YVES MEYER

Les nouvelles intégrales singulières de Calderón

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 528, p. 57-65

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__57_0>

LES NOUVELLES INTÉGRALES SINGULIÈRES DE CALDERÓN

par Yves MEYER

A. Calderón a découvert en 1977 toute une série de noyaux conduisant, par un procédé que nous allons décrire, à des opérateurs bornés sur L^2 et sur les divers espaces L^p , $1 < p < +\infty$.

Rappelons d'abord la définition d'une intégrale singulière de Calderón-Zygmund.

Nous désignerons par E un espace euclidien de dimension n et par $|x|$ la norme (ou longueur) du vecteur $x \in E$. Enfin Ω est le produit $E \times E$ privé de la diagonale : $(x,y) \in \Omega$ signifie donc $y \neq x$.

DÉFINITION 1.- Une fonction continue $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée un noyau de Calderón-Zygmund si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

(1) il existe une constante $C > 0$ telle que $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$;

(2) les gradients $\nabla_x K(x,y)$ et $\nabla_y K(x,y)$, pris au sens des distributions, sont, en fait, des fonctions localement bornées et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in \Omega$, on ait $|\nabla_x K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ et $|\nabla_y K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$;

(3) pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$, $g(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy$ existe presque partout ;

(4) en posant $g = T(f)$, on a $\|T\| \leq C$; c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$ on ait $\|g\|_2 \leq C\|f\|_2$.

On appelle norme du noyau de Calderón-Zygmund K et l'on note $\|K\|$ la borne inférieure des constantes C que l'on peut faire figurer dans (1), (2) et (4).

Remarques.- Dans les premiers exemples introduits par Giraud, Calderón et Zygmund, on supposait que $K(x,y) = L(x,x-y)$ où $L(x,z)$ possède les propriétés suivantes :

(5) $L(x, \lambda z) = \lambda^{-n} L(x,z)$ pour $z \neq 0$ et $\lambda > 0$;

(6) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que $|\partial_z^\alpha L(x,z)| \leq C_\alpha$ pour tout $x \in E$ et tout $z \in E$ de longueur 1 ;

(7) $\int_{|z|=1} L(x,z)\,d\sigma(z) = 0$; $d\sigma$ désignant la mesure invariante sur la sphère unité.

Alors (1), (2) et (3) sont presque évidentes. Tandis que (4) s'obtient par un procédé dû à G. Giraud [12] : la décomposition de $z \longrightarrow L(x,z)$ en harmoniques sphériques sur $|z| = 1$ (x étant fixé).

Pour traiter le cas des opérateurs pseudo-différentiels classiques, il faut modifier un peu la définition 1.

DÉFINITION 2.- Un opérateur borné $T : L^2(E) \longrightarrow L^2(E)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund s'il existe une fonction $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) et telle que

(8) $$Tf(x) = \int K(x,y)\ f(y)\ dy$$

pour toute fonction $f \in C_0^\infty(E)$ et tout x n'appartenant pas au support de f .

On appelle $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$ et on définit l'opérateur $\sigma(x,D)$ par $\sigma(x,D)\ f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\ \sigma(x,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi$. Alors $\sigma(x,D)$ est un opérateur de Calderón-Zygmund [8].

Les opérateurs de Calderón-Zygmund généralisent donc les intégrales singulières v. p. $\int K(x,y)\ f(y)\ dy$ de la définition 1. Ces opérateurs possèdent les propriétés remarquables suivantes :

(9) T envoie L^1 dans L^1-faible. Cela signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$, la mesure de l'ensemble des x où $|Tf(x)| > \lambda$ ne dépasse pas $\frac{C}{\lambda}\|f\|_1$;

(10) T envoie continûment L^p dans lui-même pour $1 < p < +\infty$;

(11) T envoie continûment L^∞ dans BMO (défini ci-dessous).

DÉFINITION 3.- Une fonction (localement intégrable) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à BMO s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ on puisse trouver une constante c_Q pour laquelle

(12) $$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\ dx \le C .$$

Des exemples sont $\log|x|$ et toutes les fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha > 1$, $|\log|x||^\alpha \notin$ BMO .

