GILLES PISIER

De nouveaux espaces de Banach sans la propriété d'approximation

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 542, p. 312-327

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__312_0>

Séminaire BOURBAKI
31e année, 1978/79, n° 542

DE NOUVEAUX ESPACES DE BANACH SANS LA PROPRIÉTÉ D'APPROXIMATION

[d'après A. SZANKOWSKI]

par Gilles PISIER

§ 1. Introduction

Depuis qu'Enflo ([4], cf. aussi [2]) a construit un espace de Banach sans la propriété d'approximation, de nombreux résultats ont été obtenus dans la même direction (la plupart, par A. Szankowski). Dans le § 2 nous passons en revue ces résultats.

En particulier, on connaît depuis peu ([20]) un espace de Banach que l'on peut qualifier de "naturel" et qui n'a pas la propriété d'approximation : il s'agit de l'espace des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Dans le § 3, nous tentons de donner un aperçu de la construction (plutôt longue) qui a permis à A. Szankowski d'établir ce très beau résultat.

§ 2. Revue des résultats récents

Notations

Etant donnés deux espaces de Banach X et Y, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs bornés de X dans Y et $X\hat{\otimes}_\pi Y$ (resp. $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$) le produit tensoriel projectif (resp. injectif) de X et Y, noté parfois simplement $X\hat{\otimes}Y$ (resp. $X\check{\otimes}Y$).

2.1 Commençons par quelques rappels :

Définition.- On dit qu'un espace de Banach X a la propriété d'approximation (resp. la λ-propriété d'approximation) si, pour tout compact $K\subset X$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un opérateur $T : X\to X$ de rang fini tel que $\forall\, x\in K \quad \|Tx-x\|<\varepsilon$ (resp. et de plus $\|T\|\le\lambda$). On abrège "propriété d'approximation" en PA. En d'autres termes, la PA signifie que l'identité est approximable uniformément sur tout compact par des opérateurs de rang fini.
On dit qu'un espace possède la propriété d'approximation bornée (en abrégé

PAB) s'il a la λ-PA pour au moins un λ. On dit qu'il possède la propriété d'approximation métrique (en abrégé PAM) s'il a la 1-PA.

Dans [7], on trouve le critère suivant :

<u>Critère de Grothendieck</u> .-- Un espace X n'a pas la PA si et seulement si il existe

$$\beta \in X' \hat{\otimes}_\pi X \quad \text{de la forme} \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes x_n$$

avec $x'_n \in X'$, $x_n \in X$ et $\Sigma \|x'_n\| \, \|x_n\| < \infty$, tels que

$$\sum_1^\infty \langle x'_n, x_n\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty x'_n(x)\, x_n = 0 \quad \forall\, x \in X \ .$$

Soit $\mathcal{L}_c(X,X)$ l'espace $\mathcal{L}(X,X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Grothendieck (cf. [7]) a montré que toute forme linéaire continue ξ sur $\mathcal{L}_c(X,X)$ est de la forme :

$$\forall\, T \in \mathcal{L}(X,X) \qquad \langle \xi, T\rangle = \Sigma \langle x'_n, Tx_n\rangle$$

avec $x'_n \in X'$, $x_n \in X$ et $\Sigma \|x'_n\| \, \|x_n\| < \infty$.

Le critère précédent résulte alors du théorème de Hahn-Banach : X n'a pas la PA ssi il existe $\xi \in \mathcal{L}_c(X,X)'$ qui s'annule sur tout opérateur de rang fini et vaut 1 sur l'identité de X.

2.2 Il résulte de ce critère (cf. [7]) que si X' possède la PA (resp. la PAB, la PAM), alors il en est de même pour X. Bien entendu, la réciproque est fausse (par exemple $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2) = (\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2)'$ et $\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2$ a la PAM ; il y a en fait des exemples similaires déduits de celui d'Enflo par des arguments généraux).

Grothendieck a aussi montré que pour les espaces réflexifs : PA $\Rightarrow$ PAM. On ne peut guère améliorer ces résultats car, en utilisant l'existence de l'exemple d'Enflo, Figiel et Johnson ont montré (cf. [5]) qu'en général : PA $\not\Rightarrow$ PAB et PAB $\not\Rightarrow$ PAM.

Sur toutes ces questions, voir [14].

2.3 Bien évidemment, tout espace de Banach de dimension finie a la PAM ! Précisément, pour permettre l'utilisation de techniques fini-dimensionnelles (dites aussi "locales" dans la littérature), Pełczyński et Rosenthal [16] ont introduit la notion suivante :

<u>Définition</u> .-- On dit que X a la propriété d'approximation uniforme (en abrégé PAU) s'il existe $\lambda > 0$ vérifiant : $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\exists\, N(k) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout sous-

espace $E \subset X$ de dimension k il existe un opérateur $T : X \to X$ avec : $Tx = x \ \forall\ x \in E$, $\dim T(X) \leq N(k)$ et $\|T\| \leq \lambda$.

Cette propriété est strictement plus forte que la PAB précisément à cause de l'existence de la "fonction d'uniformité" : $k \to N(k)$. Comme pour la PA, si X' a la PAU alors X l'a aussi (voir [13]) ; mais contrairement à ce que nous avons vu pour la PA : si un espace X possède la PAU alors X', X", X"' etc. ont tous la PAU et donc a fortiori la PAB (cf. [9]). Plus généralement, cette notion passe aux ultrapuissances :

<u>Définition</u> .- Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur un ensemble d'indice I. Soit ℓ l'espace des familles bornées $(x_i)_{i\in I}$ dans X muni de la semi-norme : $\|(x_i)_{i\in I}\| = \lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_i\|$. Soit N le sous-espace de ℓ formé des $(x_i)_{i\in I}$ tels que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$.

