JEAN-LOUIS LODAY

Homotopie des espaces de concordances

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 516, p. 187-205
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__187_0>

Séminaire BOURBAKI 516-01
30e année, 1977/78, n° 516 Février 1978

HOMOTOPIE DES ESPACES DE CONCORDANCES

[d'après F. WALDHAUSEN]

par Jean-Louis LODAY

§ 1. Introduction et résultats

Soient M une variété différentielle compacte et $\mathrm{Diff}(M)$ son groupe de difféomorphismes (muni de la topologie C^∞). Le calcul des groupes d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ se scinde, lorsque la dimension de M est grande, en deux problèmes. L'un consiste à calculer des groupes de chirurgie, l'autre à calculer des groupes d'homotopie d'espaces de concordances. Par définition l'espace des concordances (ou pseudo-isotopies) $C_{\mathrm{Diff}}(M)$ de la variété M est le sous-espace de $\mathrm{Diff}(M \times I)$ formé des difféomorphismes dont la restriction à $M \times 0 \cup \partial M \times I$ est l'identité.

Encore récemment, on n'avait que peu de résultats sur l'homotopie de cet espace : dans [6], Cerf a montré que $\pi_0(C_{\mathrm{Diff}}(M)) = 0$ lorsque M est simplement connexe et $\dim M \geq 5$. Puis, Hatcher et Wagoner [12], Volodine [23] et K. Igusa [14] ont généralisé les techniques de Cerf pour calculer $\pi_i(C_{\mathrm{Diff}}(M))$ lorsque $i = 0$ ou 1 en termes de K-groupes. On va montrer comment, par des techniques de géométrie et de topologie algébrique, on peut calculer certains groupes d'homotopie de $C_{\mathrm{Diff}}(M)$ à l'aide de la K-théorie algébrique des anneaux de groupes. Dans certains cas, les calculs peuvent être menés jusqu'à leur terme, par exemple :

__Soit__ D^n __la boule de dimension__ n . __Si__ $0 \leq i < \frac{n-25}{6}$, __on a__

$$\pi_i(C_{\mathrm{Diff}}(D^n)) \otimes \mathbb{Q} = K_{i+2}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \underline{\text{si}} \quad i = 3, 7, \dots 4k-1, \dots \\ 0 & \underline{\text{sinon}}. \end{cases}$$

Ce passage des groupes de concordances à la K-théorie algébrique se fait en plusieurs étapes :

a) Par stabilisation sur la dimension de la variété, Hatcher [10] et Burghelea-Lashof [30] ramènent l'étude de C_{Diff} à celle d'un foncteur d'homotopie Wh_{Diff} de la catégorie des CW-complexes dans celle des espaces de lacets infinis. Le lien entre ces deux foncteurs est donné par le théorème de stabilité suivant : pour toute variété différentielle M compacte et connexe, on a un isomorphisme

$$\pi_i(C_{\mathrm{Diff}}(M)) \xrightarrow{\approx} \pi_{i+2}(Wh_{\mathrm{Diff}}(M)) \qquad \text{lorsque } 0 \leq i < \frac{n-25}{6} .$$

On a des définitions analogues dans le cas semi-linéaire (= PL) et on note C_{PL}

et Wh_{PL} les foncteurs correspondants.

b) On applique les méthodes récentes de topologie algébrique à l'espace $Wh_{PL}(X)$ pour construire un espace de lacets infini $A(X)$ appelé K-théorie algébrique de l'espace X (Waldhausen [26]). Cet espace est une "approximation" de $Wh_{PL}(X)$ au sens suivant :

THÉORÈME 1.- <u>Il existe une application naturelle</u> $A(X) \to Wh_{PL}(X)$ <u>dont la fibre homotopique est une théorie d'homologie généralisée</u>.

Ceci signifie que les foncteurs $X \mapsto \pi_i$ (fibre) satisfont aux axiomes de Eilenberg-Steenrod, excepté à l'axiome de dimension.

c) Les résultats dans le cadre différentiable sont obtenus en comparant les foncteurs Wh_{PL} et Wh_{Diff} (Morlet, Burghelea-Lashof [4,5,18]). Le théorème 1 entraîne :

THÉORÈME 2.- <u>La fibre homotopique de l'application de stabilisation</u>

$$A(X) \longrightarrow A^S(X) = \varinjlim_n \Omega^n \widetilde{A}(\Sigma^n(X \cup pt))$$

<u>a même type d'homotopie que</u> $Wh_{Diff}(X)$.

Ici Ω désigne l'espace des lacets, Σ la suspension et $\widetilde{A}(X)$ la fibre de $A(X) \to A(pt)$.

d) Enfin, on compare l'espace $A(X)$ à la K-théorie algébrique de Quillen. L'intérêt de l'espace $A(X)$ par rapport à l'espace $Wh_{PL}(X)$ réside en partie dans le résultat suivant :

THÉORÈME 3 (cf. [25]).- <u>Soient</u> π <u>un groupe discret et</u> $B\pi$ <u>son classifiant</u>. <u>On a des isomorphismes</u>

$$\pi_i(A(B\pi)) \otimes \mathbb{Q} \approx K_i(\mathbb{Z}[\pi]) \otimes \mathbb{Q}$$

<u>et</u>

$$\pi_i(A^S(B\pi)) \otimes \mathbb{Q} \approx K_i^S(\mathbb{Z}[\pi]) \otimes \mathbb{Q} , \qquad i \geq 1 .$$

Dans ces expressions $K_i(\Lambda)$ (resp. $K_i^S(\Lambda)$) désigne la K-théorie algébrique de Quillen (resp. stabilisée en un sens convenable) de l'anneau Λ .

Ainsi tout calcul sur la K-théorie des anneaux de groupes fournit des renseignements sur les groupes d'homotopie des espaces de concordances. Le cas particulier de $M = D^n$ énoncé ci-dessus se déduit immédiatement du calcul des groupes $K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ (Borel [2]) et $K_i^S(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ (Farrell et Hsiang [8]).

Les étapes géométriques a) et c) sont rapidement passées en revue dans le § 2. L'essentiel de l'article est consacré au travail de Waldhausen qui a été annoncé dans [25] et qui paraîtra dans [26]. Dans le § 3, on trouve une version originale de la "bar-construction" menant à la définition de l'espace $A(X)$. Puis, on énonce les différents lemmes techniques nécessaires à la démonstration du théorème 1 et on effectue la comparaison avec la K-théorie algébrique. Enfin, on calcule $\pi_i(C_{Diff}(D^n)) \otimes \mathbb{Q}$. Le § 4 contient quelques démonstrations en particulier celle du "théorème d'additivité" (voir 3.1). Les applications aux groupes de difféomorphismes sont énoncées au § 5.

Je remercie Waldhausen pour ses explications et pour avoir mis son manuscrit à ma disposition.

