DANIEL BERTRAND

Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. nº 538, p. 228-243
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__228_0>

TRAVAUX RÉCENTS SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par Daniel BERTRAND

L'étude des connexions régulières rencontrées dans certaines situations géométriques a fait naître en France, ces dernières années, un renouveau d'intérêt pour la théorie des singularités des équations différentielles linéaires. Pour donner à cet exposé une taille raisonnable, nous n'avons pas abordé ici ces applications, nous contentant de faire le point sur la classification analytique locale des équations différentielles.

L'exposé est divisé en trois parties. La première est, pour l'essentiel, classique. La seconde reprend certains travaux de Malgrange, récemment généralisés par Ramis. La dernière est consacrée à l'étude des singularités irrégulières, dans une présentation de Malgrange et Deligne.

Parmi les motivations à long terme de la théorie, nous signalerons certaines applications diophantiennes (qui conduiraient à pousser plus loin l'étude du § 2.3, infra), ainsi que l'analogie, suggérée par Deligne, entre l'irrégularité des connexions et le conducteur de Swan des formules d'Euler-Poincaré pour les faisceaux ℓ-adiques.

§ 1. La classification formelle

1.1. Généralités sur les connexions

a. Vocabulaire : soient K un corps de caractéristique 0 , $\mathcal{D}$ un espace de dérivations sur K , Ω le dual de $\mathcal{D}$, et d la connexion canonique $K \longrightarrow \Omega$ définie par $dy(\partial) = \partial y$. On suppose donnés un espace vectoriel V sur K , de dimension finie n , et une connexion ∇ sur V (i.e. une application additive de V dans $\Omega \otimes V$ vérifiant la formule de Leibniz). La connexion ∇ permet de faire agir $\mathcal{D}$ sur V par la formule $\nabla_\partial v = \langle \nabla v, \partial \rangle$, et munit V d'une structure de $K[\mathcal{D}]$-module. Dans une base $\underline{e}$ de V , ∇_∂ s'identifie à l'opérateur $D : K^n \longrightarrow K^n$ défini par

$$DY = \partial Y + MY ,$$

où M est une matrice (n,n) à coefficients dans K .

Soient V_1 , V_2 deux vectoriels sur K , munis de connexions ∇_1 , ∇_2 . Alors, $V_1 \otimes V_2$, $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ (et, en particulier, $V^\vee = \mathrm{Hom}(V,K)$), ... sont munis de connexions naturelles $\nabla_1 \otimes \nabla_2$, $\nabla_{1,2} = \nabla_1^\vee \otimes \nabla_2$, ... Ainsi, pour φ élément de $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$:

$$\nabla_{1,2}\, \varphi(v_1) = \nabla_2(\varphi(v_1)) - \varphi(\nabla_1(v_1)) .$$

On dit que V_1 et V_2 sont isomorphes si le noyau de $\nabla_{1,2}$ rencontre $\mathrm{Iso}_K(V_1,V_2)$. Par exemple, si M_1 (resp. M_2) désigne la matrice représentative de l'opérateur ∇_∂ dans une base $\underline{e}_1$ (resp. $\underline{e}_2$) de V , la matrice de passage A de $\underline{e}_1$ à $\underline{e}_2$ vérifie le système différentiel :

$$\partial A = M_1 A - AM_2 .$$

L'ensemble des classes d'isomorphismes de K-vectoriels à connexions de dimension 1 forme un groupe (pour l'opération $\otimes$; voir [27], § 2) isomorphe à $\Omega/\mathrm{dln}\, K^\times$ où $\mathrm{dln}\, K^\times$ désigne l'ensemble $\{y^{-1}dy \, , \, y \in K^\times\}$. Pour tout élément α de $\Omega/\mathrm{dln}\, K^\times$, nous désignerons par $K_{(\alpha)}$ l'un des représentants de la classe de connexions correspondant à α .

b. Connexions régulières : on suppose désormais que $\mathcal{D}$ est de dimension 1 sur K , que K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète (de rang 1) $\mathcal{O}$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, dont le corps résiduel k est de caractéristique 0 , et tel que, si x désigne une uniformisante de $\mathcal{O}$, le $\mathcal{O}$-module engendré par $d\mathcal{O}$ soit libre, de base dx . Pour alléger certains énoncés, nous supposerons également que k est algébriquement clos. On note δ (resp. θ) la base duale de dx (resp. $x^{-1}dx$), et pour tout entier $q \geq 1$, on pose $\theta_q = x^{q-1}\theta$.

Soit Λ_o un réseau de V , i.e. un sous $\mathcal{O}$-module libre de V , de rang n . Pour tout réseau Λ de V , tout entier $i \geq 0$, et tout élément ∂ de $\mathcal{D}$, on note $v(\Lambda)$ le plus grand entier ν tel que $\Lambda \subset x^\nu \Lambda_o$ et Λ_∂^i le réseau $\Lambda + \nabla_\partial \Lambda + \ldots + \nabla_\partial^i \Lambda$. On a alors (voir [8], II.1.9., [12], § 5) :

Lemme 1.1.- Il existe un nombre rationnel $r \geq 0$, de dénominateur $\leq n$, tel que, pour tout réseau Λ de V , la suite $\{|-v(\Lambda_\theta^i) - ri| \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$ soit bornée.

Cet énoncé est clairement indépendant de Λ_o . Le nombre r est ainsi un invariant de la connexion, appelé rang (de Katz) de ∇ . On dira que la connexion ∇ est régulière, si son rang est nul.

Dans une direction voisine, Gérard et Levelt [12] considèrent, pour tout entier $q \geq 1$, les k-espaces vectoriels $\Lambda_{\theta_q}^i / \Lambda_{\theta_q}^{i-1}$, et démontrent que, pour $i > i_o$, leur dimension ρ_q est indépendante de i et de Λ . Les relations $r = 0$ et $\rho_1 = 0$ sont équivalentes (voir, par exemple, [12], théorème 4.1) et l'on a :

Lemme 1.2.- ∇ est régulière si, et seulement si, il existe un réseau Λ de V stable par ∇_θ .

