JEAN-LOUIS VERDIER

Équations différentielles algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 512, p. 101-122

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__101_0>

Séminaire BOURBAKI
30e année, 1977/78, n° 512

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

par Jean-Louis VERDIER

Des aspects algébriques de la théorie des équations différentielles ont fait ces dernières années l'objet de nombreux travaux.

En étudiant l'équation de Schrödinger à une variable, et à coefficients périodiques, Novikov [12], McKean et Van Moerbeke [10] ont montré que l'étude de certaines de ces équations (nombre fini de zones d'instabilité) se ramenait à la théorie des intégrales abéliennes hyperelliptiques et que ces opérateurs différentiels particuliers étaient caractérisés par le fait qu'ils possédaient une grosse algèbre commutante d'opérateurs différentiels. On peut aussi les caractériser comme solution d'un système hamiltonien en involution.

Kričever dans [5] reprend la question et propose d'étudier systématiquement les algèbres commutatives d'opérateurs différentiels : à de telles algèbres, il associe des courbes algébriques munies de différentes structures, et il établit ainsi un dictionnaire qui fonctionne dans les deux sens dans les bons cas.

Un des aspects les plus intéressants de la théorie est qu'elle permet d'étudier les équations variationnelles associées, par exemple les équations de Korteweg-de Vries, et les équations du type Gordon-Sinus, et de donner des solutions périodiques ou quasi-périodiques de ces équations (solitons).

De bons articles d'exposition ont été écrits sur ce sujet et ont couvert à peu près tous les aspects [2], [7], [8], [11].

Nous ne prétendons pas donner ici un exposé systématique. Nous nous contenterons de faire quelques pas sur le chemin tracé par Kričever. En particulier, tout l'aspect calcul variationnel et système hamiltonien ([3], [4]) qui pourrait faire l'objet d'un autre exposé n'est pas traité ici.

Notre bibliographie est squelettique. Nous renvoyons pour une bibliographie complète aux articles d'exposition déjà cités.

1. Algèbres commutatives d'opérateurs différentiels

Notons $\mathcal{D} = \mathbf{C}\{z\}[D]$, $D = \frac{\partial}{\partial z}$, l'algèbre des opérateurs différentiels en une variable z , à coefficients séries convergentes en z . Soit $L \in \mathcal{D}$ un opérateur d'ordre > 0 et notons $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs $M \in \mathcal{D}$ qui commutent à L . L'idée fondamentale et qui n'est pas neuve est d'utiliser $\mathcal{A}$ pour étudier L . Montrons d'abord que $\mathcal{A}$ est commutative. Cela résulte des lemmes suivants :

Lemme 1.- Soient $L = a_0 D^{\ell} + a_1 D^{\ell-1} + \ldots + a_{\ell}$, $\operatorname{ord} L = \ell > 0$, et $K = b_0 D^k + b_1 D^{k-1} + \ldots + b_k$ deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $\operatorname{ord}[K,L] < k+\ell-1$. Alors il existe un $\alpha \in \mathbf{C}$, tel que $b_0^{\ell} = \alpha a_0^k$. Si de plus a_0 et b_0 sont des fonctions constantes et si $\operatorname{ord}[K,L] < k+\ell-2$, alors il existe α et $\beta \in \mathbf{C}$ tels que $b_1 = \alpha a_1 + \beta$.

Résulte des équations différentielles qu'on obtient en traduisant les hypothèses.

Lemme 2.- Soient $A \subset \mathcal{D}$ une sous-algèbre commutative et $M \in \mathcal{D}$. Il existe $p \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ tel que pour tout $L \in A$, $\operatorname{ord} L > 0$, on ait $\operatorname{ord}[M,L] = \operatorname{ord} L + p$.