On appelle ultrapuissance de X relative à $\mathcal{U}$ et on note $X^I/\mathcal{U}$ le quotient ℓ/N muni de la norme quotient.

On démontre que c'est un espace de Banach.

Le langage des ultrapuissances est très commode pour "localiser" des notions infini-dimensionnelles (cf. e.g. [17]). Dans le cas présent, on peut énoncer : <u>un espace</u> X <u>possède la PAU si et seulement si toute ultrapuissance de</u> X <u>possède la PAB</u>, (cf. [13], [9]).

On sait que les espaces L^p (cf. [16]) et les espaces d'Orlicz (cf. [13]) ont la PAU.

2.4 L'exemple original d'Enflo ([4]) était un sous-espace fermé de c_o ; il a été simplifié d'une part par Davie [3], d'autre part par Figiel, Kwapien et Pełczynski (cf. [6], [12]). En se basant sur la même idée qu'Enflo, ils ont pu exhiber, pour chaque $p > 2$, un sous-espace de ℓ^p sans la PA.

Il était alors tentant de conjecturer que tout espace de Banach non isomorphe à un Hilbert possède un sous-espace sans la PA. Bien entendu, il fallait d'abord régler le cas de ℓ^p pour $p < 2$ qui nécessitait une idée nouvelle.

C'est donc A. Szankowski [19] qui construisit le premier sous-espace de ℓ^p avec $p < 2$ sans la PA. La construction de Szankowski étant, comme les précédentes, de nature "locale" (i.e. fini-dimensionnelle), elle établit un résultat plus fin. Pour l'énoncer, rappelons que si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes, la "distance" d(E,F) est définie par : $d(E,F) = \inf \|T\|\,\|T^{-1}\|$ où l'infimum porte sur tous les isomorphismes T de E sur F ; (noter qu'en fait c'est Log d qui se comporte comme une distance). Rappelons aussi (cf. [10]) que tout espace de Banach E de dimension n vérifie $d(E,\ell^2_n) \leq \sqrt{n}$.

La méthode de Szankowski, combinée à des résultats connus, conduit à l'énoncé suivant :

THEOREME [19] .- Soit X un espace de Banach dont tous les sous-espaces ont la PA. Alors, il existe une fonction $n \to f(n) \geq 0$ croissant lentement avec n [i.e. $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-\delta} f(n) = 0 \ \forall\ \delta > 0$] avec la propriété suivante : tout sous-espace $E \subset X$ de dimension finie, disons n, vérifie

$$d(E, \ell^2_n) \leq f(n) \quad .$$

Comme $d(\ell^p_n, \ell^2_n) = n^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|}$ si $1 \leq p \leq \infty$, on voit que $X = \ell^p$ ne vérifie pas la conclusion du théorème précédent si $p \neq 2$.

Ce résultat semblait confirmer la conjecture ci-dessus ; c'est donc à la surprise générale que W.B. Johnson a exhibé un contre-exemple relativement simple à cette conjecture (cf. [15] No 1.g.7).

2.5 Avant les résultats précédents, Szankowski avait construit le premier espace de Banach réticulé (ou : treillis) sans la PA.
C'était déjà un progrès considérable vers des espaces "naturels" sans la PA, en effet, d'après [18] : si $1 \leq r < p < \infty$, il existe un sous-treillis de $\ell^p(L^r([0,1]))$ -muni de sa structure d'ordre naturelle- qui n'a pas la PA.

Donnons seulement un corollaire remarquable : il existe un espace de Banach uniformément convexe à base symétrique qui n'a pas la PAU.

2.6 Mais bien sûr, l'aboutissement de tous ces résultats est la démonstration de Szankowski que $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ n'a pas la propriété d'approximation, cf. [20]. Ce résultat est vraiment remarquable, et cela pour plusieurs raisons :

i) D'abord, c'est le premier espace -connu sans aucun doute de Banach et a fortiori de Grothendieck- dont on sache montrer qu'il n'a pas la PA. Dans tous les exemples précédents, la plus grande partie du travail consistait précisément à construire -ad hoc- l'espace lui-même.

ii) D'autre part, c'est le premier exemple de C^*-algèbre sans la PA. Or on sait seulement depuis peu que $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ ne vérifie pas l'analogue C^*-algébrique de la PA : $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ n'est pas "nucléaire" [23] (i.e. l'identité ne peut pas être approchée uniformément sur tout compact par des opérateurs complètement positifs de norme ≤ 1, cf. [1] [11]). Bien entendu, ce résultat est un corollaire de celui de Szankowski puisque la nucléarité implique la PAM.
Ajoutons que pendant longtemps il était conjecturé (conjecture attribuée à Sakai) que, si G est le groupe libre à 2 générateurs, la C^*-algèbre $C^*_\lambda(G)$

engendrée par la représentation régulière gauche de G n'a pas la PA.
On sait maintenant qu'il n'en est rien : U. Haagerup [8] a démontré que, si G est le groupe libre à N générateurs ($N \geq 2$), alors $C_\lambda^*(G)$ possède la PAM. Comme une telle C^*-algèbre n'est pas nucléaire (cf. [22]) cela montre que la PA banachique est strictement plus faible que la nucléarité qui est son analogue pour les C^*-algèbres (cf. [24]).