En d'autres termes, tout système différentiel associé à une connexion régulière est K-équivalent à un système différentiel de "première espèce" (voir [6], IV).

Dans ce cas, on pourra même choisir n pour i_o , ce qui fournit un critère effectif de régularité (voir également [29], [17]).

<u>Lemme</u> 1.3.- <u>Si</u> V_1 , V_2 <u>sont munis de connexions régulières</u> ∇_1 , ∇_2 , <u>la connexion</u> $\nabla_{1,2}$ <u>sur</u> $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ <u>est régulière</u>.

En conséquence (voir [27], §§ 4 et 5), les classes d'isomorphisme de vectoriels à connexion régulière de dimension 1 forment un sous-groupe de $\Omega/\mathrm{dln}\, K^x$, isomorphe à $x^{-1}\,\mathcal{O}dx/\mathrm{dln}\, K^x$. Lorsque K est complet pour la valuation $\mathfrak{m}$-adique, ce dernier groupe est isomorphe à $k/\mathbb{Z}$.

Pour tout entier $m > 0$, nous désignerons par $K^{(m)}$ le vectoriel K^m , muni de la connexion régulière définie sur la base canonique de K^m par $\nabla_\theta e_i = e_{i+1}$ $(i = 1,\dots,m-1)$, $\nabla_\theta e_m = 0$.

c. <u>Equations différentielles</u> : le lemme suivant est classique (voir par exemple [7], ou [8], II.1.3.), et peut d'ailleurs se déduire des propriétés élémentaires de l'anneau principal $K[\mathcal{D}]$ (voir [16]).

<u>Lemme</u> 1.4.- <u>Il existe un élément</u> e <u>de</u> V , <u>appelé vecteur cyclique de</u> V , <u>tel que, pour toute base</u> ∂ <u>de</u> $\mathcal{D}$, <u>le système</u> $\{e,\nabla_\partial e,\dots,\nabla_\partial^{n-1}e\}$ <u>soit une base de</u> V .

Par passage au dual, on voit ainsi que tout système différentiel $DY = 0$ est équivalent à une équation différentielle $Ly = 0$, où $L \in K[\mathcal{D}]$ dépend évidemment du choix du vecteur cyclique. De façon précise, les noyaux (resp. les conoyaux) de $D : K^n \longrightarrow K^n$ et $L : K \longrightarrow K$ sont isomorphes. La "correspondance" réciproque est bien connue.

Soit

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\delta^i = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(q)}(x)\theta_q^i \qquad (q \geq 1)$$

un opérateur différentiel à coefficients dans K . Les invariants de la connexion ∇ se lisent aisément sur les <u>polygones de Newton</u> (réduits) $\mathcal{N}(L)$ des opérateurs L associés à ∇ (on vérifie donc, a posteriori, que les expressions qui suivent sont indépendantes du choix d'un vecteur cyclique). Rappelons que $\mathcal{N}(L)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{i=0,\dots,n} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \leq i \ , \ y \geq v(a_i) - i\}$, où v désigne la valuation de K définie par $\mathcal{O}$ (voir [15], 17.5, [1], [32], [26], et, pour une justification de cette définition, [34]). On note

$$0 = k_0 < k_1 < \dots < k_\ell < k_{\ell+1} = +\infty$$

les pentes des différents côtés de $\mathcal{N}(L)$. L'abscisse $c(L)$ du sommet du côté de pente nulle est le degré du <u>polynôme indiciel</u> $P_L \in k[\rho]$ de L , obtenu en sommant, par n suffisamment grand, les termes de plus basse valuation de $x^\rho L(x^{n-\rho})$. Pour $q \geq 1$, on a alors (voir [8], II.1.10, [12], § 3, [34], 1.8) :

$$r = \sup(0, \sup_{i=0,..,n-1} \frac{v(a_n^{(1)}) - v(a_i^{(1)})}{n-i}) = \sup(0, \sup_{i=0,..,n-1} \frac{v(a_n) - n - (v(a_i) - i)}{n-i} = k_\ell \ ;$$

$$\rho_q = \sup_{i=0,..,n} (v(a_n^{(q)}) - v(a_i^{(q)})) = \sup_{i=0,..,n} (v(a_n) - qn - (v(a_i) - qi)) = \rho_q(L) \ .$$

En comparant avec le lemme 1.2, on retrouve la condition de régularité de Fuchs. Par ailleurs, des revêtements ramifiés $\xi^p = x$ (voir ci-dessous, § 1.2) permettent de prolonger l'application $q \longrightarrow \rho_q(L)$ à $\mathbb{Q}$. Le graphe de la fonction ainsi obtenue se déduit du polygone de Newton de L par transformation de Legendre [32].

1.2. Le cas formel

Nous supposerons dans ce paragraphe K complet (de sorte que $K = k((x))$ et $k = \mathrm{Ker}\ d$). On dispose alors du lemme de relèvement suivant ("lemme de Sibuya" pour $q > 1$, voir [40], 11, et [22], § 2), où la barre supérieure désigne la réduction modulo $\mathfrak{m}$.