Supposons que A possède des éléments d'ordre > 0 . Posons $p(L) = \operatorname{ord}[M,L] - \operatorname{ord} L$ et $p = \sup p(L)$ pour $L \in \mathcal{A}$ et $\operatorname{ord} L > 0$. La borne supérieure est atteinte car $p(L) \leq \operatorname{ord} M - 1$. Pour $L \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $[M,L^n] = \sum_{i=0}^{n-1} L^i[M,L]L^{n-i-1} = n\,L^{n-1}[M,L]$ + termes d'ordre inférieur. Donc $p(L^n) = p(L)$. Soit $K \in \mathcal{A}$ tel que $p(K) = p$ et $\operatorname{ord} K = k > 0$. Pour tout $L \in \mathcal{A}$ tel que $\operatorname{ord} L = \ell > 0$, il existe d'après le lemme 1 un $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$, tel que $L^k = \alpha K^{\ell} + R$ et $\operatorname{ord} R < k\ell$. On a $\operatorname{ord}[M,R] = p(R) + \operatorname{ord} R < p+k\ell = \operatorname{ord}[M,K^{\ell}]$. On déduit donc de $[M,L^k] = \alpha[M,K^{\ell}] + [M,R]$, l'égalité $\operatorname{ord}[M,L^k] = \operatorname{ord}[M,K^{\ell}]$, d'où $p(L) = p(L^k) = p(K^{\ell}) = p$.

Il résulte alors du lemme 2 que tout opérateur qui commute à L , commute aux éléments de $\mathcal{A}$ et par suite que $\mathcal{A}$ est commutative.

Nous dirons dans la suite que L est un opérateur elliptique lorsque son coefficient dominant est une fonction de z non nulle en $z = 0$. Lorsque L est elliptique, il résulte du lemme 1 que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des opérateurs elliptiques.

Nous nous plaçons désormais dans un cadre un peu plus général : $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{D}$ qui possède un élément d'ordre > 0 . Les sous-algèbres maximales parmi celles-ci sont exactement les algèbres commutantes d'opérateurs d'ordre > 0 . Lorsqu'un élément de $\mathcal{A}$ d'ordre > 0 est elliptique, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont elliptiques. Nous dirons alors que $\mathcal{A}$ est elliptique.

Notons pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ le sous-espace des opérateurs de degré $\leq i$. On obtient ainsi une filtration croissante de $\mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, $\mathcal{A}$ est une algèbre <u>filtrée</u>.

PROPOSITION 1.– a) <u>Pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i$ <u>est un espace vectoriel de dimension au plus</u> 1 . <u>L'algèbre</u> $\mathrm{gr}\mathcal{A} = \bigoplus_i \mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i$ <u>est intègre</u>.

b) $\mathcal{A}$ <u>est une algèbre intègre de type fini de dimension</u> 1 .

L'assertion a) résulte du lemme 1 et l'assertion b) est une conséquence de a).

2. Sous-algèbres de $\mathcal{D}$

Notons $\mathcal{E}$ le module des distributions à support dans l'origine. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ a pour base $\delta^{(o)},\ldots,\delta^{(i)},\ldots$, $i \in \mathbb{N}$, où $\delta^{(o)}$ est la mesure de Dirac et où $\delta^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial z^i}\delta^{(o)}$. Faisons opérer $\mathcal{D}$ à droite sur $\mathcal{E}$ par transposition de sorte que pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$ (l'espace des fonctions holomorphes à l'origine), tout $S \in \mathcal{E}$, tout $L \in \mathcal{D}$, on a

$$(2.1) \qquad \langle S.L , \varphi\rangle = \langle S , L\varphi\rangle \ .$$

Pour tout voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}$, posons $\Gamma(U,\mathcal{E}) = \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$ où $\mathcal{O}(U)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur U . On a $\varinjlim \Gamma(U,\mathcal{E}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$. Posons $E = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$.

