JEAN-FRANÇOIS MÉLA

Le calcul sur les caractères de l'algèbre $M(G)$ et le problème « $\mu * L^1$ fermé ? »

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. nº 534, p. 151-169
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__151_0>

LE CALCUL SUR LES CARACTÈRES DE L'ALGÈBRE M(G) ET LE PROBLÈME " $\mu * L^1$ fermé ?"

[d'après les travaux de B. HOST et F. PARREAU]

par Jean-François MÉLA

1. L'algèbre $M = M(G)$

1.1. G désigne un groupe abélien localement compact, Γ son dual, $M = M(G)$ l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G , d'unité δ . Pour toute mesure de Radon μ sur G , on identifiera $L^1(\mu)$ avec le sous-espace des mesures $\nu \in M(G)$ absolument continues par rapport à μ . En particulier, si on note $m = m_G$ la mesure de Haar de G , $L^1(m)$ est un idéal de $M(G)$ noté encore $L^1 = L^1(G)$.

1.2. $M = M(G)$ est une algèbre de Banach commutative avec la norme $\|\mu\| = \int d|\mu|$. Notons $\Delta = \Delta M = \Delta M(G)$ son spectre de Gelfand, ensemble des caractères de l'algèbre, et $\hat{\mu}$ la transformée de Gelfand d'une mesure μ . Le groupe dual Γ s'identifie avec une partie de Δ , par la relation

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma \, d\mu \qquad (\gamma \in \Gamma , \mu \in M) .$$

Un élément de $\Gamma \subset \Delta$ sera appelé un caractère fort de l'algèbre M . La restriction de $\hat{\mu}$ à Γ n'est autre que la transformée de Fourier-Stieltjes de μ . La topologie de Γ comme dual de G est déterminée par les fonctions $\hat{\mu}$ et coïncide donc avec la topologie induite par la topologie de Gelfand de Δ .

Les notations non définies sont les notations usuelles de la théorie de la mesure et de l'analyse harmonique commutative utilisées dans [1], à ceci près que les groupes sont notés ici multiplicativement.

1.3. L'étude de l'algèbre de convolution L^1 a été le domaine privilégié de l'analyse commutative moderne. Certains peuvent penser qu'il n'y a plus grand chose à y rajouter. En tout cas, il n'en est pas de même de l'algèbre M . Bien que toute mesure $\mu \in M$ soit déterminée par sa transformée de Fourier-Stieltjes, comme l'on sait, Γ n'est pas dense dans Δ (c'est là le "phénomène de Wiener-Pitt"). Une description raisonnable de Δ a pû sembler longtemps hors d'atteinte et, du même coup, la théorie de Gelfand difficile à mettre en oeuvre. Les principales contributions avaient été jusqu'ici les travaux déjà anciens de ŠREIDER [2] [3], HEWITT et KAKUTANI [4] [5], puis ceux très importants de J. L. TAYLOR synthétisés dans [6], à la suite desquels G. BROWN et W. MORAN ont obtenu d'intéressants résultats, notamment sur les mesures de Bernoulli et les produits de Riesz [7] [8]. Il faut aussi mentionner les travaux de GLICKSBERG [9] [10].

Dans (3) nous donnerons une description de Δ qui reprend en les clarifiant les descriptions antérieures, et qui permet de développer un "calcul des caractères" de l'algèbre M . C'est ce calcul que B. HOST et F. PARREAU ont su pousser assez loin pour obtenir la réponse à de nombreuses questions et en particulier à un problème dont nous allons parler maintenant. (Outre les publications citées en référence, les travaux de B. HOST et F. PARREAU sont développés dans une série d'exposés du Séminaire [14].)

2. Le problème " $\mu * L^1$ fermé ? "

2.1. On appelle spectre de Fourier d'une fonction $f \in L^1$ ou d'une mesure $\mu \in M$, le support dans Γ de sa transformée de Fourier ou de Fourier-Stieltjes. Si Λ est une partie fermée de Γ , on note L^1_Λ et M_Λ , respectivement, l'ensemble des éléments de L^1 et de M ayant leur spectre de Fourier contenu dans Λ . L^1_Λ et M_Λ sont des idéaux fermés de L^1 et M , respectivement.

2.2. Etant donné une mesure $\mu \in M$, $\mu * L^1$ est un idéal de L^1 contenu dans L^1_Λ , où Λ est le spectre de Fourier de μ . Si μ est une mesure inversible, une mesure idempotente, ou la convoluée d'une mesure inversible et d'une mesure idempotente, il est facile de vérifier que $\mu * L^1 = L^1_\Lambda$ est fermé. La réciproque, conjecturée par GLICKSBERG a été établie par B. HOST et F. PARREAU [11].

THÉORÈME 1.- Soit $\mu \in M$. Si $\mu * L^1$ est fermé, il existe une mesure idempotente $\eta \in M$ telle que $\mu * L^1 = \eta * L^1$ et μ est la convoluée de la mesure η et d'une mesure inversible.

2.3. Dans ses premiers travaux sur le sujet, GLICKSBERG établit par des méthodes classiques, une série de résultats que l'on peut résumer comme suit.

PROPOSITION 1.- Soient $\mu \in M$ et Λ son spectre de Fourier.

a) $\mu * L^1$ est fermé si et seulement si $\mu * M$ est fermé.

b) Si $\mu * L^1$ est fermé, il existe $d > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq d$ si $\gamma \in \Lambda$ *.

c) Si $\mu * L^1$ est fermé, $\mu * L^1 = L^1_\Lambda$ et $\mu * M = M_\Lambda$.

Remarques.

2.4. D'après la proposition 1, pour établir le théorème 1, il suffira de prouver l'existence d'une mesure idempotente η ayant le même spectre de Fourier que μ . En effet alors, d'après la prop. 1 (c), il existe $\nu \in M$ telle que $\eta = \mu * \nu$.

* (Dans la suite, on prend $d = 1$.)

Soit $\sigma = \mu + (\delta - \eta)$. Alors σ est inversible car $\sigma * (\nu * \eta + \delta - \eta) = \delta$ et $\mu = \eta * \sigma$.

2.5. D'après la prop. 1 (a), le théorème 1 caractérise du même coup les idéaux principaux fermés de M . On obtient la même caractérisation des idéaux fermés de type fini [11].

2.6. La proposition 1 (b) met en évidence une classe de mesures remarquables que nous appellerons quasi-idempotentes :

(2.6.1) DÉFINITION.- Une mesure $\mu \in M(G)$ est quasi-idempotente si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1$ ou $\hat{\mu}(\gamma) = 0$.

Les mesures quasi-idempotentes jouent un rôle privilégié dans l'étude et la classification des espaces de fonctions invariants par translation, comme le montrent les récents travaux de S. KWAPIEN et A. PELCZYNSKI (voir en particulier [12] où le th. 1 est reformulé dans ce contexte).