§ 2. Des résultats de Waldhausen aux espaces de concordances

2.1. Homotopie simple supérieure

Une application simple $f : X \longrightarrow Y$ entre deux polyèdres X et Y est, par définition, une application semi-linéaire (= PL) telle que $f^{-1}(y)$ soit contractile (et non vide) pour tout point $y \in Y$. Cette notion a été introduite par M. M. Cohen [7] (sous le nom de "contractible mapping"). Cohen montre qu'une application simple est une équivalence d'homotopie simple au sens de J.H.C. Whitehead [28]. Les applications simples sont stables par composition, cette propriété permet de définir pour tout polyèdre connexe fini X une catégorie $\underline{\underline{C}}(X)$ de la façon suivante. Les objets de $\underline{\underline{C}}(X)$ sont les polyèdres finis Y qui contiennent X comme rétracte par déformation. Les morphismes de $\underline{\underline{C}}(X)$ sont les applications simples dont les restrictions à X sont l'identité. Le résultat principal de [10] est une version paramétrée du théorème du h-cobordisme :

PROPOSITION 1 (Hatcher).- *Soit M^n une variété PL compacte connexe de dimension n $(n \geq 5)$. Il existe une application $C_{PL}(M^n) \longrightarrow \Omega|\underline{\underline{C}}(M^n)|$ qui est k-connexe lorsque $n \geq 3k + 8$.*

On a désigné par $|\underline{\underline{C}}(M)|$ le classifiant de la catégorie $\underline{\underline{C}}(M)$ c'est-à-dire la réalisation géométrique de son nerf [22].

Exercice.- Montrer que $\pi_1(C_{PL}(M)) \approx Wh_1(\pi_1 M)$, i.e. le groupe de Whitehead (algébrique) du groupe fondamental de M .

La proposition 1 montre qu'il est naturel de considérer l'espace $\mathcal{C}_{PL}(M) = \varinjlim_k C_{PL}(M \times I^k)$. On a alors une équivalence d'homotopie $\mathcal{C}_{PL}(M) \sim \Omega|\underline{\underline{C}}(M)|$. A cause du décalage d'indice entre les groupes d'homotopie des espaces de concordances et la K-théorie algébrique (voir l'introduction), il est préférable de travailler avec un double délaçage de $\mathcal{C}_{PL}(M)$ noté $Wh_{PL}(M)$ et appelé espace de Whitehead PL de la variété M . On a $\pi_o(Wh_{PL}(M)) = 0$,

$\pi_1(Wh_{PL}(M)) = Wh_1(\pi_1 M)$ et $\pi_{i+2}(Wh_{PL}(M)) \approx \pi_i(C_{PL}(M))$ si $0 \leq i << \dim M$. De manière analogue au cas PL , on pose $\mathcal{C}_{Diff}(M) = \varinjlim_k C_{Diff}(M \times I^k)$. L'espace de Whitehead différentiable de M , noté $Wh_{Diff}(M)$ est un double délaçage (connexe) de $\mathcal{C}_{Diff}(M)$ tel que $\pi_1(Wh_{Diff}(M)) = Wh_1(\pi_1 M)$. L'isomorphisme $\pi_i(C_{Diff}(M)) \xrightarrow{\approx} \pi_{i+2}(Wh_{Diff}(M))$ si $i < \frac{\dim M - 25}{6}$ se démontre en se ramenant au cas PL (cf. [4] et [10]).

2.2. Passage du cas semi-linéaire au cas différentiable

Dans cette section, on suppose que l'espace $A(X)$ a été construit et on admet le théorème 1. On va démontrer le théorème 2.

Hatcher [11] et Burghelea-Lashof [30] ont montré que Wh_{PL} et Wh_{Diff} sont des foncteurs d'homotopie de la catégorie des variétés compactes (PL ou différentiables) dans la catégorie des espaces de lacets infinis. Par un argument classique, on étend ces foncteurs à la catégorie des CW-complexes (localement finis).

Soit F l'un des foncteurs d'homotopie A , Wh_{PL} , Wh_{Diff} . On note $\widetilde{F}$ le <u>foncteur réduit</u> et F^S le <u>foncteur stabilisé</u>. Par définition, $\widetilde{F}(X)$ est la fibre homotopique de $F(X) \to F(pt)$ et $F^S(X) = \varinjlim_n \Omega^n \widetilde{F}(\Sigma^n(X \cup pt))$. L'application $\widetilde{F}(Y) \to \Omega \widetilde{F}(\Sigma Y)$ utilisée pour définir F^S s'obtient en examinant l'application induite sur les fibres (verticales par exemple) dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(\text{cône } Y) \arrow[d] \\ F(\text{cône } Y) \arrow[r] & F(\Sigma Y) \end{tikzcd} .$$

Le diagramme ci-dessous est obtenu par stabilisation

$$\begin{tikzcd} Wh_{Diff}(X) \arrow[r] \arrow[d] & Wh_{PL}(X) \arrow[d] & A(X) \arrow[l] \arrow[d] \\ Wh^S_{Diff}(X) \arrow[r] & Wh^S_{PL}(X) & A^S(X) \arrow[l] \end{tikzcd} .$$

Une version "fibrée" de la théorie du lissage a permis à Burghelea et Lashof [4] de montrer que la fibre homotopique de $Wh_{Diff}(X) \to Wh_{PL}(X)$ est une théorie d'homologie généralisée en X . Par stabilisation cette fibre est donc inchangée. Ainsi le carré de gauche est cartésien à homotopie près. Le théorème 1 affirme que la fibre de l'application $A(X) \to Wh_{PL}(X)$ est une théorie d'homologie généralisée. Donc, par le même argument, le carré de droite est cartésien à homotopie près. Ainsi, les fibres des applications verticales sont homotopiquement équivalentes. Or, le lemme de disjonction de C. Morlet ([18], [5]) implique que l'espace $Wh^S_{Diff}(X)$ est contractile (voir [11]). Il s'en suit que la fibre de $A(X) \to A^S(X)$ est homotopiquement équivalente à $Wh_{Diff}(X)$. Le théorème 2 est démontré.

Remarque.- L'étude de l'espace des concordances topologiques, i.e. dans la catégorie des variétés topologiques et homéomorphismes, se ramène à celle de C_{PL} d'après [15]. (Voir aussi Burghelea-Lashof, Trans.A.M.S., 196(1974), 1-50.)

§ 3. K-théorie algébrique des espaces [25], [26]

3.1. Une version sophistiquée de la "bar-construction"

La définition de l'espace $A(X)$ repose sur une construction originale qui associe un ensemble simplicial à une catégorie "munie de cofibrations". Une catégorie avec cofibrations est une (petite) catégorie $\underline{\underline{C}}$ munie d'une sous-catégorie $co(\underline{\underline{C}})$ dont les morphismes sont appelés cofibrations et qui satisfait aux axiomes suivants :

(I) $\underline{\underline{C}}$ possède un objet nul noté 0 ,

(II.1) les isomorphismes de $\underline{\underline{C}}$ sont des cofibrations,

(II.2) pour tout objet A de $\underline{\underline{C}}$ la flèche $0 \to A$ est une cofibration,

(II.3) la catégorie $co(\underline{\underline{C}})$ est stable par changement de cobase, c'est-à-dire que tout diagramme de $\underline{\underline{C}}$ du type

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, tail] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

, où la flèche $\rightarrowtail$ est une cofibration, possède une somme amalgamée et la flèche verticale de droite qui en résulte est une cofibration.

Un foncteur entre catégories munies de cofibrations est dit exact s'il respecte 0 et les cofibrations,et envoie les sommes amalgamées de l'axiome (II.3) sur des sommes amalgamées.