iii) Enfin, la méthode de Szankowski semble assez générale ; on pourra sans doute, de l'avis de son auteur, la généraliser à des espaces $\mathcal{L}(X,X)$ pour des espaces X autres que ℓ^2, par exemple pour ℓ^p avec $1 < p < \infty$.
Signalons une remarque triviale : si X est un espace de Banach admettant ℓ^2 comme sous-espace complémenté (i.e. X est isomorphe à $\ell^2 \oplus Y$ pour un certain Y) alors $\mathcal{L}(X,X)$ n'a pas la PA, puisque $\mathcal{L}(X,X)$ admet $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$ comme sous-espace complémenté. Cette remarque s'applique en particulier à $X = L^p$ pour $1 < p < \infty$. D'autre part, par une variante de sa construction, Szankowski sait démontrer que si $1 \leq p \neq 2 \leq \infty$, l'espace de Schatten $C_p(\ell^2)$ n'a pas la PAU ; il s'agit de l'espace des opérateurs compacts $T : \ell^2 \to \ell^2$ tels que $\mathrm{tr}(T^*T)^{p/2} < \infty$ muni de la norme

$$\|T\|_{C_p} = \{\mathrm{tr}(T^*T)^{p/2}\}^{1/2}$$

(pour $p = \infty$, c'est simplement l'espace des opérateurs compacts sur ℓ^2).

Pour finir, mentionnons un problème voisin et qui, lui, est toujours ouvert : l'espace H^∞ (i.e. l'espace des fonctions analytiques bornées sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$) a-t-il la propriété d'approximation ?

§ 3. Un résumé de la construction de Szankowski

La nature combinatoire de la construction de Szankowski (pour montrer que $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$ n'a pas la propriété d'approximation) la rend longue et délicate. Nous donnons ci-dessous un résumé de [20] qui peut tout au plus servir d'aide-mémoire au lecteur de [20], en attendant [21].

Pour commencer, donnons un principe général pour exhiber des espaces sans la propriété d'approximation ; [18] et [19] sont basés sur le même principe. C'est en fait un plan de travail, toute la difficulté consiste à réaliser effectivement ce programme pour $X = \mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$.

PROPOSITION 3.1 .- Soit X un espace de Banach.

On suppose donnés :

i) des ensembles finis $\mathcal{J}_n$, $n = 1,2,\ldots$,

ii) des éléments $Z_a \in X$, $\varphi_a \in X'$ pour $a \in \mathcal{J}_n$, $n = 1,2,\ldots$ vérifiant :

(3.1) $$\sum_{a\in\mathcal{J}_n} \varphi_a(Z_a) = 1 \quad .$$

(3.2) $$\max_{a\in\mathcal{J}_n} \|Z_a\| \cdot \sup_{\substack{z\in X \\ \|z\|\le 1}} \max_{a\in\mathcal{J}_n} |\varphi_a(z)| \longrightarrow 0 \qquad \text{si } n\to\infty \quad ,$$

<u>et</u> iii) <u>une application surjective</u> $\varkappa_n : \mathcal{J}_n \to \mathcal{J}_{n-1}$ <u>telle que</u> $\forall\, n = 2,3,\dots$ $\forall\, a \in \mathcal{J}_n$:

(3.3) $$\varphi_a = \sum_{b:\varkappa_n b = a} \varphi_b \quad .$$

<u>On pose</u> $\mathring{Z}_b = Z_{\varkappa_n b} - Z_b \quad \forall\, b \in \mathcal{J}_n$, $n = 2,3,\dots$.

<u>Alors, pour que</u> X <u>n'ait pas la propriété d'approximation</u>, <u>il suffit qu'il existe pour chaque</u> n <u>une partition</u> Δ_n <u>de</u> $\mathcal{J}_n$ <u>telle que</u> :

(3.4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}(\Delta_n) \max_{B\in\Delta_n} \Big\| \sum_{a\in B} \varphi_a \otimes \mathring{Z}_a \Big\|_{X'\hat{\otimes}_\pi X} < \infty \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Posons $\beta_n = \sum_{a\in\mathcal{J}_n} \varphi_a \otimes Z_a$. (3.4), (3.2) et (3.1) impliquent respectivement :

(3.5) $$\sum \|\beta_n - \beta_{n-1}\|_{X'\hat{\otimes}_\pi X} < \infty$$

(3.6) $$\|\beta_n\|_{X'\hat{\otimes}_\varepsilon X} \longrightarrow 0 \qquad \text{si } n\to\infty \quad .$$

(3.7) $$\operatorname{tr} \beta_n = 1 \qquad \forall\, n = 1,2,\dots \quad .$$

Donc si l'on pose : $\forall\, T \in \mathcal{L}(X,X)$

$$\beta(T) = \lim_{n\to\infty} \langle \beta_n, T\rangle \quad ,$$

(3.5) montre que β définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}_c(X,X)$, (3.6) montre que $\beta(T) = 0$ pour tout T de rang fini et (3.7) assure que $\beta(\mathrm{Id}_X) = 1$. D'après le critère de Grothendieck, on conclut que X n'a pas la propriété d'approximation.