2.7. La preuve du théorème 1 se décompose en deux parties :

a) Donner un critère qui permette de déterminer si une mesure quasi-idempotente a le même spectre de Fourier qu'une mesure idempotente. Ce sera le "lemme du $|\chi|^2$ " établi en (6). Ceci est un résultat concernant l'algèbre M , indépendamment du problème " $\mu * L^1$ fermé ?".

b) Appliquer ce critère dans l'hypothèse où $\mu * L^1$ est fermé ; ce sera l'objet de (7).

3. Le calcul sur les caractères de M

3.1. Les "caractères généralisés" de ŠREIDER

Pour chaque $\mu \in M$, la restriction d'un caractère $\chi \in \Delta$, à $L^1(\mu)$, définit un élément χ_μ de $L^\infty(\mu)$. Le caractère χ peut être décrit par la famille $(\chi_\mu)_{\mu \in M}$ qui vérifie les conditions suivantes :

(3.1.1) $\chi_\nu = \chi_\mu$ ν-pp si $\nu << \mu$

(3.1.2) $\chi_{\mu*\nu}(xy) = \chi_\mu(x)\chi_\nu(y)$ $\mu \otimes \nu$-pp

(3.1.3) $\sup\limits_{\mu \in M} \|\chi_\mu\|_{L^\infty(\mu)} = 1$

et ces conditions sont suffisantes pour qu'une famille $(\chi_\mu)_{\mu \in M}$ de fonctions de $L^\infty(\mu)$ définisse un caractère. Tout ceci revient à se donner le dual de $M(G)$ comme limite projective d'espaces $L^\infty(\mu)$. Cette description de Δ mettait l'accent sur les fonctions χ_μ dans l'espoir d'exploiter la propriété (3.1.2) qui généralise la relation fonctionnelle des caractères de groupe. On ne va pas très loin dans cette direction. Néanmoins la description de Šreider reste utile. D'abord, c'est, comme on va voir, la façon la plus élémentaire d'introduire le calcul sur les caractères de M . De plus si on "localise" un problème "au-dessus d'une mesure μ " c'est-à-dire dans un espace $L^1(\mu)$, l'ensemble des χ_μ , $(\chi \in \Delta)$, s'introduit naturellement, on le notera $\Delta(\mu)$.

3.2. Le semi-groupe Δ

(3.2.1) Si $\gamma \in \Gamma$, $\mu \in M$ et $\gamma\mu$ est le produit usuel de la fonction γ par la mesure μ , on a

$$\gamma(\mu * \nu) = (\gamma\mu) * (\gamma\mu) .$$

Ainsi Γ opère sur l'algèbre M . On étend cette opération en une opération de Δ sur l'algèbre M , en définissant $\chi\mu$ pour $\chi \in \Delta$, par

$$\widehat{\chi\mu}(\gamma) = \widehat{\gamma\mu}(\chi) \qquad\qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ou tout simplement en posant, pour tout $\mu \in M$,

$$\chi\mu = \chi_\mu \mu .$$

(3.2.2) On structure Δ en semi-groupe commutatif par le produit des opérateurs, qui est tel que, pour tout $\mu \in M$,

$$\widehat{\chi\mu}(\varphi) = \hat{\mu}(\chi\varphi) = \widehat{\varphi\mu}(\chi)$$

$$(\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \varphi_\mu$$

(3.2.3) On définit l'ensemble Δ_+ des éléments positifs de Δ , et un ordre sur Δ_+ , en écrivant

$$0 \leq \chi \leq \varphi$$

si et seulement si, pour toute mesure positive $\mu \in M$,

$$0 \leq \hat{\mu}(\chi) \leq \hat{\bar{\mu}}(\varphi)$$

ou, de façon équivalente, pour toute mesure $\mu \in M$,

$$0 \leq \chi_\mu \leq \varphi_\mu .$$

(3.2.4) On définit une conjugaison sur Δ par $\bar{\chi}\mu = \overline{\chi\bar{\mu}}$ ou encore $\bar{\chi}_\mu = \chi_{\bar{\mu}}$ où $\mu \in M$.

(3.2.5) Enfin le module d'un caractère se définit le plus simplement par

$$|\chi|_\mu = |\chi_\mu| \qquad\qquad (\mu \in M) .$$

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbf{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$, on peut définir $|\chi|^z$ de la même manière par

$$|\chi|^z_\mu = |\chi_\mu|^z .$$

Dans chaque cas, la façon la plus élémentaire de montrer qu'on obtient bien un caractère est encore de vérifier les propriétés (3.1.1.) (3.1.2) (3.1.3). On peut aussi introduire sur $M(G)'$ une structure de C^*-algèbre héritée des C^*-algèbres $L^\infty(\mu)$ $(\mu \in M)$, et développer un calcul fonctionnel dans cette C^*-algèbre, ou mieux, dans la sous C^*-algèbre engendrée par Δ , que l'on peut représenter comme espace de fonctions continues sur son spectre. C'est le point de vue de J. L. TAYLOR, qui conduirait dans le cas de $M(G)$ à d'inutiles complications.

3.3. Topologies forte et faible sur Δ

(3.3.1) On appellera topologie faible sur Δ , la topologie de Gelfand, c'est la plus faible qui rende continue les projections $\chi \longmapsto \chi_\mu$ de Δ dans $L^\infty(\mu)$ muni de la topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$.

(3.3.2) La topologie forte sur Δ est la topologie simple forte d'opérateur de Δ sur M . Elle induit par restriction, sur chaque $\Delta(\mu)$, la topologie forte de $L^1(\mu)$.

Dans la suite, lorsqu'on ne précise pas, il s'agit toujours de la topologie faible.

(3.3.3) Pour la topologie faible : Δ est compact ainsi que Δ_+ , et plus généralement, si φ , $\psi \in \Delta_+$, l'ensemble des $\chi \in \Delta_+$ tels que $\varphi \leq \chi \leq \psi$; la multiplication de Δ est séparément continue ; la conjugaison est continue mais l'application $\chi \longmapsto |\chi|$ ne l'est pas.

(3.3.4) Pour la topologie forte : Δ est un semi-groupe topologique et l'application $\chi \longmapsto |\chi|$ devient continue.

Les propriétés des topologies faible et forte sont des propriétés "locales" : elles sont vérifiées dans chaque $\Delta(\mu)$, $(\mu \in M)$. Les résultats suivants dont on fait un grand usage dans la suite, sont en fait des propriétés, faciles à établir, de l'espace $L^\infty(\mu)$, lorsqu'on le munit de la topologie faible $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ d'une part, et de la topologie induite par la topologie forte de $L^1(\mu)$ d'autre part. On peut les énoncer dans Δ ou dans un $\Delta(\mu)$ particulier.

χ_α désigne une suite généralisée d'éléments de Δ ou de $\Delta(\mu)$.

PROPOSITION 2.- a) Si χ_α converge faiblement et $|\chi_\alpha| \leq \varphi$

$$|\lim \chi_\alpha| \leq \varphi \ ;$$

b) Si χ_α et $|\chi_\alpha|$ convergent faiblement,

$$|\lim \chi_\alpha| \leq \lim |\chi_\alpha| \ .$$

PROPOSITION 3.- La convergence faible de χ_α implique la convergence forte si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

a) $|\chi_\alpha| \leq |\lim \chi_\alpha|$

b) $0 \leq \lim \chi_\alpha \leq \chi_\alpha$.