Lemme 1.5.- *Soient Λ un réseau de V , et q un entier ≥ 1 tel que $\nabla_{\theta_q} \Lambda \subset \Lambda$. On suppose que $\overline{\Lambda}$ est somme directe de deux k-espaces vectoriels λ_1 et λ_2 stables par $\overline{\nabla}_{\theta_q}$. Pour $i = 1,2$, soit δ_i la restriction de $\overline{\nabla}_{\theta_q}$ à λ_i . Si $q > 1$, et si δ_1 et δ_2 n'ont pas de valeur propre commune (resp. si $q = 1$, et si les valeurs propres de δ_1 ne diffèrent pas de celles de δ_2 d'un entier $\neq 0$), il existe une décomposition de Λ en somme directe de deux sous $\mathcal{O}$-modules Λ_1 et Λ_2 stables par ∇_{θ_q} , et tels que $\overline{\Lambda}_i = \lambda_i$ pour $i = 1,2$.*

Ce lemme est à la base de la classification des K-vectoriels à connexions (V,∇) . Traitons tout d'abord le cas des connexions régulières. Le lemme 1.2 permet d'appliquer le lemme 1.5 avec $q = 1$, d'où une première décomposition de V si la partie polaire de la matrice représentative de ∇_θ (dans une base de Λ) a deux valeurs propres différant d'un entier > 0 . On se ramènera à cette hypothèse au moyen d'une transformation de cisaillement (shearing) (voir [40], 17.1). De ceci, et du théorème de Krull-Schmidt (voir [16]) appliqué aux $K[\mathcal{D}]$-modules, on déduit (Fuchs, Frobenius ; voir [27], § 6) :

THÉORÈME 1.1.- *Soit (V,∇) un K-vectoriel à connexion régulière. Il existe des éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ de $\mathcal{O}x^{-1}dx/d\ln K^\times \simeq k/\mathbb{Z}$, et des entiers $m_1,\ldots,m_t > 0$ tels que*

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} K_{(\alpha_i)} \otimes K^{(m_i)}$$

soit, à isomorphisme près, l'unique décomposition de (V,∇) en K-sous-vectoriels à connexion indécomposables.

[En particulier, le système $DY = 0$ admet un système fondamental de "solutions" de la forme $\Phi(x)x^C$, où C est une matrice de Jordan à coefficients dans k, et $\Phi \in GL_n(K)$]

Supposons maintenant ∇ non régulière. On sait depuis Fabry que les décompositions de V font intervenir des extensions algébriques de K. Soit $E = k((x^{1/p}))$ une telle extension. Elle est munie d'une unique connexion $d_E : E \longrightarrow \Omega_E$ étendant d. On peut alors énoncer (voir [38], § 3, [14], [22], [1]) :

THÉORÈME 1.2.- <u>Soit</u> V <u>un vectoriel sur</u> K <u>muni d'une connexion</u> ∇. <u>Il existe une extension finie</u> E <u>de</u> K, <u>des éléments</u> $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ <u>de</u> $\Omega_E/\mathrm{dln}\, E^x$, <u>et des entiers</u> $m_1,\ldots,m_t > 0$, <u>tels que</u>

$$V \otimes E \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} E_{(\alpha_i)} \otimes E^{(m_i)}$$

<u>soit, à isomorphisme</u> (<u>sur</u> E) <u>près, l'unique décomposition de</u> $(V \otimes E, \nabla \otimes d_E)$ <u>en</u> E-<u>sous-vectoriels à connexion indécomposables</u>.

[En particulier, le système $DY = 0$ admet un système fondamental de "solutions" de la forme $\Phi(\xi)\xi^C \exp(P(\xi^{-1}))$, où $\xi^p = x$, P est une matrice diagonale à coefficients polynomiaux, et $\Phi \in GL_n(k((\xi)))$.]

Indiquons le point clef de la démonstration du théorème 1.2. Soit $r = m/p$ le rang de ∇, e un vecteur cyclique de (V,∇), et M_0 la partie la plus polaire de la matrice représentative de ∇_θ dans la base $\{f_i = x^{(i-1)r}\nabla_\theta^{i-1}e \; ; \; i = 1,\ldots,n\}$ déduite de e par une transformation de cisaillement définie sur $E = K((x^{1/p}))$.
Si r est > 0, M_0 n'est pas nilpotente (voir [19], 11.9). On montre alors que, si M_0 n'a qu'une valeur propre μ, le nombre r est entier. Dans ce cas, on considère le K-module $V \otimes K_{(-\mu x^{-r-1}dx)}$, dont le rang est $< r$. Dans le cas contraire, on peut appliquer le lemme 1.5 à $V \otimes E$. On conclut par une double récurrence sur n et r.

L'unicité de la décomposition résulte du théorème de Krull-Schmidt ([1] ; voir également [22]). Un argument galoisien assure alors l'existence d'une extension E de K, de degré $\leq$ p.p.c.m$(1,\ldots,n)$, vérifiant les conditions du théorème 1.2 (voir [22], § 6). Il convient ici de mentionner que, pour toute extension M de K, les M-vectoriels à connexion $M_{(\alpha)} \otimes M^{(m)}$ $(\alpha \in \Omega_M)$ sont "absolument" indécomposables. D'autre part, seules apparaissent, parmi les décompositions décrites par le théorème 1.2, celles dont le diviseur $\sum_{i=1}^{t} m_i(\alpha_i)$ est K-rationnel.

Signalons enfin une démonstration "plus parlante" du théorème 1.2, fondée sur le polygone de Newton d'un opérateur L associé à ∇. ([26]) : à chaque côté de pente $k_i \neq 0,+\infty$ de $\mathcal{N}(L)$ (resp. au côté de pente 0), on associe un opérateur différentiel L_i (resp. un opérateur régulier L_0 d'ordre $c(L)$) de telle sorte que

$$K[\mathcal{D}] / K[\mathcal{D}]L \simeq \bigoplus_{i=0}^{\ell} K[\mathcal{D}] / K[\mathcal{D}]L_i .$$

On peut alors relever à $K[\mathcal{D}] / K[\mathcal{D}]L_i$ $(i \geq 1)$ les décompositions du polynôme déterminant associé au côté de pente k_i (mais cette décomposition ne peut bien entendu pas se lire sur $\mathcal{N}(L)$, voir [13]). On rapprochera ce dernier pas du lemme de Hensel établi par Dwork et Robba à propos des opérateurs différentiels à coefficients analytiques p-adiques (voir [10], 6.2, et pour une présentation générale, [34]).

§ 2. Les théorèmes de comparaison

Dans la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2, le caractère complet du corps de base a joué un rôle fondamental. Nous allons maintenant introduire divers espaces fonctionnels, qui fournissent une interprétation analytique des invariants introduits au § 1.1.