Soit $L \in \mathcal{D}$. Pour tout t suffisamment proche de $\mathcal{O} \in \mathbb{C}$, notons L_t l'opérateur déduit de L par la translation $z \mapsto z + t$. Soit U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in U$, L_t soit défini. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \delta^{(i)}.L_t$ est un élément de $\Gamma(U,\mathcal{E})$. Son germe dans E est noté $\delta^{(i)}L$. On a donc pour t voisin de 0 , l'égalité dans $\mathcal{E}$:

$$(2.2) \qquad \delta^{(i)}L(t) = \delta^{(i)}.L_t \ .$$

On définit ainsi une structure de $\mathcal{D}$-module à droite sur E qui commute aux multiplications à gauche par les éléments de $\mathcal{O}$. On constate immédiatement que l'application

$$(2.3) \qquad \sum \varphi_i(t)\, \delta^{(i)} \longmapsto \sum \varphi_i(z)\, D^i$$

de E dans $\mathcal{D}$ est un isomorphisme du $\mathcal{D}$-module E dans $\mathcal{D}$ considéré comme module à droite sur lui-même. Comme la multiplication à gauche dans $\mathcal{D}$ par $D \in \mathcal{D}$, commute aux multiplications à droite, on en déduit, en transportant par l'isomorphisme (2,3) un homomorphisme de $\mathcal{D}$-modules

(2.4) $$\nabla : E \to E .$$

On a

(2.5) $$\begin{cases} \nabla \delta^{(i)} = \delta^{(i+1)} , & i \in \mathbb{N} , \\ \nabla(\varphi(t)s) = \varphi'(t)s + \varphi(t)\nabla s , & \varphi \in \mathcal{O} , \ s \in E . \end{cases}$$

Nous dirons que ∇ est une $\mathcal{O}$-connexion.

Pour $i \in \mathbb{N}$, notons E_i le sous-$\mathcal{O}$-module de E engendré par les $\delta^{(j)}$, $j \leq i$. On définit ainsi une filtration sur E faisant de E un $\mathcal{O}$-$\mathcal{D}$-module filtré. Pour tout i, on a $\nabla(E_i) \subset E_{i+1}$ et l'application $\mathcal{O}$-linéaire $E_i/E_{i-1} \to E_{i+1}/E_i$ induite par ∇ est un isomorphisme.

En restreignant les opérations de $\mathcal{D}$ sur E à une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$, on obtient :

(ACD 0) Une algèbre commutative filtrée $\mathcal{A}$ telle que $gr(\mathcal{A})$ soit intègre et que $[\mathcal{A}_{i+1}/\mathcal{A}_i : \mathbb{C}] \leq 1$ pour tout i ;

(ACD 1) Un $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$-module filtré : $E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E = \bigcup_i E_i$;

(ACD 2) Une $\mathcal{O}$-connexion $\nabla : E \to E$;

(ACD 3) Un élément $\delta^{(o)} \in E_o$;

et ces objets ont les propriétés suivantes :

(ACD 4) $gr(E) = \oplus E_i/E_{i-1}$ est un $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} gr(\mathcal{A})$-module fidèle ;

(ACD 5) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\nabla E_i \subset E_{i+1}$;

(ACD 6) E_o est un $\mathcal{O}$-module libre de base $\delta^{(o)}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$ l'application $\mathcal{O}$-linéaire $E_i/E_{i-1} \to E_{i+1}/E_i$ induite par ∇ est un isomorphisme.

PROPOSITION 2.- _Soit_ $(\mathcal{A}, E, \nabla, \delta^{(o)})$ _des données comme ci-dessus_. _Pour tout_ $f \in \mathcal{A}$, _il existe un et un seul opérateur_ $L_f = \sum a_i(z)D^i \in \mathcal{D}$ _tel que_ $(\sum a_i(t)\nabla^i)\delta^{(o)} = \delta^{(o)}f$. _L'application_ $f \mapsto L_f$ _est un isomorphisme d'algèbre filtrée de_ $\mathcal{A}$ _sur une sous-algèbre de_ $\mathcal{D}$.

La démonstration est laissée au lecteur. Remarquons de plus que le $\mathcal{A}$-module à droite $\mathcal{E} = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{O}} E$ s'identifie au module des distributions de support l'origine.

PROPOSITION 3.- <u>Pour que l'application</u> $f \mapsto L_f$ <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>dans</u> $\mathcal{D}$ <u>décrite dans la prop. 2 ait pour image une sous-algèbre elliptique</u>, <u>il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite</u> :

(ACD 7) $gr(\mathcal{E})$ <u>est un</u> $gr(\mathcal{A})$-<u>module sans torsion et</u> E <u>est un</u> $\mathcal{O} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}$ -<u>module de type fini</u>.