(3.3.5) Remarque.- Si $\varphi \in \Delta_+$, les topologies faible et forte coïncident sur l'ensemble des $\chi \in \Delta$ tels que $|\chi| = \varphi$. Ceci résulte de la prop. 3 (a).

PROPOSITION 4.- Toute partie fortement fermée non vide de Δ_+ admet un élément minimal.

3.4. Caractères idempotents

Les caractères positifs h tels que $h^2 = h$ jouent un rôle important dans la théorie. Il leur correspond une décomposition de M en somme directe de la sous-algèbre hM et de l'idéal des mesures μ telles que $h\mu = 0$.

(3.4.1) Soit $\chi \in \Delta$. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit $|\chi|^\alpha \in \Delta_+$, (3.2.5). Les caractères

$$|\chi|^0 = \lim_{\alpha \to 0} |\chi|^\alpha \qquad \text{et} \qquad |\chi|^\infty = \lim_{\alpha \to \infty} |\chi|^\alpha$$

sont des caractères idempotents tels que

$$|\chi|^\infty \leq |\chi| \leq |\chi|^0 .$$

3.5. Les caractères idempotents h_τ

Désignons par G_τ le groupe G muni d'une topologie τ de groupe localement compact, plus fine que la topologie initiale. $M(G_\tau)$ s'identifie à la sous-algèbre de $M(G)$, constituée des mesures régulières pour la topologie τ . L'ensemble des mesures $\mu \in M(G)$ étrangères à $M(G_\tau)$, c'est-à-dire telles que $|\mu|(K) = 0$ pour tout compact K de la topologie τ , constituent un idéal. Toute mesure $\mu \in M(G)$ admet une décomposition unique

$$\mu = \mu_\tau + (\mu - \mu_\tau) ,$$

avec $\mu_\tau \in M(G_\tau)$ et $(\mu - \mu_\tau) \perp M(G_\tau)$. La projection $\mu \longmapsto \mu_\tau$ est un homomorphisme d'algèbres. On désigne par h_τ le caractère de $M(G)$ défini par

$$\hat{\mu}(h_\tau) = \int d\mu_\tau \qquad (\mu \in M) ,$$

ou encore

$$\mu_\tau = h_\tau \mu .$$

Il est clair que $h_\tau^2 = h_\tau$.

Remarques.

(3.5.1) Dans la suite, on pourrait, si on voulait, se limiter à considérer les topologies τ définies de la manière suivante : A tout sous-groupe compact H de G, il correspond une topologie τ_H unique, plus fine que la topologie initiale, telle que H soit compact ouvert dans G_{τ_H}. Si H n'était pas ouvert pour la topologie initiale, on obtient une topologie strictement plus fine. L'idéal $M(G_{\tau_H})^{\perp}$ comprend les mesures $\mu \in M(G)$ telles que $|\mu|(xH) = 0$ pour tout $x \in G$. Dans toutes les questions relatives aux mesures idempotentes et quasi-idempotentes, ce sont les topologies τ_H qui interviennent. On pourra le vérifier a posteriori dans les résultats. Mais on ne s' imposera aucune restriction sur les topologies τ dans les démonstrations.

(3.5.2) Si h_d est l'idempotent correspondant à la topologie discrète, pour tout caractère $\chi \in \Delta$,

$$h_d \leq |\chi| \leq 1$$

car, pour tout $x \in G$, $\widehat{\delta_x}(|\chi|) = |\widehat{\delta_x}(\chi)| = 1$.

(3.5.3) Tout caractère fort est de module 1. Mais inversement tout caractère de module 1 est un caractère fort, puisqu'il ne s'annule pas sur l'idéal $L^1(G)$. Γ est donc exactement le groupe des caractères de module 1.

Plus généralement, les caractères de module h_τ constituent un groupe d'unité h_τ, qui s'identifie, de la même manière, avec le dual de G_τ. Sur ce groupe, la topologie forte coïncide avec la topologie faible et avec la topologie de dual.

4. Le semi-groupe $\bar{\Gamma}$

4.1. Dans les problèmes que nous envisageons ici, il n'est pas nécessaire de considérer tout le spectre Δ, mais seulement l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ dans Δ pour la topologie faible. $\bar{\Gamma}$ est un sous-semi-groupe de Δ stable par conjugaison. Le calcul sur les caractères de $\bar{\Gamma}$ ou de Δ est le même, à ceci près que, si $\chi \in \bar{\Gamma}$, on n'a pas en général $|\chi| \in \bar{\Gamma}$, mais on a toujours $|\chi|^2 = \chi\bar{\chi} \in \bar{\Gamma}$.

On notera $\bar{\Gamma}_+ = \bar{\Gamma} \cap \Delta_+$. Pour toute mesure $\mu \in M$, on note $\bar{\Gamma}(\mu)$ l'ensemble des χ_μ avec $\chi \in \bar{\Gamma}$; c'est aussi l'adhérence pour la topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ du groupe $\Gamma(\mu)$ des γ_μ, avec $\gamma \in \Gamma$. $\bar{\Gamma}_+(\mu)$ est l'ensemble des éléments positifs de $\bar{\Gamma}(\mu)$.

4.2. Les idempotents critiques de $\bar{\Gamma}$

Soit un caractère idempotent $h \in \bar{\Gamma}$. Les caractères $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| = h$

constituent un groupe d'unité h, qu'on note Γ_h. Sur Γ_h les topologies forte et faible coïncident (3.3.5). Γ_h est donc un groupe topologique.

(4.2.1) DÉFINITION.- Un idempotent $h \in \bar{\Gamma}_+$ est <u>critique</u> dans $\bar{\Gamma}$ s'il n'est pas adhérent aux caractères de $\bar{\Gamma}_+$ strictement inférieurs. (Dans cette définition on peut prendre indifféremment la topologie faible ou la topologie forte d'après prop. 3 (a).)

Taylor donne exactement la même définition d'idempotent critique, mais dans Δ au lieu de $\bar{\Gamma}$.

L'ensemble des $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| \leq h$ est faiblement fermé dans $\bar{\Gamma}$ (prop. 2 (a)). Si h est critique, il en est de même de l'ensemble des $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| < h$, car si χ_α convergeait faiblement vers χ avec $|\chi_\alpha| < h$ et $|\chi| = h$, la convergence serait forte (prop. 3 (a)) et $|\chi_\alpha|^2$ tendrait aussi vers $|\chi|^2 = h$ avec $|\chi_\alpha|^2 \in \bar{\Gamma}_+$ et $|\chi_\alpha|^2 < h$ ce qui contredirait le fait que h soit critique. Ainsi Γ_h est ouvert dans le compact $|\chi| \leq h$. Γ_h est un groupe topologique localement compact. En fait on peut identifier Γ_h avec le dual d'un groupe G_τ.