Pour tout entier n , on désigne par $[n]$ l'ensemble ordonné $\{0 < 1 < \ldots < n\}$. La catégorie $\underline{\underline{Mor}}[n]$ a pour objets les paires (i,j) satisfaisant à $0 \leq i \leq j \leq n$. Il y a un morphisme et un seul $(i,j) \to (i',j')$ lorsque $i \leq i'$ et $j \leq j'$.

DÉFINITION.- *Soit $\underline{\underline{C}}$ une catégorie avec cofibrations. L'ensemble $S_n\underline{\underline{C}}$ est formé des foncteurs $A : \underline{\underline{Mor}}[n] \to \underline{\underline{C}}$, $(i,j) \mapsto A_{i,j}$ qui vérifient*

(i) $A_{i,i} = 0$ pour tout i ,

(ii) pour tout triple $i \leq j \leq k$, le morphisme $A_{i,j} \rightarrowtail A_{i,k}$ est une cofibration et le carré ci-dessous est cocartésien

$$\begin{tikzcd} A_{i,j} \arrow[r] \arrow[d, tail] & A_{j,j} \arrow[d, tail] \\ A_{i,k} \arrow[r] & A_{j,k} \end{tikzcd}$$

<u>On note</u> $S.\underline{\underline{C}}$ <u>l'ensemble simplicial dont le terme de degré</u> n <u>est</u> $S_n\underline{\underline{C}}$.

<u>Remarque</u>.- Un élément de $S_n\underline{\underline{C}}$ est, grosso modo, la donnée d'une suite de cofibrations $O \rightarrowtail A_{0,1} \rightarrowtail \dots \rightarrowtail A_{0,n}$, plus des choix $A_{j,k}$ pour les quotients $A_{i,k}/A_{i,j}$, qui ne sont définis, a priori, qu'à isomorphisme près. De plus, tous ces choix doivent être compatibles entre eux. L'opérateur face $d_i : S_n\underline{\underline{C}} \longrightarrow S_{n-1}\underline{\underline{C}}$ consiste alors à oublier l'objet $A_{0,i}$ si $i \neq 0$ et à quotienter par $A_{0,1}$ si $i = 0$.

<u>Exemples</u>.- 1) Soit $\underline{\underline{C}}$ la catégorie des ensembles finis pointés. On choisit les injections pour cofibrations. La réalisation géométrique de $S.\underline{\underline{C}}$ est alors l'espace des lacets infini $\Omega^{\infty-1}S^{\infty}$ (ici S = sphère) [22].

2) Soit $\underline{\underline{C}}$ une catégorie exacte au sens de Quillen [21]. On choisit les monomorphismes admissibles pour cofibrations. On a alors $|S.\underline{\underline{C}}| \sim |Q\underline{\underline{C}}|$ où Q désigne la construction de Quillen décrite dans [21].

Ainsi, la construction $S.$ généralise la construction Q en s'appliquant à une classe plus vaste de catégories. En contre-partie, il semble que $S.$ ne possède pas toutes les propriétés de Q . Néanmoins le théorème 2 de [21] reste vrai (théorème d'additivité). Avant d'en donner l'énoncé, nous avons besoin d'une définition. La suite $A \rightarrowtail C \twoheadrightarrow B$ de $\underline{\underline{C}}$ est dite <u>exacte</u> si $A \rightarrowtail C$ est une cofibration et si B est la somme amalgamée $B \cup_A O$. Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux sous-catégories avec cofibrations de $\underline{\underline{C}}$. La catégorie $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}}\,;\underline{\underline{A}}\,,\underline{\underline{B}})$ dont les objets sont les suites exactes de $\underline{\underline{C}}$ avec $A \in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{A}}$ et $B \in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{B}}$ est munie naturellement de cofibrations (voir § 4, pour plus de précisions). Les foncteurs d'oubli $s : \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}}\,;\underline{\underline{A}}\,,\underline{\underline{B}}) \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ et $q : \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}}\,;\underline{\underline{A}}\,,\underline{\underline{B}}) \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ sont exacts et induisent des applications simpliciales $S.s$ et $S.q$.

THÉORÈME D'ADDITIVITÉ.- <u>L'application simpliciale</u>

$$S.s \times S.q \;:\; S.\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}}\,;\underline{\underline{A}}\,,\underline{\underline{B}}) \longrightarrow S.\underline{\underline{A}} \times S.\underline{\underline{B}}$$

<u>induit une équivalence d'homotopie sur les réalisations géométriques</u>.

La démonstration sera donnée au § 4.

Par définition, la catégorie $\underline{\underline{S_n C}}$ a pour objet les éléments de $S_n\underline{\underline{C}}$, c'est-à-dire les foncteurs $\underline{\underline{\mathrm{Mor}}}[n] \rightarrow \underline{\underline{C}}$ satisfaisant à certaines propriétés, et elle a pour morphismes les transformations naturelles de foncteurs. On note $\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}}$ la catégorie simpliciale correspondante.

Une <u>catégorie avec cofibrations et équivalences d'homotopie faible</u> $\underline{\underline{C}}$ est une catégorie avec cofibrations munie d'une sous-catégorie $w\underline{\underline{C}}$ (dont les morphismes sont appelés équivalences d'homotopie faible) satisfaisant aux axiomes :

(III.1) les isomorphismes sont des équivalences d'homotopie faible ,

(III.2) si dans le diagramme commutatif de $\underline{\underline{C}}$

$$\begin{array}{ccccc} B & \leftarrowtail & A & \longrightarrow & C \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ B' & \leftarrowtail & A' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

les flèches horizontales de gauche sont des cofibrations et les flèches verticales des équivalences d'homotopie faible , alors la flèche induite sur les sommes amalgamées $B \cup_A C \xrightarrow{\sim} B' \cup_{A'} C'$ est une équivalence d'homotopie faible.

On écrira souvent pour abréger <u>w-équivalence</u> au lieu de équivalence d'homotopie faible.

Si la catégorie avec cofibrations $\underline{\underline{C}}$ est munie de w-équivalences $w\underline{\underline{C}}$, il en est de même de la catégorie $\underline{\underline{S}}_n\underline{\underline{C}}$. On note $w\underline{\underline{S}}_n\underline{\underline{C}}$ la sous-catégorie des w-équivalences de $\underline{\underline{S}}_n\underline{\underline{C}}$. Si l'on choisit pour w-équivalences les isomorphismes, on a une équivalence d'homotopie $|S.\underline{\underline{C}}| \sim |w\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}}|$ (la démonstration n'est pas tout à fait triviale). Le théorème d'additivité est encore valable lorsque $S_\bullet$ est remplacé par $w\underline{\underline{S}}_\bullet$. La démonstration se fait en passant au nerf $([k] \mapsto w\underline{\underline{S}}_k\underline{\underline{C}})$ et en appliquant le théorème d'additivité (première version).