A l'exception du § 2.3, on suppose que k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On désigne désormais par $\mathcal{O} = k\{x\}$ (resp. K) l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine (resp. son corps des fractions), et par $\hat{\mathcal{O}} = k[[x]]$ (resp. $\hat{K}$) son complété x-adique. Si V désigne un vectoriel sur K muni d'une connexion ∇ , on note $\hat{V}$ le $\hat{K}$-vectoriel $V \otimes \hat{K}$, muni de la connexion canonique étendant ∇ .

Nous nous limitons, dans cette partie, à l'étude d'un opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\delta^i$$

à coefficients dans $\mathcal{O}$. Les isomorphismes $\hat{K}/K \simeq \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}, \ldots,$ permettent d'énoncer les résultats qui suivent en termes méromorphes. De là, on passe à l'étude des connexions générales par la correspondance décrite au § 1.1.c. Nous laissons au lecteur le soin de faire les traductions correspondantes.

2.1. Séries formelles et séries convergentes. Applications

On compare ici l'action de L sur $\mathcal{O}$ et sur $\hat{\mathcal{O}}$. Les notations sont celles du § 1.1.c.

THÉORÈME 2.1 ([24]).- L'application $L : \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est surjective. Son noyau est de dimension finie, égale à $\rho_1(L)$.

Le nombre $\rho_1(L) = \sup_{i=0,\ldots,n} (v(a_n) - n - (v(a_i) - i))$ est appelé irrégularité (de Malgrange) de L , et sera désormais noté $i(L)$ (notation similaire pour les connexions correspondant à L , et justifiée par le caractère invariant de ρ_1).

La démonstration du théorème 2.1 repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.1 ([24]).- L'application $L : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ est à indice, d'indice $\chi(L,\mathcal{O}) = m - v(a_m)$; l'application $L : \hat{\mathcal{O}} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ est à indice, d'indice $\chi(L,\hat{\mathcal{O}}) = \sup_{i=0,\dots,n} (i - v(a_i))$.

La première de ces assertions résulte d'un argument de perturbation compacte, suivi d'une limite inductive. Elle fournit en particulier une minoration classique de dim $\mathrm{Ker}(L,\mathcal{O})$, due à Perron. Pour établir la seconde, on vérifie que, pour k entier suffisamment grand, l'application $L : z^k \hat{\mathcal{O}} — z^{k-\omega}\hat{\mathcal{O}}$ est surjective (on a posé $\omega = \sup_{i=0,\dots,n} (i - v(a_i))$). On en déduit également la nullité de $\mathrm{Coker}(L,\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$, d'où le théorème.

Soit maintenant (V,∇) un K-vectoriel à connexion. Le théorème 2.1, joint au lemme 1.2, entraîne que ∇ est régulière si et seulement si $i(\nabla) = \dim \mathrm{Ker}(\nabla,\hat{V}/V) = 0$.

COROLLAIRE 2.1.- Même énoncé que le théorème 1.1, où K désigne maintenant le corps des germes de fonctions méromorphes.

Il suffit en effet de vérifier que la matrice de passage exprimant le $\hat{K}[\mathcal{D}]$-isomorphisme $\hat{V} \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{K}_{(\alpha_i)} \otimes \hat{K}^{(m_i)} = \hat{V}_o$ est à coefficients dans K . Mais c'est précisément ce qu'exprime le théorème 2.1 puisque, V et V_o étant à connexion régulière, l'irrégularité de la connexion de $\mathrm{Hom}(V,V_o)$ est nulle (lemme 1.3).

En particulier, les séries formelles apparaissant dans le système fondamental des "solutions" $\Phi(x)x^C$ du système $DY = 0$ sont convergentes, et D admet un système fondamental de solutions à croissance modérée dans tout secteur. On retrouve ainsi la définition classique des points singuliers réguliers (la réciproque est banale).

Considérons enfin la matrice représentative ω de la connexion de V_o dans la base canonique de $\bigoplus_{i=1}^{t} K^{m_i}$. D'après le corollaire 2.1, la monodromie attachée à la connexion ∇ est représentée par la matrice $\exp(2i\pi\omega)$. Par réduction aux formes de Jordan, on a donc :

COROLLAIRE 2.2.- Les K-vectoriels à connexions régulières sont classifiés, à isomorphisme méromorphe près, par les classes de conjugaison des représentations du groupe $\mathbb{Z}$.

Pour le lien avec le problème de Riemann-Hilbert, voir [8], [20].

2.2. Filtrations Gevrey

Il nous reste à interpréter les pentes du polygone de Newton des opérateurs L non réguliers. A cet effet, Ramis introduit dans [32] deux familles continues d'espaces fonctionnels, définis par des conditions de Gevrey (voir également [41], [31], [21]). Pour tout $s \in [1,+\infty]$, on note $\mathcal{O}_s$ (resp. $\mathcal{O}_{(s)}$) l'anneau des séries formelles $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ telles que $\sum_{n\geq 0} u_n (n!)^{1-s} x^n$ converge (resp. définisse une fonction entière). Ainsi, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$, et $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_{(\infty)} = \hat{\mathcal{O}}$.

On reprend les notations du § 1.1 relatives à $\mathcal{N}(L)$. Si $k \in [0,+\infty]$, on désigne par $n(L,k)$ (resp. $N(L,k)$) la plus petite (resp. la plus grande) des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{N}(L)$ avec sa droite d'appui de pente k. Pour $i = 0,1,\dots,\ell+1$, on pose par ailleurs : $s_i = 1 + k_i^{-1}$. On a alors la généralisation suivante du lemme 2.1 :

Lemme 2.2 ([32]).- *Soient* $k \in [0,+\infty]$ (*resp.* $k \in]0,+\infty]$), *et* $s = 1 + k^{-1}$. *L'application* $L : \mathcal{O}_s \longrightarrow \mathcal{O}_s$ (*resp.* $L : \mathcal{O}_{(s)} \longrightarrow \mathcal{O}_{(s)}$) *est à indice, d'indice* :
$\chi(L,\mathcal{O}_s) = n(L,k) - v(a_{n(L,k)})$ (resp. $\chi(L,\mathcal{O}_{(s)}) = N(L,k) - v(a_{N(L,k)})$). *De plus, l'application* $L : \mathcal{O}_s/\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_s/\mathcal{O}$ (*resp.* $L : \mathcal{O}_{(s)}/\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{(s)}/\mathcal{O}$) *est surjective*.