<u>Remarque</u> 3.2 .- Pour rendre la condition (3.4) plus maniable, on utilise l'observation élémentaire suivante : soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité ; on suppose qu'il existe une famille orthonormale $(f_a)_{a\in B}$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ telle que : $\forall\, \omega \in \Omega$

$$\|\sum_{a\in B} f_a(\omega)\varphi_a\| = \|\sum_{a\in B}\varphi_a\| \quad \text{et} \quad \|\sum_{a\in B}\overline{f_a(\omega)}\,\mathring{Z}_a\| = \|\sum_{a\in B}\mathring{Z}_a\| \;;$$

alors on a :

$$(3.8) \qquad \|\sum_{a\in B}\varphi_a\otimes\mathring{Z}_a\|_\wedge \le \|\sum_{a\in B}\varphi_a\|\,\|\sum_{a\in B}\mathring{Z}_a\| \;.$$

En effet :

$$\sum_{a\in B}\varphi_a\otimes\mathring{Z}_a = \int [\sum_{a\in B} f_a\,\varphi_a]\otimes[\sum \bar{f}_a\,\mathring{Z}_a]d\mathbb{P}$$

donc
$$\|\sum_{a\in B}\varphi_a\otimes\mathring{Z}_a\|_\wedge \le \int \|\sum f_a\,\varphi_a\|\,\|\sum \bar{f}_a\,\mathring{Z}_a\|d\mathbb{P} \;,$$

vu l'hypothèse faite sur (f_a), on obtient bien (3.8).

Notations diverses -- On note $|A|$ le cardinal d'un ensemble A.
Soit $(F_n)_{n=1,2,...}$ une suite de groupes finis commutatifs avec $|F_n| = 2^{2^{n+4}}$.
On pose $G_n = F_n \times F_n$. On note μ_n la mesure de Haar normalisée sur G_n $(\mu(G_n) = 1)$.
On pose $K_n = \prod_{j=1}^{n} G_j$ et $K = \prod_{j=1}^{\infty} G_j$. On note $\pi_n : K \to K_n$ la surjection canonique.
Soit μ la mesure $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ sur K. Soit 0_{G_n} l'élément unité de G_n ; on notera K_∞ le sous-groupe de K formé des éléments $(\eta_n)_n \in K$ tels que $\eta_n = 0_{G_n}$ pour n assez grand. Soit μ_∞ la mesure discrète sur K_∞, affectant la masse 1 à chaque point de K_∞.
On notera simplement $L^2(K)$ et $\ell^2(K_\infty)$ respectivement les espaces $L^2(K,\mu)$ et $L^2(K_\infty,\mu_\infty)$.

La construction de Szankowski consiste à mettre en pratique la proposition 3.1 dans l'espace $X = \mathcal{L}(\ell^2(K_\infty),L^2(K))$. (Il est un peu curieux qu'on soit conduit à travailler avec $\mathcal{L}(H_1,H_2)$ pour des espaces de Hilbert H_1 H_2 différents, mais comme tous les espaces hilbertiens séparables de dimension infinie sont isométriques, cela n'a aucune importance !) Dans toute la suite, on pose simplement $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ell^2(K_\infty),L^2(K))$.

Nous allons maintenant définir les objets requis dans la proposition 3.1, les notations sont malheureusement très lourdes :

(i) Les ensembles $\mathcal{J}_n$ et l'application $\varkappa_n$.

Les ensembles $\mathcal{J}_n$ sont définis comme suit :

$$\mathcal{J}_1 = K_1 \quad , \quad \mathcal{J}_2 = K_1 \times K_1 \quad , \quad \mathcal{J}_3 = K_1 \times K_2 \text{ , etc.}$$

$$\mathcal{J}_{2n} = K_n \times K_n \quad , \quad \mathcal{J}_{2n+1} = K_n \times K_{n+1} \quad .$$

Par définition, la surjection $\varkappa_{2n+1} : \mathcal{J}_{2n+1} \to \mathcal{J}_{2n}$ est la surjection canonique de $K_n \times (K_n \times G_{n+1})$ sur $K_n \times K_n$; de même, $\varkappa_{2n} : \mathcal{J}_{2n} \to \mathcal{J}_{2n-1}$ est la surjection canonique de $(K_{n-1} \times G_n) \times K_n$ sur $K_{n-1} \times K_n$.

(ii) Les éléments Z_a.

Soit ξ, $\eta \in K_n$. On définit les projecteurs orthogonaux $P_\xi : L^2(K) \to L^2(K)$ et $p_\eta : \ell^2(K_\infty) \to \ell^2(K_\infty)$ par les formules suivantes :

$$\forall\, f \in L^2(K) \qquad\qquad P_\xi f = 1_{\pi_n^{-1}(\xi)} f$$

$$\forall\, g \in \ell^2(K_\infty) \qquad\qquad p_\eta(g) = 1_{\pi_n^{-1}(\eta) \cap K_\infty} g \quad .$$

(On note 1_E la fonction caractéristique de E.) Les éléments $(Z_a)_{a \in \mathcal{J}_n}$ sont définis à partir d'un opérateur particulier $Z \in \mathcal{L}$, dont la construction -parallèlement à celle des partitions Δ_n- est la difficulté principale.
Supposons Z déjà connu, alors Z_a est défini par :

$$\forall\, a \in \mathcal{J}_n , \quad a = (\xi, \eta) \qquad\qquad Z_a = Z_{(\xi,\eta)} = P_\xi Z p_\eta \quad .$$

Ici comme dans la suite, quand on écrit $(\xi,\eta) \in \mathcal{J}_n$ on sous-entend : si $n = 2m$ que $\xi \in K_m$ et $\eta \in K_m$, et si $n = 2m+1$ que $\xi \in K_m$ et $\eta \in K_{m+1}$.