1. Les théorèmes de Calderón

THÉORÈME 1.- Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $k \geq 1$ et toute fonction $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant $|A(x) - A(y)| \leq |x - y|$ $(x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$, le noyau $\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ soit un noyau de Calderón-Zygmund définissant un opérateur T_k, borné sur $L^2(\mathbf{R})$ et dont la norme ne dépasse pas C^k.

THÉORÈME 2.- Il existe un nombre $\delta > 0$ et une constante $C_1 > 0$ tels que si $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifie $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \delta |x - y|$ le noyau $\frac{1}{x - y + \varphi(x) - \varphi(y)}$ soit un noyau de Calderón-Zygmund de norme $\leq C_1$.

THÉORÈME 3.- Il existe un $R > 1$ tel que, pour toute fonction F holomorphe dans $|z| < R$, le noyau $\frac{1}{x-y} F\left(\frac{A(x) - A(y)}{x - y}\right)$ soit un noyau de Calderón-Zygmund lorsque A vérifie les hypothèses du théorème 1.

Il est tentant de développer $\frac{1}{x - y + \varphi(x) - \varphi(y)}$ en

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^k}{(x-y)^{k+1}} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \delta^k \frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}} .$$

Alors le théorème 2 résulte du théorème 1.

Cette approche s'est avérée impraticable ([7] et [8]). La méthode de Calderón est tout à fait différente. Il démontre d'abord le théorème 2 en prouvant un résultat très remarquable sur la distorsion de la représentation conforme pour les domaines de classe C^1 (théorème 8 ci-dessous).

Calderón en déduit le théorème 1 puis le théorème 3. Avant de décrire les grandes lignes de la démonstration des théorèmes de Calderón, nous allons donner deux applications.

THÉORÈME 4.- Soit Ω un ouvert borné et simplement connexe du plan complexe. Supposons que $\Gamma = \partial\Omega$ soit une courbe fermée simple de classe C^1 sans point stationnaire. Pour toute fonction $f \in L^2(\Gamma)$, définissons $F : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ par

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{z - \zeta} .$$

Alors $F(\zeta)$ a, pour presque tout $z_0 \in \Gamma$, une limite non tangentielle en z_0 quand $\zeta \longrightarrow z_0$. Si on note par $g(z_0)$ cette limite, on a $\|g\|_2 \leq C \|f\|_2$.

En d'autres termes le noyau de Cauchy réalise une projection de L^2 sur le sous-espace de L^2 formé par les valeurs au bord des fonctions analytiques.

La preuve du théorème 4 repose sur l'identité

$$\lim_{\zeta \to z_o} F(\zeta) = \frac{1}{2} f(z_o) + \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_o} . \tag{13}$$

Par un choix correct des coordonnées locales, la dernière intégrale singulière est exactement celle du théorème 2.

THÉORÈME 5 (Conjecture de Denjoy).- <u>Pour toute courbe rectifiable</u> Γ <u>du plan complexe et toute partie compacte</u> K <u>de</u> Γ , <u>la capacité analytique de</u> K <u>est nulle si et seulement si la longueur de</u> K <u>est nulle</u>.

Le théorème 5 découle du théorème 4. Le lecteur peut se reporter à D. Marshall ou à V. Havin [14] et [13].

Avant d'aller plus loin, quelques remarques permettront peut-être de mieux apprécier la force des résultats obtenus.

Si dans les théorèmes 1, 2 ou 3, $A \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ ou $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, les opérateurs correspondants sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques. En revanche, il n'en est rien si l'on suppose seulement que $|A(x) - A(y)| \leq |x - y|$; et ceci, même si $A \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus les méthodes que l'on emploie pour étudier l'action des O.ψ.d. sur L^2 ne donnent aucun résultat ici.

Il est d'ailleurs facile de voir que l'hypothèse $\|A'\|_\infty < +\infty$ est nécessaire pour que le noyau $\dfrac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}}$ définisse un opérateur borné sur L^2 .