Le lemme 2.2 s'établit, dans le cas générique $k \neq k_1,\dots,k_\ell$, par un argument similaire à celui du lemme 2.1. Les cas exceptionnels sont plus délicats. Dans le cas où L est à coefficients polynomiaux, ils sont traités par Perron ([30], [31]) au moyen de l'équation aux différences satisfaite par les coefficients u_n des solutions formelles de L. On passe au cas général par perturbation compacte (pour les calculs d'indice), et en appliquant le lemme 3.3, infra, pour la surjectivité.

L'exemple suivant illustre le type de théorème de comparaison qu'on déduit du lemme 2.2.

THEOREME 2.2 ([32]).- *Soient* $\sigma_1,\sigma_2 \in [1,+\infty]$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*.

(i) $L : \mathcal{O}_{\sigma_2}/\mathcal{O}_{\sigma_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\sigma_2}/\mathcal{O}_{\sigma_1}$ *est un isomorphisme*.

(ii) *il existe un entier* $i \in [0,\ell]$ *tel que* $s_{i+1} \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 < s_i$ (*resp.* $\sigma_1 \geq s_1$ *si* $\sigma_2 = +\infty$).

Du théorème 2.2, appliqué au cas $\sigma_2 = +\infty$, on déduit en particulier que toute série formelle, dont l'image par L est convergente, appartient à un espace de Gevrey d'ordre s fini. En fait, il s'agit là d'une propriété très générale, que vérifient tous les opérateurs différentiels algébriques (voir [23], 132). Mais le théorème 2.2, joint à ses analogues pour les espaces $\mathcal{O}_{(\sigma_2)}/\mathcal{O}_{(\sigma_1)}$ et $\mathcal{O}_{(s)}/\mathcal{O}$, entraîne le résultat plus précis suivant :

COROLLAIRE 2.3 ([32]).- *Soit* $f = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ *une série formelle non convergente, telle que* Lf *converge. Il existe un nombre réel* $s > 1$ *unique tel que* $\sum_{n\geq 0} (u_n/(n!)^{s-1})x^n$

soit convergente, de rayon de convergence fini. De plus, $(s-1)^{-1}$ est l'une des pente du polygone de Newton de L .

Appliquons maintenant le théorème 2.2 au cas $\sigma_1 = 1$: l'application $L : \mathcal{O}_s/\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_s/\mathcal{O}$ est un isomorphisme si et seulement si $s < s_\ell$. Par dualité, on pourra rapprocher l'analogue, pour $\mathcal{O}_{(s)}$, de cet énoncé du résultat suivant, dû à Komatsu [21]. Soit $\mathcal{B}$ l'espace des hyperfonctions (sur $\mathbb{R}$) à support l'origine. On sait (Sato) que $L : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ est surjective, et que son noyau est de dimension finie, égale à $m + v(a_m)$. Soit alors $\mathcal{D}^{(s)'}$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ formé des ultradistributions de Gevrey-Beurling d'ordre s :

THÉORÈME 2.3 ([21]).- Soit $s \in [1,+\infty[$. L'application $L : \mathcal{B}/\mathcal{D}^{(s)'} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{D}^{(s)'}$ est un isomorphisme si et seulement si $s \leq s_\ell$.

Le théorème 2.3 se prolonge au cas $s = +\infty$. Il exprime alors un résultat de Méthée [28] sur le noyau distribution des opérateurs différentiels réguliers.

2.3. Le cas p-adique

Soit p un nombre premier. On suppose, dans ce paragraphe, que k est le complété d'une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques, dont on désigne la valeur absolue par $|\ |_p$ (les autres notations du § 2.1 sont conservées). La théorie se rapproche alors par plusieurs aspects de la situation non linéaire du cas complexe. On rencontre ainsi un phénomène de petits dénominateurs (voir [36]). Nous dirons qu'un élément α de k n'est pas un nombre de Liouville s'il existe un nombre réel $\varkappa$ tel que la famille $\{|\alpha - m|_p \cdot |m|^\varkappa\ ;\ m \in \mathbb{Z}\}$ ait une limite inférieure > 0 (exemple : les nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$). Si $L \in \mathcal{O}[\mathcal{D}]$, on peut énoncer :

THÉORÈME 2.4 ([5]).- On suppose qu'aucune des racines de l'équation indicielle $P_L(\rho) = 0$ de L n'est un nombre de Liouville. Alors l'application $L : \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ est un isomorphisme.

En conséquence, la décomposition formelle exprimée par le théorème 1.2 est encore valable dans la catégorie méromorphe p-adique, dès que les formes différentielles $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ qui y apparaîssent satisfont à certaines conditions diophantiennes (voir [1], 3).

Ainsi, l'irrégularité d'un système différentiel p-adique ne peut se déduire de considérations purement locales, et l'on est amené à considérer, par exemple, les rayons de convergence de ses solutions. Dans une direction différente, mentionnons pour conclure les théorèmes d'indices de Dwork et Robba, pour les opérateurs à coefficients analytiques bornés (voir [10], 4.2).

§ 3. La classification analytique

Nous avons vu, au § 2.1, que la classification analytique des K-vectoriels à connexions régulières se confond avec la classification formelle, et revient ainsi à l'étude de leur monodromie. Il n'en est évidemment pas de même des K-vectoriels à connexions irrégulières. Ainsi les équations différentielles $x^{q+1}\delta y = y$ $(q \in \mathbb{N})$ ont toutes une monodromie triviale ; la classification formelle est également insuffisante. Grâce à la théorie des développements asymptotiques, elle fournit néanmoins le point de départ de la classification analytique.