3.2. <u>L'espace</u> $A(X)$ <u>et la fibration</u> $h(X\,;A(pt)) \longrightarrow A(X) \longrightarrow Wh_{PL}(X)$

Soit X un ensemble simplicial. La catégorie $\underline{\underline{R}}(X)$ a pour objets les triplets (Y,r,i) où Y est un ensemble simplicial, $r : Y \longrightarrow X$ une rétraction et $i : X \rightarrow Y$ une section de r . De plus, on suppose que $Y \dot{-} i(X)$ n'a qu'un nombre fini de simplexes non dégénérés. Un morphisme de (Y,r,i) dans (Y',r',i') est une application simpliciale $f : Y \longrightarrow Y'$ telle que $f \circ i = i'$ et $r = r' \circ f$. L'objet nul de $\underline{\underline{R}}(X)$ est (X, id_X, id_X) . Pour cofibrations, on choisit les morphismes f qui sont des applications injectives. On sera amené à travailler avec deux choix différents de w-équivalences. Le premier est la sous-catégorie $h\underline{\underline{R}}(X)$ ayant pour morphismes les applications f dont la réalisation géométrique est une <u>équivalence d'homotopie</u> (relativement à l'inclusion mais <u>pas</u> à la projection). Le second choix est la sous-catégorie $s\underline{\underline{R}}(X)$ ayant pour morphismes les applications f dont la réalisation géométrique est <u>simple</u> (voir 2.1).

Avant de passer à la définition de l'espace $A(X)$, il nous faut savoir comment rendre homotopiquement invariant un foncteur F des ensembles simpliciaux dans les ensembles simpliciaux. Soit Δ^k le k-simplexe simplicial standard et $X^{\Delta^k} = \mathrm{Hom}(\Delta^k, X)$. La diagonale $(k \longmapsto F(X^{\Delta^k})_k)$ est l'ensemble simplicial cherché, que l'on note $F(X^{\Delta^\cdot})$. En effet, le foncteur $X \longmapsto F(X^{\Delta^\cdot})$ transforme homotopies simpliciales en homotopies simpliciales et, si F est un foncteur d'homotopie, $F(X) \longrightarrow F(X^{\Delta^\cdot})$ est une équivalence d'homotopie.

DÉFINITION.- Pour tout ensemble simplicial X <u>l'espace de</u> K-<u>théorie algébrique</u> de X est $A(X) = \Omega|h\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^\cdot})|$.

Soit $\underline{\underline{R}}^h(X)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{R}}(X)$ formée des objets acycliques, c'est-à-dire des objets (Y,r,i) dont la réalisation géométrique de i est une équivalence d'homotopie. Par restriction $\underline{\underline{R}}^h(X)$ est une catégorie avec cofibrations qu'on peut munir des deux sortes de w-équivalences suivantes :

$$h\underline{\underline{R}}^h(X) = \underline{\underline{R}}^h(X) \cap h\underline{\underline{R}}(X) \quad \text{et} \quad s\underline{\underline{R}}^h(X) = \underline{\underline{R}}^h(X) \cap s\underline{\underline{R}}(X) .$$

Une application simple est une équivalence d'homotopie [7], d'où des foncteurs d'oubli :

$$s\underline{\underline{R}}(X) \longrightarrow h\underline{\underline{R}}(X) \quad \text{et} \quad s\underline{\underline{R}}^h(X) \longrightarrow h\underline{\underline{R}}^h(X) .$$

<u>Lemme</u> 1.- <u>Le carré ci-dessous est homotopiquement cartésien</u> <u>(sur les classifiants)</u> :

$$\begin{array}{ccc} s\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}^h(X^{\Delta^\cdot}) & \longrightarrow & h\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}^h(X^{\Delta^\cdot}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ s\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^\cdot}) & \longrightarrow & h\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^\cdot}) \end{array} .$$

Dans ce diagramme les flèches verticales sont induites par l'inclusion $\underline{\underline{R}}^h(X) \longrightarrow \underline{\underline{R}}(X)$ et les flèches horizontales par l'oubli : (applications simples) $\longmapsto$ (équivalences d'homotopie) . Ce lemme est une conséquence du théorème d'additivité. Sa démonstration sera évoquée au § 4.

<u>Lemme</u> 2.- <u>L'espace</u> $|h\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}^h(X^{\Delta^\cdot})|$ <u>est contractile</u>.

Pour tout n , la catégorie $h\underline{\underline{S}}_n\underline{\underline{R}}^h(X)$ admet un objet initial. Le lemme 2 résulte alors du lemme de réalisation (voir 4.1).

<u>Lemme</u> 3.- <u>L'espace</u> $|s\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^\cdot})|$ <u>est une théorie d'homologie généralisée</u>.

La démonstration de ce lemme utilise d'une part le théorème d'additivité et d'autre part quelques généralités dans le cadre des Γ-espaces de Segal [22] et Anderson [1].

<u>Lemme</u> 4.- <u>L'espace</u> $|s\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{R}}^h(X^{\Delta^\cdot})|$ <u>a le type d'homotopie de</u> $Wh_{PL}(X)$.

Ce lemme nécessite une variante technique du théorème du h-cobordisme paramétré (voir § 2.1). Cette variante consiste à remplacer les polyèdres par des ensembles simpliciaux.

Le théorème 1 énoncé dans l'introduction résulte immédiatement des lemmes 1 à 4. Remarquons que l'espace $Wh_{PL}(pt)$ est contractile d'après le théorème du h-cobordisme stable et la construction du cône d'Alexander. Il s'en suit que la fibre de $A(X) \longrightarrow Wh_{PL}(X)$ est la théorie d'homologie généralisée associée à l'espace de lacets infini $A(pt)$.

3.3. Comparaison avec la K-théorie algébrique de Quillen

Pour tout anneau Λ , l'espace de K-théorie algébrique $K(\Lambda)$ admet plusieurs définitions. L'une d'elles utilise la construction Q déjà mentionnée [21], une autre la construction "+" : $K(\Lambda) = K_o(\Lambda) \times BGL(\Lambda)^+$ (cf. [20] et [16]). On va donner une définition de $A(X)$ utilisant la construction "+" . Afin de comparer les espaces $A(X)$ et $K(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$ (voir le théorème 3 dans l'introduction), on est amené à définir la K-théorie d'un anneau simplicial. On termine cette section par les versions stabilisées de ces différents espaces.

Soit X un ensemble simplicial connexe pointé. On note $G = GX$ le groupe simplicial de Kan dont la réalisation géométrique est l'espace des lacets de X . La catégorie $\underline{\underline{U}}(X)^n_k$ est construite de la façon suivante. Un objet est un G-ensemble simplicial (à gauche) pointé Y tel que

- Y est G-libre, i.e. $g.y = y$ si et seulement si $g = 1$ ou $y = *$;
- il y a une équivalence d'homotopie $|EX \times_G Y| \simeq |X| \vee \bigvee_{j=1}^{k} S^n_j$ rel. $|X|$.

Dans ces expressions, EX désigne l'espace total du G-fibré principal universel et $\bigvee_{j=1}^{k} S^n_j$ est un bouquet de k-sphères de dimension n . Les morphismes de la catégorie $\underline{\underline{U}}(X)^n_k$ sont les G-applications qui sont des équivalences d'homotopie (pas forcément des G-équivalences d'homotopie).

On a clairement des applications de suspension $\underline{\underline{U}}(X)^n_k \longrightarrow \underline{\underline{U}}(X)^{n+1}_k$ et de stabilisation $\underline{\underline{U}}(X)^n_k \longrightarrow \underline{\underline{U}}(X)^n_{k+1}$. Si on pose $\underline{\underline{U}}(X) = \varinjlim_{n,k} \underline{\underline{U}}(X)^n_k$, on constate que $\pi_1 |\underline{\underline{U}}(X)| = GL(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$. On peut alors appliquer à $|\underline{\underline{U}}(X)|$ la construction "+" relativement au sous-groupe des commutateurs du groupe fondamental.