Démonstration immédiate. Remarquons que la propriété (ACD 7) implique (ACD 4).

Le cas des sous-algèbres commutatives non elliptiques (donc composées d'opérateurs singuliers) est mystérieux pour le rédacteur. En particulier, il peut se produire que E ne soit pas un $\mathcal{O} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}$-module de type fini. Mais on sait que, dans ce cas, il faut distinguer entre les solutions formelles et les solutions convergentes des opérateurs, et comme le module E décrit les solutions formelles des opérateurs de $\mathcal{A}$, il n'est peut être pas adapté à l'étude de ces algèbres.

3. Traduction géométrique

Les objets algébriques introduits dans le n° 2 correspondent à des objets géométriques que nous allons décrire. Il s'agit d'un exercice élémentaire de géométrie algébrique dont nous proposons l'énoncé au lecteur.

Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, voisinage de 0 , X une courbe algébrique complète, irréductible réduite, $C \in X$ un point lisse, M un faisceau cohérent sur $U \times X$ plat sur U , tel que la restriction $\mathcal{M}$ de M à $X = \{0\} \times X$ soit sans torsion. Alors la restriction M_C de M à $U \times C = U$ est localement libre au voisinage de 0 et nous prendrons U assez petit pour que M_C soit localement libre. Appelons <u>structure parabolique</u> sur M le long de $U \times C$, la donnée d'un drapeau maximal de sous-faisceaux

$$0 = F_o(M_C) \subset \ldots \subset F_r(M_C) = M_C .$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $\alpha(i)$ l'entier tel que $0 < \alpha(i)r - i \leq r$. Posons $M_i = (\ker(M \to M_C / F_{\alpha(i)r-i}(M_C)))(\alpha(i)(U \times C))$. On obtient ainsi une suite infinie de faisceaux emboîtés

$$\ldots \subset M_o = M \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r \subset \ldots .$$

On a $M_i(U \times C) = M_{i+r}$ et M_{i+1}/M_i est un faisceau sur $U \times C$ localement libre de rang 1 . Réciproquement, la donnée d'une suite infinie de faisceaux emboîtés soumise aux conditions ci-dessus définit sur M une structure parabolique en posant $F_i(M_C) = \mathrm{Im}(M_{i-r} \to M_C)$.

Donnons-nous une structure parabolique sur M . Elle induit une structure parabolique sur $\mathcal{M}$. Nous dirons que M muni de sa structure parabolique est une <u>déformation plate à un paramètre de</u> $\mathcal{M}$.

Appelons abusivement U-connexion sur M adaptée à la structure parabolique et notons $\nabla : M \to M$, une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\varinjlim M_i \to \varinjlim M_i$ qui augmente le degré de 1 et telle que $\nabla(as) = a's + a\nabla s$ pour toute fonction holomorphe a sur U . Une telle U-connexion induit des homomorphismes $\mathcal{O}_U$-linéaires $M_i/M_{i-1} \to M_{i+1}/M_i$.

Considérons alors des objets $(X, C, \mathcal{M}, M, \nabla)$ munis des structures et possédant les propriétés suivantes :

(CD 1) X est une courbe algébrique complète irréductible et réduite, et C est un point lisse de X .

(CD 2) $\mathcal{M}$ est un faisceau cohérent sur X muni d'une structure parabolique en C et tel que $h^0(X,\mathcal{M}) = h^1(X,\mathcal{M}) = 0$.

(CD 3) Une famille d'isomorphismes $\Phi \in \bigoplus_0^{r-1} \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}, \mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i)$ où r est le rang générique de $\mathcal{M}$ et une section non nulle σ de $\mathcal{M}_1$ sur X .

(CD 4) M est un germe de déformation plate à un paramètre de $\mathcal{M}$.

(CD 5) ∇ est une $\mathcal{O}$-connexion adaptée à la structure parabolique de M qui induit une famille d'homomorphismes $\mathcal{O}$-linéaires $\Phi_\nabla \in \bigoplus_0^{r-1} \mathrm{Hom}(M_i/M_{i-1}, M_{i+1}/M_i)$ qui prolonge Φ .