3.1. Développements asymptotiques

Soit $\pi : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ un éclatement réel de l'origine de $\mathbb{C}$, et $S = \pi^{-1}(0)$ le cercle des directions autour de 0 . A tout ouvert U de S , on associe l'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}(U)$ des germes en 0 de fonctions holomorphes sur un secteur $\tilde{U}$ associé à U, admettant un développement asymptotique en séries de puissances sur $\tilde{U}$. En d'autres termes, si $f \in \tilde{\mathcal{A}}(U)$, il existe une série formelle $\sum_{n\geq 0} u_n x^n \in \hat{\mathcal{O}}$ telle que, pour tout entier m , l'expression

$$x^{-m}(f(x) - \sum_{n=0}^{m} u_n x^n)$$

tende vers 0 lorsque x tend vers 0 dans $\tilde{U}$. La famille $\{\tilde{\mathcal{A}}(U) , U \subset S\}$ forme un préfaisceau sur S , dont on désigne le faisceau associé par $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{T} : \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ l'application qui, à $f \in \mathcal{A}(U)$, associe la série de Mac Laurin de f en 0 .

Le lemme suivant rassemble deux propriétés classiques des développements asymptotiques. La première est banale. La seconde, due à Borel et Ritt, a connu plusieurs généralisations (voir [11], 1.7).

<u>Lemme</u> 3.1.- <u>Soit</u> U <u>un ouvert de</u> S :

a) <u>si</u> $U = S$, $\mathcal{A}(U)$ <u>s'identifie à</u> $\mathcal{O}$;

b) <u>si</u> $U \neq S$, <u>l'application</u> $\mathcal{T}(U) : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ <u>est surjective</u>.

Pour les ouverts propres U de S , l'application $\mathcal{T}(U)$ n'est bien entendu pas injective (fonctions plates). Signalons néanmoins que sa restriction à certains sous-faisceaux de $\mathcal{A}$ est injective, et permet de resommer de façon canonique les séries formelles correspondantes (voir [41], où on impose des conditions de Gevrey liées à l'angle d'ouverture de U , et [33]).

Notons $\mathcal{A}_0$ le sous-faisceau des sections plates de $\mathcal{A}$. On a $H^p(S,\mathcal{A}_0) = 0$ pour $p = 0$ (lemme 3.1.a) et $p \geq 2$. Soient alors $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert suffisamment fin de S , et g un élément de $\hat{\mathcal{O}}$. Pour tout i , soit f_i un élément de $\mathcal{A}(U_i)$ tel que $\mathcal{T}(U_i) f_i = g$ (lemme 3.1.b). On vérifie aisément que la classe de cohomologie de $\{f_i - f_j\}$ dans $H^1(S,\mathcal{A}_0)$ ne dépend que de la classe de g dans $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, d'où une application injective γ de $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ dans $H^1(S,\mathcal{A}_o)$ (lemme 3.1a). On montre alors :

Lemme 3.2 ([25]).- $H^1(S,\mathcal{A}_o)$ *est isomorphe à* $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$.

3.2. Application aux équations différentielles

a. Le théorème fondamental : il est immédiat que, pour toute solution $f \in \mathcal{A}(U)$ d'une équation différentielle $Ly = 0$, où $L \in \mathcal{O}[\mathcal{D}]$, $\mathcal{C}(U)f$ appartient à $\mathrm{Ker}(L,\hat{\mathcal{O}})$. La réciproque de cette propriété est fournie par le théorème fondamental des développements asymptotiques, dont l'idée remonte à Poincaré (voir [37], [14], [38], et [40], 14 et 18).

THÉORÈME 3.1.- *Soient* q *un entier* ≥ 0 , M *une matrice* (n,n) *à coefficients dans* $\mathcal{O}$, U *un ouvert de* S *de mesure* $< \pi/q$, *et* G *un élément de* $\mathcal{A}(U)^n$. *On suppose que* $Z \in \hat{\mathcal{O}}^n$ *vérifie :* $x^{q+1}\delta Z + MZ = \mathcal{C}(U)G$. *Alors, il existe un élément* Y *de* $\mathcal{A}(U)^n$ *tel que* $\mathcal{C}(U)Y = Z$, *et* $x^{q+1}\delta Y + MY = G$.

On dispose essentiellement de deux méthodes pour démontrer ce théorème. L'une consiste à rechercher les solutions au moyen d'une équation intégrale (voir [40]). L'autre repose sur une réduction à un système différentiel global [3], qui en dehors de 0 , introduit au plus une singularité (celle-ci présente un pôle simple dans le cas générique ; mais voir [39]) ; de façon moins précise, on peut énoncer :

Lemme 3.3.- *Soit* V *un vectoriel à connexion sur* K . *Il existe un vectoriel à connexion* V_g *sur le corps* $K_g = \mathbb{C}(x)$, *tel que* V *et* $V_g \otimes K$ *soient isomorphes.*

b. Une nouvelle interprétation de l'irrégularité : soit V un vectoriel sur K de dimension n , muni d'une connexion ∇ . Celle-ci s'étend au faisceau sur S : $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A} \otimes V$. On note $\mathcal{A}_o(V)$ (resp. $\mathcal{A}_o(V,\nabla)$) le sous-faisceau des sections plates (resp. des sections plates horizontales pour la connexion ∇) de $\mathcal{A}(V)$.