PROPOSITION 2.- On a une équivalence d'homotopie $A(X) \xrightarrow{\sim} |\underline{\underline{U}}(X)|^+$.

Cette proposition est l'analogue de l'équivalence "+" = Q démontrée dans [9].

Soit $\Lambda.$ un anneau simplicial. Le sous-ensemble simplicial $\widehat{GL}_n(\Lambda.)$ de l'anneau de matrices $M_n(\Lambda.)$ est formé des éléments dont l'image dans $M_n(\pi_o(\Lambda.))$ est inversible. C'est un monoïde simplicial pour la multiplication des matrices. Par définition, on pose $\widehat{GL}(\Lambda.) = \varinjlim_n \widehat{GL}_n(\Lambda.)$. Le classifiant $B\widehat{GL}(\Lambda.)$ de ce monoïde simplicial est connexe et son groupe fondamental est isomorphe à $\pi_1(BGL(\pi_o\Lambda.)) = GL(\pi_o\Lambda.)$. On peut donc appliquer la construction "+" de Quillen. Rappelons que l'application naturelle $B\widehat{GL}(\Lambda.) \rightarrow B\widehat{GL}(\Lambda.)^+$ abélianise le groupe fondamental et induit un isomorphisme en homologie. Remarquons que si la structure simpliciale de l'anneau est triviale, on retrouve l'espace $K(\Lambda)$ (au π_o près).

DÉFINITION.- L'espace de K-théorie algébrique de $\Lambda.$ est $K(\Lambda.) = K_o(\pi_o\Lambda.) \times B\widehat{GL}(\Lambda.)^+$.

Les résultats suivants sont utiles pour les calculs (voir [25]).

<u>Lemme</u> 5.- <u>Soit</u> $f : \Lambda. \rightarrow \Lambda'.$ <u>un homomorphisme d'anneaux simpliciaux induisant un isomorphisme sur le</u> π_o . <u>Soit</u> $\mathcal{C}$ <u>une classe de Serre de groupes abéliens. Si l'application</u> f <u>est</u> k-<u>connexe modulo</u> $\mathcal{C}$, <u>alors l'application</u> $f_* : K(\Lambda.) \longrightarrow K(\Lambda'.)$ <u>est</u> $(k+1)$-<u>connexe modulo</u> $\mathcal{C}$.

Par exemple, soit X un ensemble simplicial connexe. L'homomorphisme d'anneaux simpliciaux $\mathbb{Z}[GX] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1 X]$ induit une application $K(\mathbb{Z}[GX]) \longrightarrow K(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$. Lorsque $X = B\pi$ cette application est une équivalence d'homotopie.

Le foncteur qui associe à tout G-ensemble (simplicial) pointé le G-module libre (simplicial) ayant un générateur par élément (différent du point-base) de l'ensemble définit une application $|\underline{\underline{U}}(X)| \longrightarrow B\widehat{GL}(\mathbb{Z}[GX])$.

<u>Lemme</u> 6.- <u>L'application</u> $|\underline{\underline{U}}(X)|^+ \rightarrow B\widehat{GL}(\mathbb{Z}[GX])^+$ <u>est une équivalence d'homotopie rationnelle</u>.

Une voie suggestive de penser à la K-théorie algébrique de l'espace X est de remplacer l'anneau simplicial $\mathbb{Z}[GX]$ par l'espace $\Omega^\infty S^\infty(\Omega X)$ qui est un "anneau à homotopie près". De ce point de vue la construction de l'espace classifiant de $\widehat{GL}(\Omega^\infty S^\infty \Omega X)$ entraîne des difficultés techniques non triviales, voir [19]. Sous cet angle, le lemme 6 résulte du lemme 5 (généralisé aux anneaux à homotopie près) et de l'équivalence d'homotopie rationnelle $\Omega^\infty S^\infty \longrightarrow \pi_o(\Omega^\infty S^\infty) = \mathbb{Z}$ (J.-P. Serre).

En définitive, l'application composée

$$A(X) \xrightarrow{\sim} |\underline{\underline{U}}(X)|^+ \longrightarrow K(\mathbb{Z}[GX]) \longrightarrow K(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$$

est une équivalence d'homotopie rationnelle lorsque $X = B\pi$. C'est la première assertion du théorème 3.

En ce qui concerne la seconde assertion de ce théorème, nous nous contenterons de décrire les foncteurs K^S . Considérons $K(\Lambda[GX])$ comme un foncteur en X . D'après le lemme 5, c'est un foncteur d'homotopie, on peut donc poser

$$K^S(\Lambda[GX]) = \varinjlim_n \Omega^n \widetilde{K}(\Lambda[G\Sigma^n(X \cup pt)]) \qquad \text{(voir 2.2).}$$

L'application de stabilisation $K(\Lambda[GX]) \to K^S(\Lambda[GX])$ est délicate à définir car $X \cup pt$ n'est pas connexe. Par définition la K-théorie algébrique stabilisée $K^S(\Lambda)$ de l'anneau Λ est l'espace $K^S(\Lambda[G(pt)])$. Dans ce cas l'application de stabilisation est la composée :

$$K(\Lambda) \longrightarrow \Omega\widetilde{K}(\Lambda[t,t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Omega\widetilde{K}(\Lambda[GS^1]) \longrightarrow K^S(\Lambda) \quad ,$$

où $\Lambda[t,t^{-1}]$ est l'anneau des polynômes Laurentiens et où la première flèche est décrite dans le § 2.3 de [16].

Remarque.- La torsion de Whitehead [28] d'une équivalence d'homotopie est un élément du groupe de Whitehead $Wh_1(\pi)$. En termes de K-théorie, on a la suite exacte $0 \to h_1(B\pi\,;\underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}) \to K_1(\mathbb{Z}[\pi]) \to Wh_1(\pi) \to 0$, où $\underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}$ désigne le spectre associé à l'espace de lacets infini $K(\mathbb{Z})$. Pour le calcul de $\pi_0(C_{Diff}(M))$, Hatcher et Wagoner [12] ont été amenés à construire (algébriquement) un groupe $Wh_2(\pi_1 M)$ et j'ai montré dans [16] que la suite $h_2(B\pi\,;\underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}) \to K_2(\mathbb{Z}[\pi]) \to Wh_2(\pi) \to 0$ est exacte. En fait, on construit une application λ qui donne naissance à une fibration

$$(*) \qquad h(B\pi\,;\underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\ \lambda\ } K(\mathbb{Z}[\pi]) \longrightarrow Wh(\pi)\ .$$

On constate alors que $\pi_i(Wh(\pi)) = Wh_i(\pi)$ pour $i = 1 , 2$. De plus, K. Igusa [14] a, semble-t-il, montré que le groupe $\pi_3(Wh(\pi_1 M))$ est un quotient de $\pi_1(C_{Diff}(M))$. C'est cette fibration (*) que Waldhausen généralise dans le théorème 1. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} h(X\,;A(pt)) & \longrightarrow & A(X) & \longrightarrow & Wh_{PL}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h(B\pi\,;\underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & K(\mathbb{Z}[\pi]) & \longrightarrow & Wh(\pi) \end{array} \qquad \pi = \pi_1 X\ ,$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes rationnels lorsque $X = B\pi$.