(iii) Les éléments φ_a.

On note $(e_\eta)_{\eta \in K_\infty}$ la base canonique de $\ell^2(K_\infty)$. Posons $\widetilde{K}_\ell = \{\eta \in K_\infty \mid \eta_j = 0_{G_j} \ \forall\, j > \ell\}$ et notons H_ℓ le sous-espace de $\ell^2(K_\infty)$ engendré par $\{e_\eta \mid \eta \in \widetilde{K}_\ell\}$.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. On peut définir une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{L}$ de la manière suivante :

$$\forall\, x, y \in \mathcal{L} \qquad\qquad \underline{\underline{x}}(y) = \lim_{\ell \xrightarrow{\mathcal{U}} \infty} |\widetilde{K}_\ell|^{-1} \sum_{\eta \in \widetilde{K}_\ell} \langle y\, e_\eta \mid x\, e_\eta \rangle \quad .$$

A tout élément $x \in \mathcal{L}$ est ainsi associé un élément $\underline{\underline{x}} \in \mathcal{L}'$.
Notons deux inégalités faciles :

(3.9) $$\|\underline{\underline{x}}\|_{\mathcal{L}'} \leq \sup_{\delta \in K_\infty} \|x\, e_\delta\|$$

(3.10) $$\|\underline{\underline{x}}\|_{\mathcal{L}'} \leq \lim_{\ell \xrightarrow{\mathcal{U}} \infty} |K_\ell|^{-1} \|x_{|H_\ell}\|_1$$

(où l'on a noté $\|x_{|H_\ell}\|_1$ la norme de la restriction de x à H_ℓ dans l'espace des opérateurs nucléaires de H_ℓ dans $L^2(K)$).

Les éléments $\varphi_a \in \mathcal{L}'$ sont alors définis simplement par : $\varphi_a = \underline{\underline{Z}}_a \quad \forall\, a \in \mathcal{J}_n$. L'opérateur Z de $\mathcal{L}$ sera construit de sorte que $\|Z(e_\delta)\| = 1 \quad \forall\, \delta \in K_\infty$. Il en résulte immédiatement que

$$\sum_{a \in \mathcal{J}_n} \langle \underline{\underline{Z}}_a, Z_a \rangle = \lim_{\ell \xrightarrow{\mathcal{U}} \infty} |\tilde{K}_\ell|^{-1} \sum_{\delta \in \tilde{K}_\ell} \|Z(e_\delta)\|^2 = 1 \quad .$$

On a donc bien (3.1).

Le lemme suivant est la "brique" fondamentale pour la définition promise de Z ; la démonstration est combinatoire (voir [20] Lemma 7.1).
On convient que si F est un groupe fini, une "matrice de Hadamard" sur $F \times F$ est une application $M : F \times F \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, (f,g) \in F \times F \qquad |M(f,g)| = 1$$

$$M(0_F, f) = M(f, 0_F) = 1 \qquad (0_F \text{ est l'élément unité de } F),$$

et telle que de plus M est une matrice unitaire (i.e. M est la matrice associée à un opérateur unitaire sur $\ell^2(F)$).

Etant donné une "matrice" $M : F \times F \to \mathbb{C}$ on notera $\|M\|_\infty$ (resp. $\|M\|_1$) la norme uniforme (resp. nucléaire) de l'opérateur associé sur $\ell^2(F)$.
De plus, étant données deux parties A, S de F on définit la matrice ${}_SM_A$ par la formule :

$$\forall\, (f,g) \in F \times F \qquad {}_SM_A(f,g) = \begin{cases} M(g,f) & \text{si } f \in S \quad g \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Supposons que $|F| = q^2$ pour un entier q. Une partition de F sera dite régulière s'il s'agit d'une partition de F en q-parties, chacune de cardinal q.

Avec ces conventions, on peut énoncer le lemme suivant :

<u>Lemme fondamental</u> .- <u>Soit</u> q <u>un entier de la forme</u> 2^{8p} (<u>avec</u> p <u>entier</u>). <u>Soit</u> F <u>un groupe commutatif de cardinal</u> q^2 <u>et soit</u> $\mathcal{S}$ <u>une partition régulière fixée de</u> F. <u>On se donne un ensemble</u> G <u>ayant</u> q^8 <u>éléments</u>. <u>Alors</u>, <u>il existe pour chaque</u> g <u>dans</u> G <u>une partition régulière</u> ∇_g <u>de</u> F <u>et une matrice de Hadamard</u> v^g <u>sur</u> $F\times F$ <u>vérifiant les propriétés suivantes</u> :

(3.11) $$\|{}_S v^g_A\|_1 \le q \quad \forall\, g\in G \quad \forall\, A\in \nabla_g \quad \forall\, S\in\mathcal{S} .$$

(3.12) $$\|{}_S v^h_A\|_\infty \le q^{15/16} \quad \forall\, g,h\in G \;,\; h\neq g \;,\; \forall\, A\in\nabla_g \;,\; \forall\, S\in\mathcal{S} .$$