(CD 6) Une section s de M_1 qui prolonge σ .

PROPOSITION 4.- <u>Il existe une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres elliptiques de</u> $\mathcal{D}$ <u>et les classes d'isomorphismes d'objets</u> $(X, C, \mathcal{M}, M, \nabla)$ <u>comme ci-dessus</u>.

Nous nous bornerons à indiquer la correspondance dans les deux sens. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ une sous-algèbre elliptique. Il lui correspond d'après le n° 2 $(\mathcal{A}, E, \nabla, \delta^{(o)})$ soumis aux conditions (ACD i) , $0 \leq i \leq 7$. Posons alors $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$, $F_n = \bigoplus_{i=0}^{\infty} F_{n,i}$ où pour tout i , $F_{n,i} = E_{i-1+n}$. On obtient ainsi des modules gradués de type fini (ACD 7) sur l'algèbre graduée $\mathcal{O} \otimes_C B$, des inclusions $\ldots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \ldots$, une $\mathcal{O}$-connexion B-linéaire $\nabla : F \to F$

où $F = \varinjlim F_n$, qui augmente le degré d'une unité, un élément $\delta^{(0)} \in F_{1,0} = E_o$. Notons $m_C \subset B$ l'idéal gradué $(m_C)_i = \mathcal{A}_{i-1}$. Posons $X = \mathrm{Proj}\ B$, $M_n = \mathrm{Proj}\ F_n$, $C = \mathrm{Proj}\ B/m_C$. On a des inclusions $\ldots \subset M_o \subset M_1 \subset \ldots$. On constate que $\mathrm{Proj}\ \nabla$ une $\mathcal{O}$-connexion qui augmente le degré d'une unité, et que $\delta^{(o)}$ définit une section s de M_1 . On pose alors $\mathcal{M} = M/\{0\} \times X$ et $\sigma = s/\{0\} \times X$ et on vérifie les propriétés (CD i) , $1 \leq i \leq 6$.

Réciproquement, soit $(X , C , \mathcal{M} , M , \nabla)$ possédant les propriétés (CD i) , $1 \leq i \leq 6$. D'après les prop. 2 et 3, il suffit de construire $(\mathcal{A} , E , \nabla , \delta^{(o)})$ soumis aux conditions (ACD i) , $0 \leq i \leq 7$. Notons alors $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions méromorphes sur X et holomorphes sur $X - C$ et r le rang générique de $\mathcal{M}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $\alpha(i)$ l'entier tel que $0 \leq i - \alpha(i)r < r$. Posons alors $\mathcal{A}_i = \Gamma(X , \mathcal{O}_X(\alpha(i)C))$. On obtient ainsi une algèbre filtrée. Notons $\pi : C \times X \to C$ la première projection, de sorte que pour tout i , $E_{i-1} = \pi_* M_i$ est un $\mathcal{O}$-module de type fini. On a des inclusions $\ldots \subset E_i \subset E_{i+1} \subset \ldots$ et $\pi_*\nabla$ est une $\mathcal{O}$-connexion qui augmente le degré de 1 . Comme $M_i(C) = M_{i+r}$, l'algèbre filtrée $\mathcal{A}$ opère sur le module filtré $E = \varinjlim E_i$ et $\pi_*\nabla$ est $\mathcal{A}$-linéaire. Enfin la section s fournit un élément $\delta^{(o)} \in E_o$. Les propriétés (ACD 6) et (ACD 7) résultent de $h^o(X,\mathcal{M}) = h^1(X,\mathcal{M}) = 0$.

Soient $\mathcal{A}$ une sous-algèbre elliptique de $\mathcal{D}$ et $(X , C , \mathcal{M}, M , \nabla)$ l'objet géométrique correspondant. D'après la construction ci-dessus, $X - C$ est le spectre de l'algèbre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}/X - C$ est le faisceau associé au $\mathcal{A}$-module $\mathcal{E}$ des distributions à l'origine. Notons $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ l'espace vectoriel relatif sur X , associé à $\mathcal{M}$ ($\mathbb{V}(\mathcal{M}) = \mathrm{Spec\ Sym}\ \mathcal{M}$) .