3.4. Homotopie rationnelle de $C_{Diff}(D^n)$

Les théorèmes 2 et 3 ramènent le calcul des groupes d'homotopie rationnels de $Wh_{Diff}(pt)$ au calcul des groupes $K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ et $K_i^S(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. Dans [2], Borel a effectivement calculé $K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$, soit

$$\pi_i(A(pt)) \otimes \mathbb{Q} = K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si} \quad i = 0\ , \\ \mathbb{Q} & \text{si} \quad i = 5\ , 9\ , \ldots\ 4k+1\ , \ldots \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Restent à calculer les groupes $\pi_i(A^S(pt)) \otimes \mathbb{Q} = K_i^S(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. Dans [25], Waldhausen montre que, modulo un lemme démontré depuis par Farrell et Hsiang [8], ce groupe est nul sauf pour $i = 0$ où il vaut $\mathbb{Q}$. La démonstration du lemme en question utilise les méthodes de A. Borel. Voici son énoncé :

Lemme.- *Soit* $M_n(\mathbb{Q})$ *le groupe additif des* $n \times n$-*matrices rationnelles sur lequel* $GL_n(\mathbb{Z})$ *opère par conjugaison. Alors l'homomorphisme trace* $M_n(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ *induit un isomorphisme* $\varinjlim_n H_*(GL_n(\mathbb{Z}), M_n(\mathbb{Q})) \longrightarrow \varinjlim_n H_*(GL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de stabilité (voir 2.1) pour conclure.

COROLLAIRE.- *Pour* $0 \leq i < \frac{n-25}{6}$ *, on a*

$$\pi_i(C_{\mathrm{Diff}}(D^n)) \otimes \mathbb{Q} = K_{i+2}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 3, 7, \ldots 4k-1, \ldots \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

§ 4. Le théorème d'additivité et ses conséquences

La catégorie des ensembles finis ordonnés $[n]$ et applications croissantes au sens large est notée Δ .

4.1. Lemmes multisimpliciaux

A tout ensemble simplicial $X.$ on peut associer une catégorie $\underline{\underline{\mathrm{Sub}}}(X.)$ dont les objets sont les couples (x,n) avec $x \in X_n$. Un morphisme de (x,n) dans (x',n') est la donnée d'une application croissante au sens large $u : [n] \to [n']$ telle que $X(u)(x') = x$. Le nerf de $\underline{\underline{\mathrm{Sub}}}(X.)$ est la subdivision barycentrique de $X.$; leurs réalisations géométriques sont donc homéomorphes. Toute définition et propriété sur les catégories peut donc se transposer aux ensembles simpliciaux par le foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Sub}}}$. Ainsi, *la fibre* à gauche d'une application simpliciale $f : X \to Y$ au-dessus d'un n-simplexe y est le produit fibré dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f/y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Ici Δ^n est le n-simplexe standard et $\Delta^n \to Y$ est l'application caractéristique de y . On laisse au lecteur le soin de traduire en termes simpliciaux les théorèmes A et B de Quillen [21].

On aura besoin à plusieurs reprises des lemmes suivants dont on pourra trouver les démonstrations dans [29] et [24].

Lemme de réalisation.- *Soit* $X.. \to Y..$ *une application bisimpliciale. On suppose que pour tout* n *l'application* $X_{n\cdot} \longrightarrow Y_{n\cdot}$ *est une équivalence d'homotopie. Alors* $X.. \to Y..$ *est une équivalence d'homotopie.*

Lemme de réalisation fibrée.-*Soit* $X.. \to Y.. \to Z..$ *une suite d'applications bisimpliciales dont la composée est constante. On suppose que, pour tout* n , *la suite* $X_{n\cdot} \longrightarrow Y_{n\cdot} \longrightarrow Z_{n\cdot}$ *est une fibration homotopique. Si les espaces* $Z_{n\cdot}$ *sont connexes, alors la suite* $X_{\cdot\cdot} \longrightarrow Y_{\cdot\cdot} \longrightarrow Z_{\cdot\cdot}$ *est une fibration homotopique.*

4.2. Le théorème d'additivité

Rappelons les hypothèses en les précisant. Soient $\underline{\underline{C}}$ une catégorie avec cofibrations, $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux sous-catégories avec cofibrations de $\underline{\underline{C}}$. Par définition, $\underline{\underline{F}}_1\underline{\underline{C}}$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{\mathrm{Mor}}}\ \underline{\underline{C}}$ dont les objets sont les cofibrations $(C \rightarrowtail C')$ de $\underline{\underline{C}}$. Une cofibration de $\underline{\underline{F}}_1\underline{\underline{C}}$ est un morphisme $(C \rightarrowtail C') \longrightarrow (D \rightarrowtail D')$ tel que $C \rightarrowtail D$ et $D \cup_C C' \rightarrowtail D'$ soient des cofibrations de $\underline{\underline{C}}$. Si on fixe un choix pour le quotient C'/C , on obtient une catégorie équivalente notée $\underline{\underline{F}}_1^+\underline{\underline{C}}$. Par définition, $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}} ; \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}})$ est le produit fibré dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}} ; \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}}) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{F}}_1^+\underline{\underline{C}} \arrow[d] \\
\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} \arrow[r] & \underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{C}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(C \rightarrowtail C') \arrow[d, mapsto] \\
(C , C'/C) \ .
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que $S.s \times S.q : S.\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}} ; \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}}) \longrightarrow S.\underline{\underline{A}} \times S.\underline{\underline{B}}$ est une équivalence d'homotopie.

Première réduction. Soient $*$ l'unique 0-simplexe de $S.\underline{\underline{A}}$ et $S.s/*$ la fibre à gauche de l'application simpliciale $S.s$ au-dessus de $*$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S.s/* \arrow[r] \arrow[d] & S.\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{C}} ; \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}}) \arrow[r] \arrow[d] & S.\underline{\underline{A}} \arrow[d, "="] \\
S.\underline{\underline{B}} \arrow[r] & S.\underline{\underline{B}} \times S.\underline{\underline{A}} \arrow[r] & S.\underline{\underline{A}}
\end{tikzcd} ,$$

les flèches verticales extrêmes sont des équivalences d'homotopie. Il suffit donc de montrer que la suite horizontale du haut est une fibration pour démontrer le théorème d'additivité. Pour cela, nous allons appliquer la version simpliciale du théorème B de Quillen à $S.s$.

Deuxième réduction. Soit t un morphisme de (A',n) vers (A'',m) dans $\underline{\underline{\mathrm{Sub}}}(S.\underline{\underline{A}})$ (A' est donc un n-simplexe de $S.\underline{\underline{A}}$, c'est-à-dire un foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Mor}}}[n] \longrightarrow \underline{\underline{A}}$, etc...). Il nous faut montrer que l'application induite $t_* : S.s/A' \longrightarrow S.s/A''$ est une équivalence d'homotopie. Puisqu'il existe toujours un morphisme (dans $\underline{\underline{\mathrm{Sub}}}(S.\underline{\underline{A}})$) de $(*,0)$ vers (A',n) , il suffit de montrer que tous les morphismes de ce type induisent une équivalence d'homotopie.