THÉORÈME 2.- Si h est un idempotent critique dans $\bar{\Gamma}$, $h = h_\tau$ pour une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale.

On peut résumer l'argument comme suit (voir [11] [14] pour plus de détails) :

L'application $\gamma \longmapsto h\gamma$ est un homomorphisme d'image dense de Γ dans Γ_h. G s'identifie algébriquement au dual de Γ_h par le couplage $\widehat{\delta_x}(\chi)$. La topologie τ de dual, ainsi définie est plus fine que la topologie initiale. Γ_h étant ainsi identifié au dual de G_τ, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\mu \in M(G_\tau)$, dans la dualité (G_τ, Γ_h), coïncide avec $\hat{\mu}$ sur Γ_h. On montre que, pour $\mu \in M$,

$$\widehat{h\mu}(\chi) = \hat{\mu}(h\chi) = \hat{\mu}(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h)$$

est une transformée de Fourier-Stieltjes sur Γ_h, ce qui prouve que $h\mu \in M(G_\tau)$.

On peut montrer que l'on obtient ainsi tous les idempotents h_τ définis en (3.5) ce qui est équivalent à dire que tous les idempotents h_τ sont dans $\bar{\Gamma}$. Mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat [13] [14].

5. Mesures idempotentes

5.1. Dans la suite nous ferons un usage constant des propriétés suivantes, qu'on énonce sous leur forme "calculatoire" :

PROPOSITION 5.- Soit $\eta \in M$, idempotente ou, plus généralement telle que $\hat{\eta}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ $(\gamma \in \Gamma)$.

a) Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$, $|\chi|^2\eta = |\chi|\eta$ (ou encore $|\chi_\eta|^2 = |\chi_\eta|$).

b) Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$ tel que $|\chi|\eta = \eta$, il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que $\chi\eta = \gamma\eta$ (ou encore si $|\chi_\eta| = 1$, il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que $\chi_\eta = \gamma_\eta$).

On fait les remarques suivantes :

(5.1.1) La propriété $\hat{\eta}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ $(\gamma \in \Gamma)$ passe à la limite dans $\bar{\Gamma}$. Si $\chi \in \bar{\Gamma}$, $\widehat{\chi\eta}(\gamma) = \hat{\eta}(\chi\gamma) \in \mathbb{Z}$, $(\gamma \in \Gamma)$, et $\chi\eta$ a la même propriété que η .

(5.1.2) La topologie forte de $\bar{\Gamma}(\eta)$ est discrète. En effet, si χ , $\chi' \in \bar{\Gamma}$ sont tels que $\chi\eta \neq \chi'\eta$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\widehat{\chi\eta}(\gamma) \neq \widehat{\chi'\eta}(\gamma)$ et

$$\|\chi\eta - \chi'\eta\| \geq |\widehat{\chi\eta}(\gamma) - \widehat{\chi'\eta}(\gamma)| \geq 1 .$$

(5.1.3) Toute suite φ_j décroissante dans $\bar{\Gamma}_+(\eta)$ est stationnaire. En effet, si on a $\varphi_j\eta \neq \varphi_{j+1}\eta$, $(1 \leq j \leq n)$, on peut écrire

$$\|\eta\| \geq \|\varphi_1\eta - \varphi_{n+1}\eta\| = \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\eta - \varphi_{j+1}\eta\| \geq n .$$

On voit donc que n est borné.

Démonstration de la proposition 5.

On déduit facilement (a) de (5.1.3) en considérant la suite $\varphi_j = |\chi_\eta|^{2j}$. Démontrons (b) : $\Gamma(\eta)$ est faiblement dense dans l'ensemble $\bar{\Gamma}_1(\eta)$ des éléments de $\bar{\Gamma}(\eta)$ de module 1 , sur lequel la topologie faible coïncide avec la topologie forte discrète, d'après la remarque (3.3.5). Donc $\bar{\Gamma}_1(\eta) = \Gamma(\eta)$.

(5.1.4) Une autre conséquence évidente de (5.1.3) est l'existence d'un élément minimal $\varphi_o > 0$ dans $\bar{\Gamma}_+(\eta)$ si $\eta \neq 0$. Alors 1 est le seul élément non nul dans $\bar{\Gamma}_+(\varphi_o\eta)$. A partir de là, on peut démontrer le théorème des idempotents de Cohen à titre d'exercice.

5.2. Le théorème des idempotents

Une mesure η telle que $\hat{\eta}(\gamma) \in \mathbb{Z}$, $(\gamma \in \Gamma)$, est dite élémentaire si elle est une somme finie

(5.2.1) $$\eta = \sum n_j \gamma_j m_H$$

avec $n_j \in \mathbb{Z}$, $\gamma_j \in \Gamma$, et H un sous-groupe compact de G , de mesure de Haar m_H .

PROPOSITION 6.- η est élémentaire si et seulement si 1 est le seul élément non nul de $\bar{\Gamma}_+(\eta)$.

Soit $\eta \in M$ telle que $\hat{\eta}(\gamma) \in \mathbb{Z}$, $(\gamma \in \Gamma)$. La mesure η est portée par le groupe compact H orthogonal du sous-groupe ouvert de Γ , $H^{\perp} = \{\gamma \mid \gamma\eta = \eta\}$ qui est le noyau de l'homomorphisme $\gamma \mapsto \gamma_\eta$ de Γ sur le groupe discret $\Gamma(\eta)$. $\hat{\eta}(\gamma)$ est constante sur les classes mod. $H^{\perp}$. Si 1 est le seul élément non nul de $\bar{\Gamma}_+(\eta)$, l'ensemble compact des $\chi_\eta \in \bar{\Gamma}(\eta)$ tels que $\hat{\eta}(\chi) \neq 0$ est contenu dans $\bar{\Gamma}_1(\eta) = \Gamma(\eta)$ discret ; il est donc fini. $\hat{\eta}(\gamma) = 0$ sauf sur un nombre fini de classes mod. $H^{\perp}$; donc η est de la forme (5.2.1).

Réciproquement, si η est élémentaire, η est dans l'idéal $L^1(m_H)$. Si $\chi_\eta \neq 0$, χ_η coïncide avec un caractère du groupe H , donc $|\chi_\eta| = 1$.

THÉORÈME 3.- Toute mesure $\eta \in M$ telle que $\hat{\eta}(\gamma) \in \mathbb{Z}$, $(\gamma \in \Gamma)$, est une somme finie de mesures élémentaires.

Dans le cas $\eta \neq 0$, il existe un élément minimal $\varphi_0 > 0$ dans $\bar{\Gamma}_+(\eta)$ et 1 est le seul élément non nul de $\bar{\Gamma}_+(\varphi_0\eta)$, (5.1.4). D'après la prop. 6, $\varphi_0\eta$ est élémentaire. Alors ou bien $\eta = \varphi_0\eta$, ou bien $\eta - \varphi_0\eta \neq 0$, a la même propriété que η et, comme $\varphi_0^2 = \varphi_0$, $\eta - \varphi_0\eta \perp \varphi_0\eta$. On aura

$$\|\eta - \varphi_0\eta\| = \|\eta\| - \|\varphi_0\eta\| \leq \|\eta\| - 1$$

et on pourra conclure par récurrence finie.