Les théorèmes 1, 2 et 3 sont donc les meilleurs possibles en ce qui concerne la régularité des fonctions A et φ .

Il est raisonnable de penser que, dans le théorème 2 tout $\delta \in [0,1[$ convienne mais on ne le sait pas encore.

Vérifions que le théorème 1 et le théorème 3 découlent simplement du théorème 2. Il suffit pour cela de poser $\varphi(x) = \zeta\, A(x)$ avec $|\zeta| = \delta$ et d'écrire

$$\frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \delta} (x - y + \zeta(A(x) - A(y)))^{-1} \zeta^{-k-1}\, d\zeta .$$

On choisit C assez grand pour que $C^k > C_1 \delta^{-k}$ pour tout $k \geq 0$.

Enfin le théorème 3 est immédiat en développant F en série entière.

2. Démonstration du théorème 2 (première partie)

Pour obtenir le théorème 2, il suffit de montrer l'existence de deux constantes C_1 et δ telles que, pour toute fonction $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\varphi'\|_\infty \leq \delta$, la norme du noyau de Calderón-Zygmund $[x-y+\varphi(x)-\varphi(y)]^{-1}$ ne dépasse pas C_1.

Naturellement, on sait alors a priori que l'opérateur correspondant est un o.ψ.d. classique, borné sur L^2.

Calderón considère la famille à un paramètre des noyaux

$$K_t(x,y) = \frac{1}{x-y+t[\varphi(x)-\varphi(y)]} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Le noyau K_o est la transformation de Hilbert et $\|K_o\| = \pi$. Pour majorer $\|K_1\|$, Calderón étudie

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t = L_t = -\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{[x-y+t(\varphi(x)-\varphi(y))]^2}$$

et démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.- *Il existe une constante* C_2 *telle que, pour toute fonction* $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ *vérifiant* $\|\varphi'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, *on ait* $\|\frac{\partial}{\partial t} K_t\| \leq C_2 \|K_t\|^2$ *pour* $0 \leq t \leq 1$.

On en déduit que $\frac{\partial}{\partial t}\|K_t\| \leq C_2\|K_t\|^2$ et $\|K(t)\| \leq \frac{\pi}{1-C_2\pi t}$ à condition que $t < \frac{1}{\pi C_2}$. On choisit donc $\delta < \frac{1}{\pi C_2}$; le fait qu'on ne connaisse pas C_2 implique que l'on ne sache rien sur δ.

Quitte à poser $\psi = t\varphi$, on a $\|\psi'\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ et l'on peut oublier le paramètre t. On est ramené à $t = 1$ et l'on appelle Γ la courbe image de $\mathbb{R}$ par $x \longrightarrow x + \varphi(x)$.

Si φ est à valeur réelle, il n'y a rien à démontrer car le changement de variable $u = x + \varphi(x)$ résout le problème.

On désigne par V le demi-espace situé au-dessus de Γ et par U celui situé en-dessous.

Par un calcul très ingénieux, Calderón ramène la proposition 1 au résultat suivant.

PROPOSITION 2.- *Si* $F(z)$, $G(z)$ *et* $H(z)$ *sont trois fonctions holomorphes dans* U, *nulles à l'infini et telles que*

(14) $\qquad F'(z) = G(z)\, H'(z)$

et qui se prolongent par continuité à Γ , on a

(15) $$\|F\|_1 \leq C\|G\|_2 \, \|H\|_2 \, .$$

L'intérêt de l'équation fonctionnelle (14) est d'être invariante par représentation conforme. On a posé $\|F\|_1 = \int_\Gamma |F(z)| \, d|z|$ etc.

On a de même, si $1 \leq p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $1 < r < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,

(16) $$\|F\|_r \leq C\|G\|_p \, \|H\|_q \, .$$

D'ailleurs l'une des inégalités (16) suffit à établir le théorème de Calderón.

Arrivé à cette étape, on utilise une représentation conforme de U sur le demi-plan supérieur.