Nous pouvons maintenant compléter la description de la construction : on applique le lemme fondamental avec $G = G_{n+1}$, $F = F_n$ (noter qu'on a bien $|G_{n+1}| = |F_n|^4$).
On choisit (une fois pour toutes) pour chaque n une partition régulière $\mathcal{S}_n$ de F_n. On trouve donc, pour chaque n, une matrice de Hadamard v^n_g sur $F_n\times F_n$ et des partitions ∇_g de F_n pour g dans G_{n+1} (pour alléger, on supprime l'indice n dans ∇_g) telles que : $\forall\, g,h\in G_{n+1}$, $g\neq h$, $\forall\, S\in\mathcal{S}_n$, $\forall\, A\in\nabla_g$

(3.13) $$\|{}_S v^g_{nA}\|_1 \le |F_n|^{1/2}$$

(3.14) $$\|{}_S v^h_{nA}\|_\infty \le |F_n|^{15/32} .$$

(iv) <u>Définition de</u> Z

Pour tout élément $\xi_n\in G_n = F_n\times F_n$ on convient de noter $\xi^o_n\in F_n$ et $\xi^1_n\in F_n$ les deux composantes de ξ_n.
De plus, on pose pour $g\in G_{n+1}$ $\forall\,(e,f)\in F_n\times F_n$

$$v_n(g,e,f) = v^g_n(e,f) .$$

Szankowski définit alors Z de la manière suivante : $\forall\,\xi\in K$ $\forall\,\eta\in K_\infty$

$$z(\xi,\eta) = \prod_{n=1}^{\infty} v_n(\xi_{n+1},\xi^1_n,\eta^o_n)\; v_n(\eta_{n+1},\eta^1_n,\xi^o_n) .$$

On peut observer que ce produit infini a bien un sens puisque ses termes valent 1 pour n assez grand.
D'autre part, (3.15) $|z(\xi,\eta)| = 1$. De plus, on peut vérifier (voir plus loin) que :

(3.16) si $\eta,\delta\in K_\infty$, $\eta\neq\delta \Longrightarrow \int z(\xi,\delta)\overline{z(\xi,\eta)}\mu(d\xi) = 0$.

Au "noyau" z est donc associé un opérateur $Z \in \mathcal{L}(\ell^2(K_\infty), L^2(K))$ défini par :

$$Z(e_\eta) = z(\xi,\eta) \in L^2(\mu(d\xi)) \quad .$$

On notera que, d'après (3.16), Z est une isométrie de $\ell^2(K_\infty)$ sur un sous-espace de $L^2(K)$.

D'après (3.5), on a $\|Z(e_\eta)\| = 1 \ \forall\, \eta \in K_\infty$, comme il a été annoncé ci-dessus.

En réalité, Z possède une propriété d'orthogonalité plus fine que (3.16) qui est essentielle pour la suite et qui résulte de la définition de $z(\xi,\eta)$ et du fait que les matrices $v_n(g,\cdot,\cdot)$ sont de Hadamard. Il s'agit de la propriété suivante :

(3.17) si $\eta_{n+1} \neq \delta_{n+1}$ et $\eta_n^o = \delta_n^o$, alors

$$\int (Ze_\delta)(\overline{Ze_\eta})\, d\mu_{n+1}(\xi_{n+1}) = 0 \quad .$$

(Dans le cas $n = 0$, l'hypothèse $\eta_1 \neq \delta_1$ suffit.)

En particulier (3.16) découle de (3.17). Mais on a aussi une autre conséquence :

(3.18) $\forall\, (\xi,\eta) \in \mathcal{J}_n$, $\delta' \neq \delta'' \Longrightarrow Z_{\xi,\eta}(e_{\delta'}) \perp Z_{\xi,\eta}(e_{\delta''})$.

Cela revient à dire que $Z_{\xi,\eta}$ est <u>partiellement</u> isométrique de $\ell^2(K_\infty)$ dans $L^2(K)$.

(v) <u>Définition de</u> Δ_n

Parallèlement à la construction de Z, Szankowski définit les partitions Δ_n comme suit : Etant donnés

(3.19) $(c,d) \in K_{n-1} \times K_{n-1}$, $(e,f) \in F_n \times F_n$, $g \in G_{n+1}$, $A \in \nabla_g$, $S \in \mathcal{S}_n$,

on peut poser :

$$B_{2n+1}(c,d,e,f,g,A,S) = \{(\xi,\eta) \in \mathcal{J}_{2n+1} \mid \pi_{n-1}\xi = c \ , \ \pi_{n-1}\eta = d$$
$$\xi_n^1 = e \ , \ \eta_n^o = f \ , \ \xi_n^o \in S \ , \ \eta_n^1 \in A \ , \ \eta_{n+1} = g\} \ .$$

L'ensemble $B_{2n+2}(c,d,e,f,g,A,S)$ est défini comme le sous-ensemble de $\mathcal{J}_{2n+2}$ obtenu en inversant les rôles de ξ et η dans la définition de $B_{2n+1}(\ldots)$.