[On peut aussi écrire directement la décomposition de η en somme de mesures élémentaires en considérant tous les éléments de $\bar{\Gamma}_+(\eta)$ qui sont en nombre fini.]

6. Le lemme du $|\chi|^2$

6.1. Dans ce paragraphe nous supposons que nous avons affaire à une mesure μ quasi-idempotente (2.6) ou même, plus généralement à une mesure $\mu \in M$ pour laquelle il existe un réel ε , $0 \leq \varepsilon < 1$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait

(6.1.1) $\qquad |\mu(\gamma)| \geq 1 \qquad$ ou $\qquad |\hat{\mu}(\gamma)| \leq \varepsilon$.

Une telle mesure sera dite ε-quasi-idempotente.

On remarquera que la dichotomie (6.1.1) passe à la limite et reste valable pour les caractères de $\bar{\Gamma}$. De plus, si μ est ε-quasi-idempotente, il en est de même de $\chi\mu$, pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$, avec le même ε , puisque $\widehat{\chi\mu}(\gamma) = \hat{\mu}(\chi\gamma)$, $(\gamma \in \Gamma)$.

Pour deux mesures μ et ν du type précédent et un caractère $\chi \in \bar{\Gamma}$, nous écrirons

(6.1.2) $\qquad \hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\nu}(\chi)$

si les nombres $|\hat{\mu}(\chi)|$ et $|\hat{\nu}(\chi)|$ sont tous deux ≥ 1 , ou tous deux $\leq \varepsilon$. On écrira $\hat{\mu} \sim \hat{\nu}$ si la propriété (6.1.2) est vraie pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$, ou de façon équivalente, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

6.1.3. On remarquera utilement que, si $\hat{\mu} \sim \hat{\nu}$ et si $\varphi \in \bar{\Gamma}$, on a aussi $\widehat{\varphi\mu} \sim \widehat{\varphi\nu}$, car pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$,

$$\widehat{\varphi\mu}(\chi) = \hat{\mu}(\varphi\chi) \sim \hat{\nu}(\varphi\chi) = \widehat{\varphi\nu}(\chi) ,$$

(mais la réciproque n'est pas vraie).

6.2. THÉORÈME 4 (Lemme du $|\chi|^2$).- Soit μ une mesure ε-quasi-idempotente. Pour qu'il existe une mesure idempotente $\eta \in M$ telle que $\hat{\eta} \sim \hat{\mu}$ il suffit qu'on ait l'implication suivante, pour $\chi \in \bar{\Gamma}$ et η mesure idempotente de M : .

(6.2.1) $$(\widehat{|\chi|^2\mu} \sim \widehat{|\chi|^2\eta}) \Longrightarrow (\widehat{\chi\mu} \sim \widehat{\chi\eta}) .$$

<u>Démonstration</u>.

Nous ferons un usage constant de la proposition 5 et des autres remarques de (5).

a) Désignons par Λ l'ensemble des $\varphi \in \bar{\Gamma}_+$ pour lesquels il existe une mesure idempotente η telle que $\widehat{\varphi\mu} \sim \widehat{\varphi\eta}$. On notera η_φ la mesure idempotente $\varphi\eta$ qui est déterminée par la propriété

$$\widehat{\varphi\mu} \sim \hat{\eta}_\varphi$$

et vérifie de plus $\varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$. Pour φ , $\psi \in \Lambda$, nous pouvons écrire

$$\widehat{\varphi\eta_\psi}(\gamma) = \hat{\eta}_\psi(\varphi\gamma) \sim \widehat{\psi\mu}(\varphi\gamma) = \widehat{\varphi\psi\mu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

$$\widehat{\psi\eta_\varphi}(\gamma) = \hat{\eta}_\varphi(\psi\gamma) \sim \widehat{\varphi\mu}(\psi\gamma) = \widehat{\varphi\psi\mu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

et donc

(6.2.3) $$\varphi\eta_\psi = \psi\eta_\varphi .$$

La propriété (6.2.3) exprime que les mesures η_φ et η_ψ "se recollent", c'est-à-dire qu'il est possible de trouver une mesure η' avec $\hat{\eta}'(\gamma)$ à valeurs entières $(\gamma \in \Gamma)$, telle que $\eta_\varphi = \varphi\eta'$ et $\eta_\psi = \psi\eta'$. En l'occurrence il suffit de prendre

$$\eta' = \eta_\varphi + \eta_\psi - \psi\eta_\varphi .$$

Cette propriété de recollement s'étend à un nombre fini de mesures η_φ qui vérifient les relations (6.2.3).

b) Il s'agit de montrer que $1 \in \Lambda$. On vérifie sans difficulté, en utilisant les remarques de (5) que Λ est fortement ouvert et fermé. Dans le cas où $1 \notin \Lambda$, l'ensemble fortement fermé $\bar{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$ possède un élément minimal h (prop. 4). Si h est idempotent, il sera critique (4.2.1). Sinon on a $h^2 < h$ et $h^2 \in \Lambda$. Il existe une mesure idempotente η telle que $\widehat{h^2\mu} \sim \widehat{h^2\eta}$, et par (6.2.1) $\widehat{h\mu} \sim \widehat{h\eta}$, donc $h \in \Lambda$, ce qui fournit une contradiction.

c) On considère l'ensemble Λ_h des $\varphi \in \bar{\Gamma}_+$ tels que $\varphi < h$, qui est compact, puisque h est critique, et contenu dans Λ. On va voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de mesures η_φ correspondantes. Pour celà il suffit de vérifier que l'application $\varphi \longmapsto \eta_\varphi$ est localement constante dans Λ_h. En effet supposons que φ_α tend vers φ dans Λ_h. Alors φ_α tend fortement vers 1 dans $\bar{\Gamma}(\eta_\varphi)$ et d'après (5.1.2) on aura $\varphi_\alpha \eta_\varphi = \eta_\varphi$ pour α assez grand. Si on avait alors $\eta_{\varphi_\alpha} \neq \eta_\varphi$, on aurait aussi

$$\widehat{\varphi_\alpha \mu} \not\sim \widehat{\varphi_\alpha \eta_\varphi}$$

c'est-à-dire qu'il existerait $\gamma_\alpha \in \Gamma$ tel que

$$\hat{\mu}(\varphi_\alpha \gamma_\alpha) = \widehat{\varphi_\alpha \mu}(\gamma_\alpha) \not\sim \widehat{\varphi_\alpha \eta_\varphi}(\gamma_\alpha) = \hat{\eta}_\varphi(\varphi_\alpha \gamma_\alpha) .$$