Le théorème 3.1 revient à dire que $\nabla : \mathcal{A}_o(V) \longrightarrow \mathcal{A}_o(V) \otimes \Omega$ est surjective. La suite exacte longue de cohomologie associée s'écrit alors (lemme 3.1.a) :

$$0 \longrightarrow H^1(S,\mathcal{A}_o(V,\nabla)) \longrightarrow H^1(S,\mathcal{A}_o(V)) \xrightarrow{\nabla} H^1(S,\mathcal{A}_o(V)) \longrightarrow 0 .$$

Dans ces conditions, le théorème 2.1, joint au lemme 3.2, entraîne

THÉORÈME 3.2 ([25], [9]).- $H^1(S,\mathcal{A}_o(V,\nabla))$ *est de dimension finie, égale à l'irrégularité de* ∇ .

Pour tout $\theta \in S$, soit enfin $\nu(\theta)$ le rang de la fibre $\mathcal{A}_o(V,\nabla)_\theta$. On obtient une fonction s.c.i., ayant un nombre fini de points de discontinuité $\theta_1,\dots,\theta_N$, $\theta_{N+1} = \theta_1$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{A}_o(V,\nabla)_{]\theta_i,\theta_{i+1}[} \longrightarrow \mathcal{A}_o(V,\nabla) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{A}_o(V,\nabla)_{\theta_i} \longrightarrow 0 ,$$

fournit, grâce au lemme 3.1.a, un calcul de la dimension de $H^1(S,\mathcal{A}_o(V,\nabla))$, d'où :

COROLLAIRE ([9]).- Soit $Var(\nu,S)$ la variation totale de la fonction ν sur S . On a : $i(\nabla) = (1/2)Var(\nu,S)$.

Plus généralement, on peut interpréter les nombres $\chi(L,\mathcal{O}_s) - \chi(L,\mathcal{O})$, où $s \in [1,+\infty]$, en fonction de sous-faisceaux de $\mathcal{A}_o(V,\nabla)$ définis par des conditions de Gevrey d'ordre s (voir [32]).

3.3. Le phénomène de Stokes

Soit (V,∇) un K-vectoriel à connexion, et $(\hat{V}_o,\hat{\nabla}_o) = \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{E}_{(\alpha_i)} \otimes \hat{E}^{(m_i)}$ la décomposition formelle de $V \otimes \hat{E}$ définie par le théorème 1.2. Le théorème 3.1, appliqué à la matrice de passage exprimant l'isomorphisme $V \otimes \hat{E} \simeq \hat{V}_o$, entraîne que, sur tout secteur U d'angle suffisamment petit du revêtement fini de S correspondant à E , le système $DY = 0$ associé à ∇ admet un système fondamental de solutions de la forme $\Psi_U(x^{1/p})x^{C/p}\exp(P(x^{-1/p}))$, où Ψ_U admet un développement asymptotique Φ sur U (voir § 1.2). Le prolongement analytique de ce système fondamental change de développement asymptotique le long de certaines directions, appelées lignes de Stokes.

La caractérisation des classes d'isomorphisme méromorphe de K-vectoriels à connexion dont la forme formelle $(\hat{V}_o,\hat{\nabla}_o)$ est donnée se déduit de l'analyse de ce phénomène. Jointe au théorème 1.2, elle permet de conclure notre étude. Elle a été élaborée par Birkhoff (problème de Riemann-Hilbert généralisé, voir [4]) lorsque $\hat{V}_o$ est générique, et récemment reprise par divers auteurs (voir, en particulier, [18], [35], [2]). Nous en esquissons ci-dessous une nouvelle présentation, due à Deligne [9].

Afin d'alléger l'exposé, nous supposerons que les composantes de $(\hat{V}_o,\hat{\nabla}_o)$ sont définies sur $\hat{K}$ (on passera à un revêtement fini de S pour traiter le cas général). On note I l'espace $\Omega/(\mathbb{C}x^{-1} + \mathcal{O})dx$, que l'on munit, pour tout $\theta \in S$, d'un ordre partiel $\underset{\theta}{\geqslant}$ défini par :

$$\alpha \underset{\theta}{\geqslant} \beta \Leftrightarrow e^{\int\beta}/e^{\int\alpha} \text{ a une croissance modérée dans un voisinage de } \theta .$$

Un système local v sur S est dit I-filtré s'il est muni d'une famille de sous-faisceaux v^{α} indexés par I et tels que, pour tout $\theta \in S$, il existe une décomposition de v en somme directe $\bigoplus_{\alpha} v_{\alpha}$ vérifiant $v^{\alpha} = v_{\alpha} \oplus (\bigoplus_{\alpha \underset{\theta'}{>} \beta} v_{\beta})$ en tout θ' proche de θ .

Soient (V,∇) un K-vectoriel à connexion admettant $\hat{V}_o$ pour décomposition formelle, et v le système local des solutions (hors de l'origine) associé à (V,∇) (voir [8], I.2.17). D'après l'argument précédent (théorème 3.1 appliqué à $\nabla^{\vee} \otimes \nabla_o$), les ensembles v_{θ}^{α} des solutions Y telles que $Y/e^{\int\alpha}$ soit à croissance modérée au voisinage de θ , définissent sur v une structure de système local I-filtré. Cette filtration varie précisément le long des lignes de Stokes. Notant Gv le I-gradué associé, et V_o le K-vectoriel à connexion $\bigoplus_{i=1}^{t} K_{(\alpha_i)} \otimes K^{(m_i)}$, on peut énoncer :

THÉORÈME 3.3 ([9]).- Les K-vectoriels à connexion V munis d'un isomorphisme de $\hat{V}$ sur $\hat{V}_o$, sont classifiés, à isomorphisme méromorphe près, par les classes d'isomorphisme de systèmes locaux I-filtrés v munis d'un isomorphisme de Gv sur Gv_o.