La partition Δ_{2n+1} est alors définie comme formée de tous les ensembles $B_{2n+1}(c,d,e,f,g,A,S)$ suivant les possibilités définies par (3.19).
La partition Δ_{2n+2} est définie similairement. On peut noter en passant que,

$$|\Delta_{2n+1}| = |\Delta_{2n+2}| = |K_{n-1}|^2 \ |G_n| \ |G_{n+1}| \ |F_n| \ .$$

Le lemme fondamental permet d'obtenir l'estimation suivante :

<u>Lemme</u> 3.4 .- <u>Fixons</u> n <u>et soient</u> c,d,e,f,g,A,S <u>vérifiant</u> (3.19). <u>Pour</u> $h \in G_{n+1}$, <u>on pose simplement</u>

$$B^h = B_{2n+1}(c,d,e,f,h,A,S) \ \underline{\text{et}} \ \omega^h = \sum_{a\in B^h} Z_a \ .$$

<u>On a alors</u>, <u>si</u> $h \neq g$:

$$\|\omega^h\|_{\mathcal{L}} \leq |F_n|^{-1/32} . (|K_{n-1}| \ |F_n|)^{-1/2}$$

$$\|\underline{\underline{\omega}}^g\|_{\mathcal{L}'} \leq |K_{n-1}|^{-3/2} \ |F_n|^{-1/2} \ |G_n|^{-1} \ |G_{n+1}|^{-1} \ .$$

<u>De plus, le même résultat est valable pour</u> $B_{2n+2}(\dots)$.

Cette estimation s'obtient en observant que ω^g ou ω^h admet une décomposition en un produit tensoriel dont l'un des facteurs peut être estimé par (3.13) ou (3.14), les normes des autres facteurs étant assez faciles à calculer du fait des propriétés d'orthogonalité de Z (cf. (3.17)). Nous n'avons pas la place de détailler ce point important (cf. [20] p. 17 et 18).

<u>Remarque</u> 3.5 .- Avec les notations du lemme précédent, on a :

$$\sum_{a\in B^g} \mathring{Z}_a = \sum_{h\neq g} \ \sum_{a\in B^h} Z_a = \sum_{h\neq g} \omega^h \ .$$

En utilisant (3.17), on peut voir que $\forall\, h,\chi \in G_{n+1}$ avec $h \neq \chi$, l'image de ω^h est orthogonale à l'image de ω^χ ; de même (trivialement) : $\operatorname{Ker}(\omega^h)^\perp$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}(\omega^\chi)^\perp$. Il en résulte immédiatement que :

$$\|\sum_{h\neq g} \omega^h\|_{\mathcal{L}} = \sup_{h\neq g} \|\omega^h\|_{\mathcal{L}} \ .$$

On a donc
$$\|\sum_{a\in B^g} \mathring{Z}_a\| = \sup_{h\neq g} \|\omega^h\|_{\mathcal{L}} \ .$$

On déduit donc du lemme 3.4 :

$$|\Delta_{2n+1}|\ \|\sum_{a\in B^g} \underline{\underline{Z}}_a\|_{\mathcal{L}'}\ \|\sum_{a\in B^g} \mathring{Z}_a\|_{\mathcal{L}} \leq |\Delta_{2n+1}|\ \|\underline{\underline{\omega}}^g\|_{\mathcal{L}'} \sup_{h\neq g} \|\omega^h\|_{\mathcal{L}}$$
$$\leq |F_n|^{-1/32} \quad .$$

On obtient encore la même estimation avec 2n+2 au lieu de 2n+1.
Par conséquent, puisque $\Sigma\ |F_n|^{-1/32} < \infty$, on a

$$\sum_n |\Delta_n| \sup_{B\in\Delta_n} \|\sum_{a\in B} \underline{\underline{Z}}_a\|\ \|\sum_{a\in B} \mathring{Z}_a\| < \infty \quad . \tag{3.20}$$

Pour terminer le travail, il ne reste plus qu'à établir (3.2) et à justifier l'application de la remarque 3.2 [ce qui montrera que (3.20) implique (3.4)].

(vi) Montrons (3.2)

Supposons par exemple que n est pair, $n = 2m$. D'après (3.18), on a $\forall\ a = (\xi,\eta) \in \mathcal{J}_n$

$$\|Z_a\| = \mathrm{Sup}\{\|Z_a(e_\delta)\|\ |\ \delta\in K_\infty\}$$

$$\leq \sup\{\|1_{\pi_m^{-1}\xi}\ Z(e_\delta)\|\ |\ \delta\in K_\infty\}$$

d'où puisque $Z(e_\delta)$ est une fonction de module 1 :

$$\leq \|1_{\pi_m^{-1}\xi}\|_{L^2(K)} = |K_m|^{-1/2} \quad .$$

Passons à l'autre terme de (3.2) : soient $\varepsilon_{\xi,\eta}$ des scalaires tels que $|\varepsilon_{\xi,\eta}| = 1$ $\forall\ (\xi,\eta)\in\mathcal{J}_n$. On a d'après (3.9) :

$$\|\sum_{a\in\mathcal{J}_n} \varepsilon_a\ \underline{\underline{Z}}_a\|_{\mathcal{L}'} \leq \sup_{\delta\in K_\infty} \|\sum_{a\in\mathcal{J}_n} \varepsilon_a\ Z_a(e_\delta)\|$$

d'où, vu la définition de Z_a :

$$\leq \sup_{\delta\in K_\infty} \{\|\sum_{\xi\in K_m} \varepsilon_{\xi,\pi_m\delta}\ 1_{\pi_m^{-1}\xi}\ Z(e_\delta)\| \quad ,$$

d'où, puisque $|\sum_{\xi\in K_m} \varepsilon_{\xi,\pi_m\delta}\ 1_{\pi_m^{-1}\xi}| = 1$:

$$\leq \sup_{\delta\in K_\infty} \|Z(e_\delta)\| = 1 \quad .$$

On a donc bien :

$$\sup_{a\in\mathcal{I}_n} \|Z_a\| \sup_{|\varepsilon_a|=1} \|\sum_{a\in\mathcal{I}_n} \varepsilon_a \underset{=}{Z}_a\|_{\mathcal{L}'} \leq |K_m|^{-1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{si } n\to\infty \quad .$$

Ce qui équivaut évidemment à (3.2).