A la limite, pour une valeur d'adhérence χ de $\varphi_\alpha \gamma_\alpha$,

$$\hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}_\varphi(\chi)$$

avec

$$|\chi| \leq \lim |\varphi_\alpha \gamma_{\alpha}| = \varphi .$$

Ceci est impossible car $|\chi|^2 \in \Lambda$ et, compte tenu de (6.2.3) qui s'écrit ici

$$\eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2 \eta_\varphi ,$$

on a la propriété

$$\widehat{|\chi|^2 \mu} \sim \widehat{|\chi|^2 \eta_\varphi}$$

qui implique, par (6.2.1)

$$\widehat{\chi\mu} \sim \widehat{\chi\eta_\varphi} .$$

d) Les mesures η_φ étant en nombre fini pour $\varphi < h$, se recollent comme on l'a indiqué précédemment et s'écrivent $\eta_\varphi = \varphi\eta'$, avec une même mesure η' telle que $\hat{\eta}'(\gamma) \in \mathbb{Z}$, $(\gamma \in \Gamma)$. L'ensemble K des caractères $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| \leq h$ et où $\hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}'(\chi)$, est un compact ouvert de $\bar{\Gamma}$, certainement contenu dans le groupe Γ_h des éléments de module h, car pour $|\chi| < h$, $|\chi|^2 \in \Lambda$ et

$$\widehat{|\chi|^2 \mu} \sim \hat{\eta}_{|\chi|^2} = \widehat{|\chi|^2 \eta'}$$

ce qui, toujours d'après (6.2.1) implique

$$\widehat{\chi\mu} \sim \widehat{\chi\eta'} .$$

Puisque h est critique, Γ_h s'identifie avec le dual d'un groupe G_T et on pourra corriger η' par une mesure $\eta'' \in L^1(G_T)$ telle que $\hat{\eta}''$ soit à valeurs entières et à support dans K, ceci de façon que

$$\widehat{\eta' + \eta''}(\chi) \sim \hat{\mu}(\chi)$$

pour tout χ tel que $|\chi| \leq h$. On sait qu'il existe une mesure idempotente η telle que

$$\hat{\eta} \sim \widehat{\eta' + \eta''} .$$

En particulier, on aura, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\widehat{h\mu}(\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma) \sim \hat{\eta}(h\gamma) = \widehat{h\eta}(\gamma)$$

ce qui prouve que $h \in \Lambda$, contrairement à la définition qui en a été donnée en b).

On a donc nécessairement $1 \in \Lambda$, ce qui termine la démonstration du théorème 4.

7. La solution du problème " $\mu * L^1$ fermé ?"

7.1. On suppose maintenant que $\mu * L^1$ est fermé, ce qui implique que μ est quasi-idempotente (prop. 1 (b)). Nous allons expliquer de façon résumée pourquoi μ vérifie alors l'hypothèse du " lemme du $|\chi|^2$ ". On se reportera à [11] pour les détails.

Indiquons d'abord comment on réduit le problème. Supposons $\widehat{|\chi|^2\mu} \sim \widehat{|\chi|^2\eta}$ pour un $\chi \in \bar{\Gamma}$ et une mesure idempotente η . Si H est le groupe support de la mesure idempotente $|\chi|^2\eta$, d'après la proposition 5, la projection de χ dans $\bar{\Gamma}(|\chi|^2\eta)$ est de module 1 et coïncide avec un caractère fort qu'on peut supposer égal à 1 (à une translation près sur χ et μ). Alors $\chi \in \overline{H^{\perp}}$ et $\widehat{|\chi|^2\eta}(\gamma) = \widehat{\chi\eta}(\gamma)$ est constante sur les classes mod. $H^{\perp}$. On peut transporter le problème dans G/H en vérifiant que la propriété " $\mu * L^1$ fermé" passe au quotient. On est ramené à prouver le théorème dans le cas où $H = \{1\}$. Il suffira donc de démontrer les implications :

$$(7.1.1) \qquad (\widehat{|\chi|^2\mu} \sim 0) \Longrightarrow (\widehat{\chi\mu} \sim 0)$$

$$(7.1.2) \qquad (\widehat{|\chi|^2\mu} \sim 1) \Longrightarrow (\widehat{\chi\mu} \sim 1) .$$

Dans le cas présent (7.1.1) est évident car $\widehat{|\chi|^2\mu} \sim 0$ signifie $|\chi|^2\mu = 0$, donc $\chi\mu = 0$. Reste à prouver (7.1.2) c'est-à-dire la proposition suivante.

PROPOSITION 7.- Soit $\mu \in M(G)$, telle que $\mu * L^1$ est fermé. Soit $\chi \in \bar{\Gamma}$. Si pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $|\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma)| \geq 1$, alors $|\hat{\mu}(\chi)| \geq 1$.

Nous n'entrerons pas dans tous les détails de la démonstration ; mais nous en donnerons les grandes lignes, dans le cas où G est compact métrisable.

7.2. Construction de produits de Riesz adaptés au problème

L'hypothèse

$$(7.2.1) \qquad |\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma)| \geq 1 \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

peut être exploitée de façon à construire des produits de Riesz ayant leur spectre de Fourier contenu dans celui de μ , et même un peu mieux, comme on va voir.

Donnons ici une brève description des produits de Riesz, en renvoyant à [8] [14] pour plus de détails.

Une suite $\Theta = (\theta_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de Γ est dite <u>dissociée</u> si, pour toute suite d'entiers $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ avec $|\varepsilon_j| \leq 2$, la relation

$$\prod_{1\leq j\leq n} \theta_j^{\varepsilon_j} = 1$$

est vérifiée si et seulement si $\theta_j^{\varepsilon_j} = 1$ pour tout j, $1 \leq j \leq n$. De toute partie infinie de Γ, on peut extraire une suite dissociée. Les éléments de Γ, qui s'écrivent

$$\gamma = \prod_{1\leq j\leq n} \theta_j^{\varepsilon_j}$$

avec des entiers ε_j tels que $|\varepsilon_j| \leq 1$ sont appelés les mots construits sur la suite Θ. L'ensemble des mots est noté $\Omega(\Theta)$. Pour tout réel α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on appelle produit de Riesz la mesure positive de norme 1 $\rho = \rho_\alpha$ définie comme limite vague sur G de la suite de mesures

(7.2.2) $$\prod_{1\leq j\leq n} (1 + \alpha(\theta_j + \bar{\theta}_j)).m \ .$$

Elle a pour spectre de Fourier $\Omega(\Theta)$. Nous utiliserons seulement le résultat suivant facile à démontrer [8] :

(7.2.3) si φ est un élément de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ adhérent à la suite θ_j, φ_ρ est une constante non nulle.

(7.2.4) Si on considère alors le caractère idempotent défini (3.4.1) par $h = |\varphi|^0$, il sera tel que $h_\rho = 1$. On aura aussi $h_m = 0$ puisque $\varphi_m = 0$.