3. Démonstration du théorème 2 (seconde partie)

DÉFINITION 3.- La classe A_p , $1 < p < +\infty$, de Muckenhoupt est l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty]$ qui sont mesurables, localement intégrables et telles qu'il existe une constante C pour laquelle on ait, pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) \, dx\right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-1/p-1} \, dx\right)^{p-1} \leq C \, .$$

Si $\omega \in A_p$ alors $\log \omega \in BMO$. Réciproquement, si $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à BMO , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\omega(x) = \exp(\varepsilon \, b(x)) \in A_2$ ([6]).

Par exemple, $|x|^{-\alpha} \in A_p$ si $0 \leq \alpha < n$ tandis que $|x|^{\alpha} \in A_p$ équivaut à $0 \leq \alpha < n(p-1)$.

Un exemple moins trivial est donné, en dimension 1 , par le produit de Riesz $\omega(x) = \prod_{k\geq 0} (1 + r_k \cos 3^k x)$ dans lequel $0 \leq r_k < 1$ et $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$. Alors $\omega \in A_p$ pour tout $p \in \,]1,+\infty[$. Si $\sum_0^\infty r_k^2 = +\infty$, le produit de Riesz ne définit plus une fonction mais une mesure singulière [16].

Le résultat fondamental sur ces classes est le théorème suivant [6].

THÉORÈME 6.- Soit $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction localement intégrable et soit $L^p(\omega \, dx)$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, \omega \, dx\right)^{1/p} < +\infty$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes quand $1 < p < +\infty$

(17) $\omega \in A_p$;

(18) <u>tous les opérateurs de Calderón-Zygmund sont bornés sur</u> $L^p(\omega\, dx)$.

Les liens entre ces classes, la théorie du potentiel et la représentation conforme ont été élucidés par Dahlberg et Calderón [9] et [4].

THÉORÈME 7.- <u>Soit</u> $D \subset \mathbb{R}^n$ <u>un ouvert borné et connexe dont la frontière est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne</u>. <u>Alors la mesure harmonique</u> $dP(x_o, y)$ <u>est pour tout</u> $x_o \in D$ <u>absolument continue par rapport à la mesure de surface</u> $d\sigma$ <u>sur</u> ∂D <u>et plus précisément</u> $dP(x_o, y) = \omega(y)\, d\sigma(y)$ <u>où</u> $\omega \in A_p$ <u>pour</u> p <u>assez grand</u>.

On a, en fait, $A_{p_1} \subset A_{p_2}$ si $p_1 < p_2$.

THÉORÈME 8.- <u>Soient</u> $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>une fonction lipschitzienne</u> $(|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq C|x_2 - x_1|)$ <u>et</u> $D \subset \mathbb{R}^2$ <u>l'ouvert défini par</u> $y > \varphi(x)$. <u>On appelle</u> $\theta(z)$ <u>la représentation conforme du demi-plan supérieur sur</u> D <u>normalisée par</u> $\theta(\infty) = \infty$. <u>Alors</u> $\omega(x) = |\theta'(x)| \in A_2$.

En d'autres termes, même si φ est de classe C^1 , c'est-à-dire si D est un ouvert de classe C^1 , θ ne se prolonge pas au bord en un difféomorphisme C^1 ; la distorsion au bord est mesurée par $\omega(x)$.

Pour terminer la démonstration du théorème de Calderón on transporte par θ toute la situation sur le demi-plan supérieur noté Π . On doit alors démontrer que si $\omega \in A_2$ et si $F_1(z)$, $G_1(z)$ et $H_1(z)$ sont holomorphes dans Π et vérifient $F_1'(z) = G_1(z)H_1'(z)$, on a

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(x)|\,\omega(x)\, dx \leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(x)|^2\, \omega(x)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(x)|^2\, \omega(x)\right)^{1/2}$$

où C ne dépend que de ω .

Là encore, on peut se contenter dans (19) d'autres exposants p , q et r .

Dans ce dernier cas (19) résulte facilement du théorème 6 car $F_1(x)$ se calcule à l'aide des deux fonctions $G_1(x)$ et $H_1(x)$ par des opérateurs de Calderón-Zygmund.

Cette remarque termine la démonstration du théorème de Calderón.