Troisième réduction. Soit $v_i : [0] \longrightarrow [n]$, $0 \longmapsto i$ qui définit $v_{i*} : S.s/* \longrightarrow S.s/A'$. On montrera à l'étape suivante que si $i = n$, cette application est une injection sur un rétracte par déformation. Le composé de cette rétraction avec v_{i*}

$$S.s/* \xrightarrow{v_{i*}} S.s/A' \longrightarrow Im(v_{n*})$$

est encore une équivalence d'homotopie. Il est donc ainsi de v_{i*}.

Fin de la démonstration. Pour montrer que $v_n : [0] \to [n]$, $0 \longmapsto n$ induit une injection sur un rétracte par déformation, on va exhiber explicitement une homotopie $(S.s/A') \times \Delta^1 \longrightarrow S.s/A'$ dont la restriction en $\{0\} \subset \Delta^1$ est l'identité de $S.s/A'$ et dont la restriction en $\{1\} \subset \Delta^1$ se factorise à travers $S.s/*$ par v_{n*}.

Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. Une manière agréable de décrire une homotopie $X \times \Delta^1 \to Y$ est la suivante. Soit $\Delta/[1]$ la fibre à gauche de id_Δ au-dessus de l'objet $[1]$. Les objets de cette catégorie sont les applications $[n] \to [1]$ de Δ . Notons X' (resp. Y') le composé de X (resp. Y) : $\Delta \to \underline{\underline{Ens}}$ avec le foncteur oubli : $\Delta/[1] \to \Delta$. Une transformation de foncteurs entre X' et Y' fournit une homotopie $X \times \Delta^1 \to Y$.

Le cas que nous examinons est $X = Y = S.s/A'$. Soit $z : [n] \to [1]$ un objet de $\Delta/[1]$. On va lui associer une application $z_* : S_n s/A' \to S_n s/A'$. Un élément de $S_n s/A'$ est la donnée de $\alpha = (u : [m] \to [n] , A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C)$ avec $u^*(A') = A$. Définissons $t : [n] \times [1] \to [n]$ par $t(j,0) = j$ et $t(j,1) = n$. L'élément $z_*(\alpha) = (\bar{u} : [m] \to [n] , \bar{A} \rightarrowtail \bar{B} \twoheadrightarrow \bar{C})$ de $S_n s/A'$ est défini de la façon suivante. Tout d'abord $\bar{u} = t \circ (u \times z)$ et $\bar{A} = \bar{u}^*(A')$. Cette dernière égalité est nécessaire pour obtenir un élément de $S_n s/A'$. Le diagramme ci-dessous est une somme amalgamée dans la catégorie $\underline{\underline{S_m E}}(\underline{\underline{C}} ; \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}})$ et définit la suite exacte $\bar{A} \rightarrowtail \bar{B} \twoheadrightarrow \bar{C}$:

$$\begin{array}{ccc} (A \overset{id}{\rightarrowtail} A \twoheadrightarrow 0) & \rightarrowtail & (A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{A} \overset{id}{\rightarrowtail} \bar{A} \twoheadrightarrow 0) & \longrightarrow & (\bar{A} \rightarrowtail \bar{B} \twoheadrightarrow \bar{C}) . \end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a bien défini une transformation naturelle. L'homotopie qui s'en déduit joint l'identité (car $t(j,0) = j$) à une application se factorisant par v_{n*} (car $t(j,1) = n$) . Ce qui achève la démonstration du théorème d'additivité.

4.3. La fibration générique

Les équivalences d'homotopie faible $w\underline{\underline{C}}$ utilisées dans le lemme 1 satisfont à l'axiome du cylindre et l'axiome d'extension que nous allons décrire maintenant. On dit qu'une catégorie $\underline{\underline{C}}$ avec cofibrations possède un foncteur cylindre si on s'est donné un foncteur exact $T : \underline{\underline{Mor}}\ \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$, $(f : A \to B) \longmapsto T(f)$, ainsi que des transformations naturelles $j_1 : A \longrightarrow T(f)$, $j_2 : B \longrightarrow T(f)$, $p : T(f) \longrightarrow B$ telles que

(i) $p \circ j_1 = f$,

(ii) $p \circ j_2 = id_B$,

(iii) $\quad p : T(0 \to B) \xrightarrow{=} B$,

(iv) $\quad$ la transformation naturelle $(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (j_1 \vee j_2 : A \vee B \to T(f))$ est un foncteur exact $\underline{\underline{\mathrm{Mor}}}\ \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{F}}_1\underline{\underline{C}}$.

Supposons que $\underline{\underline{C}}$ soit muni de w-équivalences $w\underline{\underline{C}}$. On dit alors que $w\underline{\underline{C}}$ satisfait à l'<u>axiome du cylindre</u> si, d'une part j_2 et p sont des w-équivalences, et si d'autre part j_1 est une w-équivalence dès que f l'est. On suppose en outre que T respecte les w-équivalences.

La catégorie $w\underline{\underline{C}}$ satisfait à l'<u>axiome d'extension</u> si, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"'] & B/A \arrow[d, "\gamma"'] \\ A' \arrow[r, tail] & B' \arrow[r, two heads] & B'/A' \end{tikzcd} ,$$

dont les lignes sont exactes, γ est une w-équivalence dès que α et β sont des w-équivalences.

On note $\underline{\underline{C}}^w$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}$ dont les objets C vérifient : la flèche $0 \to C$ est une w-équivalence. $\underline{\underline{C}}^w$ est une catégorie avec cofibrations et w-équivalences.

<u>Lemme</u> (la fibration générique).- <u>Soit $\underline{\underline{C}}$ une catégorie avec cofibrations munie de deux sous-catégories d'équivalences d'homotopie faibles $v\underline{\underline{C}}$ et $w\underline{\underline{C}}$ telles que</u> $v\underline{\underline{C}} \subset w\underline{\underline{C}}$. <u>On suppose que</u> $w\underline{\underline{C}}$ (mais pas forcément $v\underline{\underline{C}}$) <u>satisfait aux axiomes du cylindre et d'extension</u>. <u>Alors le carré</u>

$$\begin{tikzcd} v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}}^w \arrow[r] \arrow[d] & w\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}}^w \arrow[d] \\ v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}} \arrow[r] & w\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}} \end{tikzcd}$$

<u>est cartésien à homotopie près</u>.

<u>Remarque</u>.- On a bien à faire à une fibration car l'espace $|w\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{C}}^w|$ est contractile.

Ce lemme est une conséquence du théorème d'additivité ; voici le principe de sa démonstration. Pour tout foncteur exact $\underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{B}}$ entre catégories avec cofibrations, on peut définir une construction $\underline{\underline{S}}.$ relative (analogue à la "one-sided bar construction"). On note $\underline{\underline{S}}.(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}})$ cette nouvelle catégorie simpliciale avec cofibrations. Si $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont munies de v-équivalences et que le foncteur $\underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{B}}$ est compatible avec ces v-équivalences, alors $\underline{\underline{S}}.(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ est munie de v-équivalences. Le point important à remarquer est que le foncteur exact $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{S}}_m(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}) ; \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{S}}_m\underline{\underline{A}}) \to \underline{\underline{S}}_m(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}})$, qui associe à une suite exacte son terme du milieu, est une équivalence de catégories. Par conséquent, la suite

$$v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{B}} \to v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{S}}_m(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}) \to v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{S}}_m(\underline{\underline{A}})$$

est une fibration homotopique (scindée). On applique le lemme de réalisation fibrée pour montrer que la suite

$$v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{B}} \longrightarrow v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{S}}.(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}) \longrightarrow v\underline{\underline{S}}.\underline{\underline{S}}.(\underline{\underline{A}})$$

est une fibration homotopique. La fibration générique en résulte en prenant pour $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ des catégories convenables, construites à l'aide des w-équivalences.