G étant supposé compact métrisable, $\bar{\Gamma}(\mu)$ est métrisable. Le produit étant séparément continu dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, on peut toujours trouver une suite γ_n qui converge vers χ_μ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ et telle que $\bar{\gamma}_n\gamma_p$, $(p < n)$, converge vers $|\chi_\mu|^2$. Mais on choisit la suite γ_n de façon plus précise. A partir de (7.2.1) il est possible de construire γ_n par récurrence de telle sorte que, pour tout $n \geq 1$ et tout $p < n$,

(7.2.5) $$|\hat{\mu}(\gamma_n\bar{\gamma}_p\gamma)| \geq 1 \qquad \text{et} \qquad |\hat{\mu}(\bar{\gamma}_n\gamma_p\gamma)| \geq 1$$

pour tout γ s'écrivant

$$\gamma = \prod_{1\leq j<p} \gamma_j^{\varepsilon_j}$$

avec des entiers ε_j tels que $|\varepsilon_j| \leq 3$. Il ne coûte rien de supposer alors, quitte à passer encore à une sous-suite, que la suite $\Theta = (\theta_j)$ avec

$\theta_j = \overline{\gamma_{2j}}\,\gamma_{2j+1}$, est dissociée. Les conditions (7.2.5) assurent que, pour tout n , l'ensemble $\Omega(\Theta)$ correspondant est contenu dans le spectre de Fourier de $\gamma_n\mu$, à un nombre fini de termes près. Si on choisit $\rho_n = \rho_{\alpha_n}$, le produit de Riesz défini en (7.2.2), avec α_n assez petit, on pourra corriger ρ_n par un polynôme trigonométrique σ_n de norme $\|\sigma_n\| \le 1 + a$, avec a arbitrairement petit, de façon que $\rho'_n = \rho_n - \sigma_n$ ait son spectre de Fourier contenu dans celui de $\gamma_n\mu$.

Soit h le caractère idempotent construit comme en (7.2.4). Pour tout n , $h_{\rho_n} = 1$ et $\hat{\sigma}_n(h) = 0$ puisque $\sigma_n \in L^1$; donc

$$\widehat{\rho'_n}(h) = \hat{\rho}_n(h) = 1 \ .$$

Comme, d'autre part, $\varphi_\mu = |\chi_\mu|^2$ et $h\varphi = \varphi$,

$$h_\mu\, \chi_\mu = \chi_\mu \ .$$

7.3. Fin de la démonstration de la proposition 7

Supposons $\hat{\mu}(\chi) = 0$. Puisque $\mu * L^1$ est fermé, on a aussi $\mu * M$ fermé (prop. 1 (a)). Pour tout n , l'idéal $\gamma_n\mu * M = \gamma_n(\mu * M)$ est fermé et contient ρ'_n (prop. 1 (c)). La suite ρ'_n étant uniformément bornée en norme et la multiplication par γ_n étant une isométrie, il résulte du théorème de l'application ouverte, que l'on peut écrire

$$\rho'_n = \gamma_n\mu * \lambda_n$$

avec $\lambda_n \in M$ et $\|\lambda_n\| \le C$, où C est une constante.

Pour tout caractère $\varphi \in \Delta$, on aura

$$|\widehat{\rho'_n}(\varphi)| \ \le \ C|\hat{\mu}(\gamma_n\varphi)| \ .$$

En particulier, si on choisit pour φ le caractère h construit en (7.2) on aura, pour tout n ,

$$\widehat{\rho'_n}(h) = 1$$

tandis que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}(\gamma_n h) = \hat{\mu}(\chi h) = \hat{\mu}(\chi) = 0 \ ,$$

ce qui fournit une contradiction.

7.4. Dans le cas général, on construit les produits de Riesz ρ_n sur le groupe compact, orthogonal du stabilisateur de l'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ dans Γ .

7.5. La construction de produits de Riesz (tels qu'ils sont définis en (7.2) ou produits de Riesz généralisés) est une méthode extrèmement féconde dans beaucoup de problèmes sur l'algèbre M , [17], [18], [14]. C'est le principal outil dont on dispose pour construire des mesures μ dont on contrôle à la fois le spectre de Fourier et les valeurs des χ_μ , $(\chi \in \Delta)$.

8. Mesures quasi-idempotentes fortement continues

8.1. Soit $\tilde{\mu} \in M(G)$ une mesure ε-quasi-idempotente sur laquelle on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire. On notera $E(\mu)$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ où $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1$. On dira que μ est triviale si $E(\mu) = \emptyset$. En général μ ne vérifie pas la propriété (6.2.1), mais on peut établir le résultat suivant [15], [14]

THÉORÈME 5.- Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente non triviale de norme

(8.1.1) $$\|\mu\| \leq \frac{|\mathrm{Log}\ \varepsilon|}{\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})} - 2 ,$$

il existe une topologie τ de groupe localement compact sur G , plus fine que la topologie initiale, et une mesure idempotente non nulle $\eta \in L^1(G_\tau)$ telle que $\hat{\mu}_\tau \sim \hat{\eta}$.

Note. Dans le cas où on fait sur μ l'hypothèse plus forte : pour tout $\gamma \in \Gamma$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \varepsilon$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma) - 1| \leq \varepsilon$ (on dira alors que μ est ε-idempotente), on peut conclure avec la même condition de norme (8.1.1), en utilisant le "lemme du $|\chi|^2$ ", que μ peut s'écrire

$$\mu = \eta + \nu$$

avec η idempotente et $\nu \in M$, telle que $|\hat{\nu}(\gamma)| \leq \varepsilon$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ce résultat précise et généralise un résultat de K. DE LEEUW et Y. KATZNELSON établi pour $G = \mathbf{T}$, [16].

(8.1.2) DÉFINITION.- Une mesure $\mu \in M(G)$ est fortement continue si $\mu \perp M(G_\tau)$ pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G , strictement plus fine que la topologie initiale. (Dans le cas de $G = \mathbf{T}$, on retrouve la notion usuelle de mesure continue.)

Le théorème 5 admet le corollaire immédiat suivant :

THÉORÈME 6.- Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente et fortement continue, de norme

(8.1.3) $$\|\mu\| > \frac{|\mathrm{Log}\ \varepsilon|}{\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})} - 2 ,$$

l'ensemble $E(\mu)$ est compact.

Remarques.

(8.1.4) Les conditions (8.1.1) et (8.1.3) sont indépendantes du groupe G et ne sont pas loin d'être les meilleures possibles quel que soit G (mis à part les cas triviaux). En effet, si G est compact infini, on peut construire une mesure ε-quasi-idempotente fortement continue de norme $\|\mu\| \leq 2|\text{Log } \varepsilon| + 6$ et qui ne vérifie pas la conclusion du théorème 6, [15] [14].

(8.1.5) La remarque (3.5.1) s'applique ici et on peut formuler les résultats avec une définition un peu plus large de la continuité forte, qui ne fait intervenir que les topologies τ_H, avec H compact d'indice infini.

8.2. Plaçons-nous dans le cas : G compact. L'ensemble discret $E(\mu)$ lorsqu'il est infini, possède des propriétés "arithmétiques" assez fortes, en particulier la propriété suivante qui peut s'obtenir par le calcul des caractères, [14].

THÉORÈME 7 (G compact).- Soit $\mu \in M(G)$ ε-quasi-idempotente, fortement continue. Dès que $n+1 > 2\|\mu\| / 1-\varepsilon$, $E(\mu)$ ne contient aucun sous-ensemble de la forme $A_1 A_2 \ldots A_n$ où A_j désigne une partie infinie quelconque de Γ $(1 \leq j \leq n)$.