4. Applications à la théorie du potentiel

Soit Ω un ouvert borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est localement le graphe d'une fonction de classe C^1.

Alors pour tout $1 < p < +\infty$, il existe une constante C_p ayant la propriété suivante :

Pour toute fonction harmonique $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se prolongeant à $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ en une fonction de classe C^1 on a

$$(20) \qquad \left(\int_{\partial\Omega} |\text{Grad } u|^p \, d\sigma \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^p d\sigma \right)^{1/p} .$$

On a désigné par $\frac{\partial u}{\partial n}$ la dérivée normale de u. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $h > 0$, on désigne par $\Gamma_{\alpha,h}(y)$, $y \in \partial\Omega$, le cône défini par les deux conditions $|x - y| \leq h$ et $(x - y).n > \alpha|x - y|$; n est la normale en y à $\partial\Omega$ orientée vers l'intérieur.

Si h est assez petit, $\Gamma_{\alpha,h}(y)$ est, pour tout $y \in \partial\Omega$, contenu dans Ω. On pose $u^*(y) = \sup\limits_{x \in \Gamma_{\alpha,h}(y)} |u(x)|$; la fonction u^* s'appelle la fonction maximale non tangentielle de u.

Alors il existe une constante $C'_p(\alpha,h)$ telle que pour toute fonction continue $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, harmonique dans Ω, on ait

$$(21) \qquad \left(\int_{\partial\Omega} (u^*)^p \, d\sigma \right)^{1/p} \leq C'_p(\alpha,h) \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p \, d\sigma \right)^{1/p} .$$

Si Ω était un ouvert à bord C^∞, on passerait de $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ à $\text{Grad } u\big|_{\partial\Omega}$, quand u est harmonique dans Ω, par un opérateur pseudo-différentiel T classique d'ordre 0. L'inégalité (20) ne serait autre que la continuité sur L^p de tels opérateurs.

Dans le cas des ouverts à frontière C^1 le passage de $\frac{\partial u}{\partial n}$ à $\text{Grad } u$ s'obtient par des intégrales singulières du type de celles du théorème 3 ; les opérateurs correspondants ne sont plus des o.ψ.d.

L'inégalité (20) a été obtenue par Fabes, Jodeit et Rivière ; (21) a été trouvée de façon indépendante par ces auteurs et Dahlberg.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. CALDERÓN - Commutators of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 53 (1965), p. 1092-1099.

[2] A. P. CALDERÓN - Algebras of singular integral operators, Proc. Symp. Pure Math., 10 (1966), p. 18-55.

[3] A. P. CALDERÓN - Singular integrals, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), p. 426-465.

[4] A. P. CALDERÓN - Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 74 (1977), p. 1324-1327.

[5] A. P. CALDERÓN - Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, ICM 1978, Helsinki.

[6] R. COIFMAN and F. FEFFERMAN - Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 51 (1974), p. 241-250.

[7] R. COIFMAN et Y. MEYER - Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 28 (fasc. 3)(1978).

[8] R. COIFMAN et Y. MEYER - Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque n° 57, SMF, 11 rue P. et M. Curie, Paris (5e).

[9] B. E. J. DAHLBERG - Estimates of harmonic measure, Arch. Rat. Mech. Anal., 65(1977), p. 275-288.

[10] B. E. J. DAHLBERG - Harmonic functions in Lipschitz domains, Willamstown (1978).

[11] E. FABES, M. JODEIT and N. RIVIÈRE - Preprint.

[12] G. GIRAUD - Equations à intégrales principales, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 51(1934), p. 251-372.

[13] V. P. HAVIN - Boundary properties of integrals of Cauchy type and of conjugate harmonic functions in regions with rectifiable boundary, Mat. Sb. (N.S.) 68 (110) (1965), p. 499-517.

[14] D. E. MARSHALL - Painlevé null sets, Inst. Mittag-Leffler, Report n° 9 (1977).

[15] A. ZYGMUND - Intégrales singulières, Lecture Notes in Math. n° 204, Springer-Verlag, 1971.

[16] A. ZYGMUND - Trigonometric series, Cambridge (1959).