Le lemme 1 du § 3.2 est un cas particulier du lemme de la fibration générique. Il suffit de prendre pour $\underline{\underline{C}}$ la catégorie $\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^n})$ munie des équivalences d'homotopie faible $v\underline{\underline{C}} = s\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^n})$ et $w\underline{\underline{C}} = h\underline{\underline{R}}(X^{\Delta^n})$; puis, on applique le lemme de réalisation fibrée. Notons que $h\underline{\underline{R}}(X)$ satisfait bien à l'axiome du cylindre et pratiquement à l'axiome d'extension (il y a une petite pathologie à cause des groupes fondamentaux ; on s'en débarrasse par un argument de suspension).

§ 5. Homotopie des groupes de difféomorphismes

Le calcul de l'homotopie des espaces de concordances a d'importantes conséquences pour le calcul de l'homotopie des groupes de difféomorphismes. Les résultats ci-dessous ont été annoncés par Farrell et Hsiang [8] (voir aussi [3] et [13]).

Soient D^n la boule de dimension n et Σ^n une n-sphère d'homotopie différentiable. Pour $0 \leq i < \frac{n}{6} - 7$, on a :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(D^n,\partial)) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n \text{ est impair et } i = 4k-1, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(\Sigma^n)) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 4k-1, \\ \mathbb{Q} & \text{si } n \text{ pair et } i = 4k-1, \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \text{si } n \text{ impair et } i = 4k-1. \end{cases}$$

On a aussi des résultats intéressants dans le cas d'une variété M^n asphérique (c'est-à-dire $\pi_i(M^n) = 0$ si $i \neq 1$).

Si la variété M^n fermée orientable et asphérique satisfait aux conjectures 1 et 2 ci-dessous, alors, pour $0 < i < \frac{n}{6} - 7$, on a :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(M^n)) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \text{centre }(\pi_1 M^n) \otimes \mathbb{Q} & \text{si } i = 1 \\ \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_{i+1-4j}(M^n, \mathbb{Q}) & \text{si } i > 1 \text{ et } n \text{ impair}, \\ 0 & \text{si } i > 1 \text{ et } n \text{ pair}. \end{cases}$$

CONJECTURE 1.- L'application de chirurgie [27]

$$[M^n \times D^i, \partial ; G/Top, *] \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow L_{n+i}(\pi_1 M^n) \otimes \mathbb{Q}$$

est un isomorphisme.

Cette conjecture est une version forte de la conjecture de Novikov.

CONJECTURE 2.- L'homomorphisme de [16]

$$\lambda_* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : h_*(M^n ; \underline{\underline{K}}_{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_*(\mathbb{Z}[\pi_1 M^n]) \otimes \mathbb{Q}$$

est un isomorphisme.

Il a déjà été question de l'homomorphisme λ dans la remarque du § 3.3, il sera étudié en détail dans [17]. Cette conjecture est la version linéaire de la conjecture de Novikov. Elle a été démontrée par Waldhausen pour une large classe de groupes [24].

Les conjectures 1 et 2 ont été démontrées en particulier pour les variétés résolubles et les variétés riemanniennes plates [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. W. ANDERSON - Chain functors and homology theories, Symp. Algebraic Topology, Lecture Notes in Math., 249 (1971), Springer-Verlag.

[2] A. BOREL - Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. t. 7 (1974), 235-272.

[3] D. BURGHELEA and R. LASHOF - The homotopy structure of the group of automorphisms of manifolds in stability ranges and some new functors, polycopié.

[4] D. BURGHELEA and R. LASHOF - Stability of concordances and the suspension homomorphism, Ann. of Math., 105(1977), 449-472.

[5] D. BURGHELEA, R. LASHOF and M. ROTHENBERG - Groups of automorphisms of manifolds, Lecture Notes in Math., 473 (1975), Springer-Verlag.

[6] J. CERF - La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, Pub. Math. I.H.E.S., 39 (1970), 5-173.

[7] M. M. COHEN - Simplicial structures and transverse cellularity, Ann. of Math., 85 (1967), 218-245.

[8] T. FARRELL and W. C. HSIANG - On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of discs, spheres and aspherical manifolds, Proc. Symp. Pure Math., vol. 32 (1978) [Amer. Math. Soc. Summer Institute Stanford, 1976].

[9] D. GRAYSON (after D. QUILLEN) - Higher algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math., 551 (1976), 217-240, Springer-Verlag.

[10] A. HATCHER - Higher simple homotopy theory, Ann. of Math., 102 (1975), 101-137.

[11] A. HATCHER - Concordance spaces, higher simple homotopy theory and applications, Proc. Symp. Pure Math., vol. 82 (1978) [Amer. Math. Soc. Summer Institute Stanford, 1976].

[12] A. HATCHER and J. WAGONER - Pseudo-isotopies of compact manifolds, Astérisque n° 6,(1973), Soc. Math. de France.

[13] W. C. HSIANG - On $\pi_i(\mathrm{Diff}(M^n))$, polycopié.

[14] K. IGUSA - Postnikov invariants and pseudo-isotopy, polycopié.

[15] R. KIRBY and L. SIEBENMANN - Foundational essays on topological manifolds, smoothing and triangulations, Ann. of Math. Studies, Princeton, 88.

[16] J.-L. LODAY - K-théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., t. 9 (1976), 309-377.

[17] J.-L. LODAY - K-théorie algébrique des anneaux de groupes, en préparation.

[18] C. MORLET - Plongements et automorphismes de variétés, Cours Peccot 1969 (épuisé).

[19] P. MAY - A_∞-ring spaces and algebraic K-theory, polycopié.

[20] D. QUILLEN - Cohomology of groups, Actes Congrès Intern. Math., t.2 (1970), 47-51.

[21] D. QUILLEN - Higher algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math., 341 (1973), 85-147, Springer-Verlag.

[22] G. SEGAL - Categories and cohomology theories, Topology, 13 (1974), 293-312.

[23] I. A. VOLODINE - Groupes de Whitehead et pseudo-isotopie généralisés, Uspekhi Mat. Nauk, 27:5 (1972), 229-230 [en russe].

[24] F. WALDHAUSEN - Algebraic K-theory of generalized free products, Ann. of Math., à paraître.

[25] F. WALDHAUSEN - Algebraic K-theory of topological spaces I, Proc. Symp. Pure Math., vol. 32 (1978) [Amer. Math. Soc. Summer Institute, Stanford, 1976]

[26] F. WALDHAUSEN - Algebraic K-theory of topological spaces, en préparation.

[27] C. T. C. WALL - Surgery on compact manifolds, Academic Press, 1970.

[28] J. H. C. WHITEHEAD - Simple homotopy types, Amer. J. Math., 72 (1950), 1-57.

[29] M. ZISMAN - Suite spectrale d'homotopie et ensembles simpliciaux, Publ. de l'Université de Grenoble (1975).

[30] D. BURGHELEA and R. LASHOF - Automorphisms of manifolds a survey, Proc. Symp. Pure Math., vol. 32.