Le théorème 7 n'est en fait qu'une reformulation du théorème 8 qui concerne la divisibilité des caractères de $\bar{\Gamma}$.

THÉORÈME 8.- Soit $\mu \in M(G)$ ε-quasi-idempotente fortement continue. Dès que $n+1 > 2\|\mu\| / 1-\varepsilon$, aucun caractère φ adhérent à $E(\mu)$ dans $\bar{\Gamma}$, ne peut s'écrire $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ avec $\varphi_j \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ $(1 \leq j \leq n)$.

Le théorème 7 se déduit ainsi du théorème 8 : si l'on suppose $E(\mu) \supset A_1 \ldots A_n$ avec A_j infini $(1 \leq j \leq n)$, il suffit de prendre $\varphi_j \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ adhérent à A_j $(1 \leq j \leq n)$. Le caractère $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ est alors adhérent à $A_1 \ldots A_n$.

Indiquons comment on obtient le théorème 7 :

Pour tout $\varphi \in \bar{\Gamma}$, désignons par Λ_φ l'ensemble des caractères $\psi \in \bar{\Gamma}_+$ tels que

(8.2.1) $$\widehat{\psi\varphi\mu} \sim \widehat{\varphi\mu} .$$

Λ_φ est stable par multiplication (6.1.3). Λ_φ est fortement ouvert et fermé dans $\bar{\Gamma}_+$ car la propriété (8.2.1) passe à la limite forte, ainsi que la propriété contraire. Λ_φ possède donc un élément minimal h idempotent critique dans $\bar{\Gamma}$. Si $h \neq 1$, $h = h_\tau$ pour une topologie τ strictement plus fine que la topologie initiale. On aura donc

$$0 = \widehat{\varphi h \mu} \sim \widehat{\varphi\mu} ,$$

c'est-à-dire $E(\varphi\mu) = \emptyset$. En conclusion : si $E(\varphi\mu) \neq \emptyset$, $\Lambda_\varphi = \{1\}$ et pour tout $\psi \neq 1$,

$$\widehat{\psi\varphi\mu} \nsim \widehat{\varphi\mu}$$

et

$$\|\varphi\mu - \psi\varphi\mu\| \geq 1 - \varepsilon .$$

Soient $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in \bar{\Gamma}_+$ avec $\varphi_j \neq 1$ $(1 \leq j \leq n+1)$. Si pour tout k , $0 \leq k \leq n$, $E(\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_k \mu) \neq \emptyset$, nous pouvons écrire

$$\|\mu\| \geq \|\mu - \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n+1} \mu\| = \sum_{k=0}^{n} \|\varphi_0 \dots \varphi_k\mu - \varphi_0 \dots \varphi_{k+1}\mu\| \geq (n+1)(1-\varepsilon) .$$

Donc, si $n + 1 > \|\mu\| / _{1-\varepsilon}$, on a nécessairement

$$\widehat{\varphi_0 \dots \varphi_k\mu} \sim 0$$

pour un $k \leq n$, et a fortiori,

$$\widehat{\varphi_0 \dots \varphi_n\mu} \sim 0$$

$$|\hat{\mu}(\varphi_1 \dots \varphi_n)| \leq \varepsilon .$$

Pour $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, non nécessairement positifs, on se ramène au cas précédent par la remarque suivante : si $\varphi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, on peut écrire

$$\|\varphi\mu - \psi\varphi\mu\| \geq \int (1 - |\psi_\mu|) d|\varphi\mu| \geq \frac{1}{2} \int (1 - |\psi_\mu|^2) d|\varphi\mu|$$
$$\|\varphi\mu - \psi\varphi\mu\| \geq \frac{1}{2} \|\varphi\mu - |\psi|^2\varphi\mu\| ,$$

et raisonner comme précédemment en remplaçant ψ par $|\psi|^2 \neq 1$.

B. HOST et F. PARREAU démontrent aussi par une méthode élémentaire astucieuse la propriété suivante, qui s'étend à tout groupe G compact connexe en remplaçant "continue" par "fortement continue" [19].

THÉORÈME 9.- Soit $\mu \in M(\mathbf{T})$, ε-quasi-idempotente continue. La longueur des progressions arithmétiques contenues dans $E(\mu)$ est bornée par un entier $N = N(\varepsilon , \|\mu\|)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. RUDIN - Fourier Analysis on groups, Interscience Tracts 12.

[2] Yu. A. ŠREIDER - The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Mat. Sbornik N.S., 27(69), (1950), 297-318. [A.M.S. Transl. 81(1953).]

[3] Yu. A. ŠREIDER - On an example of a generalized character, Mat. Sbornik N.S., 29(71), (1951), 419-426.

[4] E. HEWITT and S. KAKUTANI - A class of multiplicative linear functionals on the measure algebra of a locally compact abelian group, Ill. J. Math., 4(1960), 553-574.

[5] E. HEWITT and S. KAKUTANI - Some multiplicative linear functionals on $M(G)$, Trans. Amer. Math. Soc., 134(1968), 289-296.

[6] J. L. TAYLOR - Measure Algebras, C.B.M.S., 16(1973).

[7] G. BROWN and W. MORAN - Bernoulli Measure Algebras, Acta Math., 132(1974), 77-109.

[8] G. BROWN - Riesz products and generalized characters, Proc. London Math. Soc. (3), 30(1975), 209-238.

[9] I. GLICKSBERG - When is $\mu * L^1$ closed ? Trans. A.M.S., 160(1971).

[10] I. GLICKSBERG - Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value. Conference on Harmonic Analysis, Maryland (1971), Lecture Notes in Math. 266, Springer-Verlag.

[11] B. HOST et F. PARREAU - Sur un problème de Glicksberg : les idéaux fermés de type fini de $M(G)$, Ann. Inst. Fourier, t. 38, fasc. 3 (1978), 143-164.

[12] S. KWAPIEN and PELCZYNSKI - Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups (à paraître).

[13] C. F. DUNKL and D. E. RAMIREZ - Bounded projections on Fourier-Stieltjes transforms, Proc. A.M.S., n° 1 (1972).

[14] Séminaire sur l'Analyse Harmonique des mesures (Villetaneuse 1978), à paraître.

[15] J.-F. MÉLA - Mesures ε-idempotentes de norme bornée, à paraître.

[16] K. DE LEEUW and S. KATZNELSON - The two sides of a Fourier-Stieltjes transform and almost idempotent measures, Israel J. Math., (1970), 213-229.

[17] C. GRAHAM, B. HOST, F. PARREAU - Sur les supports des transformées de Fourier-Stieltjes, à paraître.

[18] C. GRAHAM, B. HOST, F. PARREAU - The interior of the Šilov boundary of $M(G)$ is trivial, à paraître.

[19] B. HOST, F. PARREAU - Mesures presque-idempotentes et progressives arithmétiques, C.R. Acad. Sc., Série A (1978), t. 287, 629-631.