . On utilise de nouveau la remarque qu'un pantalon hyperbolique à bords courts possède des coutures longues.] A partir du corollaire précédent et de la remarque qu'on vient de faire on déduit que de toute suite  $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{J}(M_g)$  tendant vers l'infini, on peut extraire une suite partielle qui, au niveau de  $\mathcal{P}(R_+^d)$  tend vers un point de  $\overline{\mathcal{A}}$ .

Le corollaire permet, aussi, de recoller  $V(\mathcal{K}, \varepsilon)$  et  $\pi q(V(\mathcal{K}, \varepsilon))$  de telle façon que la réunion soit  $R^{6g-7} \times [0, \infty)$ . En termes plus précis, quand elle est restreinte à l'ouvert  $V(\mathcal{K}, \varepsilon)$ , la projection  $\pi \circ q$  est comme

$$[0, \infty) \times R^{6g-7} \supset (0, \infty) \times R^{6g-7} \longrightarrow 0 \times R^{6g-7} .$$

Ainsi  $\overline{\mathcal{J}(M_g)}$  est une variété topologique à bord [car  $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{MF}(M_g)$  il existe  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{F} \in U(\mathcal{K})$ .] Mais d'après un résultat classique de topologie topologique dû à M. Brown, une variété topologique dont le bord est  $S^{n-1}$  et l'intérieur  $R^n$  est homéomorphe à  $D^n$ .

6. Remarques sur les différentielles quadratiques holomorphes

Sur  $M_g$  munie d'une structure complexe, on peut considérer des différentielles quadratiques holomorphes qui, en coordonnées locales, s'expriment sous la forme  $Q(z) = f(z) dz^2$ . Les parties réelles et imaginaires de  $\sqrt{Q(z)}$ , qui sont des 1-formes bien définies au signe près, définissent des feuilletages mesurés transverses, qu'on va appeler "horizontal" et "vertical". Exemple : si  $Q = dz^2$ , il s'agit des feuilletages induits par  $dy$  et  $dx$ . Du point de vue géométrique, une différentielle quadratique induit sur  $M_g$  une structure plate sauf aux points singuliers où la courbure est  $-\infty$ .

Hubbard et Masur [7] ont montré que tout élément de  $\mathcal{MF}(M_g)$  peut être réalisé de cette façon, disons comme feuilletage horizontal d'un certain  $Q$ . Peu de temps après, Kerckhoff [8] a montré comment ce résultat pouvait se déduire directement de la théorie de Thurston, par un procédé plus simple.

Dans cette optique de relations entre différentielles quadratiques et feuilletages mesurés  $R_+ \times \mathcal{A}$  correspond aux "formes de Strebel", dont la densité (dans l'ensemble des différentielles quadratiques) a été prouvée par Douady et Hubbard. Pour plus de détails sur ces formes de Strebel, on pourra consulter [12].

Maintenant, le théorème fondamental de Teichmüller [9], [10], dit essentiellement qu'une fois qu'on a choisi une structure complexe,  $\mathcal{T}(M_g)$  peut être paramétré par l'ensemble des différentielles quadratiques (de norme  $< 1$ ). Comme, d'après Hubbard-Masur (et Kerckhoff),  $\mathcal{PMF}(M_g)$  peut s'interpréter comme l'ensemble des rayons dans la boule unité des différentielles quadratiques, ceci (une fois qu'on a choisi un point de base dans  $\mathcal{T}(M_g)$ ) donne une autre manière de recoller  $\mathcal{T}(M_g)$  et  $\mathcal{PMF}(M_g)$  (de telle façon que le résultat soit  $D^{6g-6}$ ).

Contrairement à ce que l'on pourrait croire  $\text{Diff } M_g$  n'agit pas continûment sur cette compactification de l'espace de Teichmüller (qui n'est donc pas celle naturelle, de Thurston ; en fait elle dépend du choix du point de base). Ce fait, mis en évidence par Kerckhoff [8] est lié à l'existence de feuilletages mesurés non uniquement ergodiques. Entre parenthèses, je crois que Thurston a élaboré la théorie exposée ici avant de connaître l'existence des différentielles quadratiques et la théorie "classique" de Teichmüller. Par contre, quand il est passé aux structures hyperboliques en dimension 3 (dont on a à peine parlé ici), il a utilisé avec une grande virtuosité cette "théorie de Teichmüller" (en particulier, la solution de l'équation de Beltrami mesurable, due à Ahlfors et Bers).

Toujours dans le cadre des différentielles quadratiques et méthodes extrêmes, L. Bers a redémontré, par des méthodes analytiques, la partie "existence" du théorème de classification des difféomorphismes de Thurston [11]. (Voir, aussi, la seconde partie du Séminaire d'Orsay [3]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. THURSTON - On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, à paraître.
- [2] W. THURSTON - The geometry and topology of 3-manifolds, à paraître.
- [3] Séminaire d'Orsay sur les Travaux de Thurston [édité par A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poénaru], à paraître. Une seconde partie du Séminaire, dédiée à la théorie de Teichmüller sera éditée par W. Abikoff.
- [4] D. EPSTEIN - Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Mat., 115 (1966), p. 83-107.
- [5] Yu. SINAÏ - Markov partitions and C-diffeomorphisms, Funck. Anal., vol. 2 (1968), p. 64-81.
- [6] G. D. MOSTOW - Strong rigidity in locally symmetric spaces, Ann. of Math. Studies, n° 78.
- [7] J. HUBBARD and H. MASUR - Quadratic differentials and foliations, Acta Mat., à paraître.
- [8] S. KERCKHOFF - The asymptotic geometry of Teichmüller space, Thèse, à paraître.
- [9] O. TEICHMÜLLER - Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh. Preuss Akad. Wiss., 22 (1939).
- [10] O. TEICHMÜLLER - Bestimmung der extremalen quasikonformen abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannischen Flächen, Abh. Preuss Akad. Wiss., (1943).
- [11] L. BERS - An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem of Thurston, à paraître.
- [12] Séminaire de l'E.N.S. [Douady-Verdier] - Sur les formes de Strebel, 1975/76, Presses de l'E.N.S., Paris, à paraître.