Il reste pour conclure à se convaincre que la remarque 3.2 s'applique. Pour cela on utilise l'observation élémentaire suivante : soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, soient $P_1,\ldots,P_N$ (resp. $Q_1,\ldots,Q_N$) des projecteurs orthogonaux sur H_1 (resp. H_2). Soient $(\varepsilon'(i))_{i\leq N}$, $(\varepsilon''(j))_{j\leq N}$ des scalaires de module égal à 1. Alors $\forall\ x\in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ on a :

$$\|(\sum_1^N \varepsilon''(j)Q_j)\ x(\sum_1^N \varepsilon'(i)P_i)\| = \|x\| \quad . \tag{3.21}$$

Considérons alors $B = B_{2n+1}(c,d,e,f,g,A,S)$ (par exemple) avec (3.19).

Soient $(\omega'(\alpha))\in\{-1,+1\}^A$ et $(\omega''(s))\in\{-1,+1\}^S$. En appliquant (3.21), on trouve :

$$\|\sum_{(\xi,\eta)\in B} \omega'(\eta_n^1)\ \omega''(\xi_n^o)\ \mathring{Z}_{\xi,\eta}\|_{\mathcal{L}} = \|\sum_{(\xi,\eta)\in B} \mathring{Z}_{\xi,\eta}\|_{\mathcal{L}} \quad .$$

Suivant en gros le même principe, on peut vérifier aussi que :

$$\|\sum_{(\xi,\eta)\in B} \omega'(\eta_n^1)\ \omega''(\xi_n^o)\ \underset{=}{Z}_{\xi,\eta}\|_{\mathcal{L}'} = \|\sum_{(\xi,\eta)\in B} \underset{=}{Z}_{\xi,\eta}\|_{\mathcal{L}'} \quad .$$

La remarque 3.2 s'applique donc avec $\Omega = \{-1,+1\}^A\times\{-1,+1\}^S$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω, et $\forall\ (\xi,\eta)\in B$ $f_{\xi,\eta}(\omega) = \omega'(\eta_n^1)\ \omega''(\xi_n^o)$.

On peut donc finalement conclure que $\mathcal{L}$ n'a pas la propriété d'approximation en lui appliquant la proposition 3.1. OUF !

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.D. CHOI et E.G. EFFROS - Nuclear C^*-algebras and the approximation property, Amer. J. Math. 100 (1978) 61-79.

[2] D. DACUNHA-CASTELLE - Contre-exemple à la propriété d'approximation dans les espaces de Banach [d'après Enflo et Davie], Séminaire Bourbaki 72-73, exposé 433.

[3] A.M. DAVIE - The approximation problem for Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 5 (1973) 261-266.

[4] P. ENFLO - A counterexample to the approximation property in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973) 309-317.

[5] T. FIGIEL et W.B. JOHNSON - The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973) 197-200.

[6] T. FIGIEL et A. PEŁCZYNSKI - On Enflo's method of construction of Banach spaces without the approximation property, Uspechi Math. Nauk SSSR 28, 6 (1973) 95-108.

[7] A. GROTHENDIECK - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc. No 16 (1955).

[8] U. HAAGERUP - An example of a non-nuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property, Inventiones Math. 50 (1979) 279-293.

[9] S. HEINRICH - Finite representability and super-ideals of operators, Dissertationes Math. (à paraître).

[10] F. JOHN - Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Courant Anniversary volume, p. 187-204, Interscience New York (1948).

[11] E. KIRSHBERG - C^*-nuclearity implies CPAP, Math. Nachr. 76 (1977) 203-212.

[12] S. KWAPIEN - On Enflo's example of a Banach space without the approximation property, Exposés 8-9, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[13] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI - The uniform approximation property in Orlicz spaces, Israel J. Math. 23 (1976) 142-155.

[14] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI - Classical Banach spaces - I - Sequence spaces, Ergebnisse ... No 92, Springer-Verlag (1977).

[15] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI - Idem - II - Function spaces (à paraître).

[16] A. PEŁCZYNSKI et H.P. ROSENTHAL - Localization techniques in L_p-spaces, Studia Math. 52 (1975) 263-289.

[17] J. STERN - Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach, Exposés 7 et 8, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, Ecole Polytechnique, Paris.

[18] A. SZANKOWSKI - A Banach lattice without the approximation property, Israel J. Math. 24 (1976) 329-337.

[19] A. SZANKOWSKI - Subspaces without the approximation property, Israel J. Math. 30 (1978) 123-129.

[20] A. SZANKOWSKI - The space of all bounded operators on Hilbert space does not have the approximation property, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau (exposé No 14-15).

[21] A. SZANKOWSKI - Article en préparation.

[22] M. TAKESAKI - On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, Tohoku Math. J. 16 (1964) 111-122.

[23] S. WASSERMAN - On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Funct. Analysis 23 (1976) 239-254.

[24] C. LANCE - On nuclear C^*-algebras, J. Funct. Analysis 12 (1973) 157-176.