Indiquons le point clef de la démonstration du théorème 3.3. Soient $\mathcal{A}_o(\mathrm{End}\ V_o)$ le faisceau des automorphismes de $\mathcal{A}(V_o)$ tangent d'ordre infini à l'identité, et $\Lambda_o(V_o)$ le sous-faisceau de ses sections horizontales pour $\nabla_o \otimes \nabla_o^{\vee}$. Une variante non commutative des arguments du § 3.2.b (voir [35] pour le lemme 3.2, et [25], § 3) permet de représenter par les éléments de $H^1(S,\Lambda_o(V_o))$ les classes d'isomorphisme de K-vectoriels à connexion V munis d'un isomorphisme $\hat{V} \xrightarrow{\sim} \hat{V}_o$. Mais $\Lambda_o(V_o)$ s'identifie au faisceau des automorphismes de v_o induisant l'identité sur Gv_o. Donc $H^1(S,\Lambda_o(V_o))$ classifie également, aux isomorphismes conservant la I-filtration près, les systèmes locaux I-filtrés v munis d'un isomorphisme $Gv \xrightarrow{\sim} Gv_o$.

En étendant la démarche exposée dans [18], § 8, aux équations à paramètres, on peut enfin démontrer (Malgrange) que l'espace des modules de K-vectoriels à connexions, munis d'une équivalence formelle avec un K-vectoriel à connexion V_o donné, est l'espace affine $\mathbb{C}^{i(V_o)}$, où $i(V_o)$ désigne l'irrégularité de $V_o \otimes V_o^{\vee}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BALDASSARI - Differential modules and singular points of p-adic differential equations, (preprint).

[2] W. BALSER, W. JURKAT, D. LUTZ - Birkhoff invariants and Stokes' Multipliers for meromorphic linear differential equations, (preprint).

[3] G. BIRKHOFF - Singular points of ordinary differential equations, Trans. A.M.S., 10(1909), 436-470.

[4] G. BIRKHOFF - The generalized Riemann problem for linear differential equations, Proc. Am. Ac. A. Sc., 49(1913), 521-568.

[5] D. CLARK - A note on the p-adic convergence of solutions of linear differential equations, Proc. A.M.S., 17(1966), 262-269.

[6] E. CODDINGTON, N. LEVINSON - Theory of ordinary differential equations, Mc Graw Hill, 1955.

[7] F. COPE - Formal solutions of irregular linear differential equations, II, Amer. J. Math., 58(1936), 130-140.

[8] P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers, Springer, Lecture Notes n° 163, 1970.

[9] P. DELIGNE - Lettres à Malgrange, (Août 1977 et Avril 1978).

[10] B. DWORK, P. ROBBA - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. A.M.S., 231(1977), 1-46.

[11] A. ERDELYI - Asymptotic expansions, Dover, 1956.

[12] A. GERARD, A. LEVELT - Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes..., Ann. Inst. Fourier, 23(1973), 157-195.

[13] B. HELFFER, Y. KANNAI - Determining factors and hypoellipticity..., Astérisque, 2-3(1973), 197-216.

[14] M. HUKUHARA - Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III, Mém. Fac. Sc. Kyusu Un., 2(1942), 125-137.

[15] E. INCE - Ordinary differential equations, Dover.

[16] N. JACOBSON - Pseudo-linear transformations, Annals of Math., 38(1937), 484-507.

[17] W. JURKAT, D. LUTZ - On the order of solutions of analytic linear differential equations, Proc. London M. S., 3(1971), 465-482.

[18] W. JURKAT - Meromorphe Differentialgleichungen, Springer Lecture Notes n° 637, 1978.

[19] N. KATZ - Nilpotent connections and the monodromy theorem..., Publ. Math. IHES, n° 39 (1970), 175-232.

[20] N. KATZ - An overview of Deligne's work on Hilbert's 21rst problem, Proc. Symp. Pure Maths, 28(1976), 537-557.

[21] H. KOMATSU - An introduction in the theory of hyperfunctions, in Proc. Conf. Katata, Springer Lecture Notes n° 287 (1973), 3-40.

[22] A. LEVELT - Jordan decomposition for a class of singular differential operators, Arkiv for Math., 13(1975), 1-27.

[23] K. MAHLER - Lectures on transcendental numbers, Springer Lecture Notes n° 546, 1976.

[24] B. MALGRANGE - Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, Enseign. math., 20(1970), 147-176.

[25] B. MALGRANGE - Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 76-77, n° 25.

[26] B. MALGRANGE - Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières, (preprint).

[27] Yu. MANIN - Moduli fuchsiani, Ann. Sc. Norm. Pisa, III, 19(1965), 113-126.

[28] P.-D. MÉTHÉE - Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions, Comment. Math. Helv., 33(1959), 38-46.

[29] J. MOSER - The order of a singularity in Fuchs' theory, Math. Zeit., 72(1960), 379-398.

[30] O. PERRON - Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, Acta Math., 34(1911), 139-163.

[31] O. PERRON - Über Summengleichungen and Poincarésche Differenzengleichungen, Math. Ann., 84(1921), 1-15.

[32] J.-P. RAMIS - Dévissage Gevrey, Astérisque 59-60(1978), 173-204.

[33] J.-P. RAMIS - Sommation de séries divergentes, Séminaire Lelong-Skoda, 78-79.

[34] P. ROBBA - Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels, Séminaire Amice-Christol-Robba, 78-79.

[35] Y. SIBUYA - Stokes phenomena, Bull. A.M.S., 83(1977), 1075-1077.

[36] Y. SIBUYA, S. SPERBER - Convergence of power series solutions of p-adic non-linear differential equations, (preprint).

[37] H. TRJITZINSKY - Analytic theory of linear differential equations, Acta. Math., 62(1933), 167-226.

[38] H. TURRITIN - Convergent solutions of ordinary linear homogenous differential equations..., Acta Math., 93(1955), 27-66.

[39] H. TURRITIN - Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form, Trans. A.M.S., 107(1963), 485-507.

[40] W. WASOW - Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Wiley, 1963.

[41] G. WATSON - A theory of asymptotic series, Phil. Tr. R. Soc. A., 211(1912), 279-343.

[Pour un résumé de la théorie de Birkhoff, voir également : Y. SIBUYA, Global Theory of 2nd Order L.O.D.E., § 56, North-Holland, 1975.]