PROPOSITION 5.- _Soit_ $x \in X - C$. _Notons_ $\lambda_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ _le caractère_ $f \mapsto f(x)$. _La fibre en_ x _de_ $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ _s'identifie à l'espace des fonctions_ $\varphi \in \mathcal{O}$ _tels que pour tout_ $f \in \mathcal{A}$ _on ait_

$$f.\varphi = \lambda_x(f)\varphi .$$

Notons $\mathbb{C}_x$ le $\mathcal{A}$-module $\mathbb{C}$ associé au caractère λ_x . On a $\mathbb{V}(\mathcal{M})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathbb{C}_x)$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E},\mathbb{C})$ s'identifie aux séries formelles, $\mathbb{V}(\mathcal{M})_x$ s'identifie aux séries formelles φ telles que $f.\varphi = \lambda_x(f)\varphi$ pour tout $f \in \mathcal{A}$ et on sait que ces séries formelles sont nécessairement convergentes car $\mathcal{A}$ est elliptique.

Le fibré à singularité $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ est appelé parfois le fibré des _fonctions de Bloch_.

4. Le théorème de Kričever

Le problème de Kričever consiste à examiner dans quelle mesure les données (CD 1), (CD 2), (CD 3), c'est-à-dire la courbe pointée (X,C), le faisceau $\mathcal{M}$ muni de sa structure parabolique et (Φ,σ) permettent de reconstituer la déformation M, la connexion ∇ et la section s.

Donnons nous donc $(X, C, \mathcal{M}, \Phi, \sigma)$ soumis à (CD i), $1 \leq i \leq 3$. Remarquons tout d'abord que les déformations plates de $\mathcal{M}$ cherchées doivent admettre au voisinage de tout point $x \in X$ différent de C, une $\mathcal{O}$-connexion. Ces déformations sont donc triviales localement sur X. Notons alors $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ le foncteur qui à toute algèbre artinienne A associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de déformations plates, triviales localement sur X, de $\mathcal{M}$ sur $(\mathrm{Spec}\, A) \times X$. Pour tout entier k, notons $\mathrm{End}^k \mathcal{M}$ le faisceau des endomorphismes méromorphes de $\mathcal{M}$ qui pour tout i envoie $\mathcal{M}_i$ dans $\mathcal{M}_{i+k}$.

PROPOSITION 6.- a) <u>Le faisceau $\mathcal{M}$ admet une déformation formelle triviale localement sur X et semi-universelle. Cette déformation $(\hat{P}_{\mathcal{M}}, 0)$ est universelle lorsque</u> $h^0(X, \mathrm{End}^0 \mathcal{M}) = 1$.

b) <u>Le schéma $(\hat{P}_{\mathcal{M}}, 0)$ est lisse.</u>

c) <u>La déformation semi-universelle $(\hat{P}_{\mathcal{M}}, 0)$ est algébrisable.</u>

Donnons quelques indications sur la démonstration. Il résulte facilement du critère de Schlessinger que $\mathrm{Def}(\mathcal{M})$ admet une enveloppe, donc est formellement semi-représentable d'après le théorème d'existence de Grothendieck. On calcule aisément l'espace tangent de Zariski à $(\hat{P}_{\mathcal{M}}, 0)$. On a $T^1 = H^1(X, \mathrm{End}^0 \mathcal{M})$. L'assertion b) se vérifie en montrant que pour tout $\xi \in T^1$, il existe une courbe formelle lisse dans $\hat{P}_{\mathcal{M}}$ tangente à ξ. L'assertion c) résulte du théorème de M. Artin.

Il existe donc, d'après la prop. 6, un voisinage ouvert $P_{\mathcal{M}}$ de 0 dans $H^1(X, \mathrm{End}^0 \mathcal{M})$ et une déformation analytique plate de $\mathcal{M}$ sur $P_{\mathcal{M}} \times X$ qui (semi-) représente les germes de déformations de $\mathcal{M}$ triviales localement sur X.

Notons $J_{\mathcal{M}}$ le module local des déformations plates de $\mathcal{M}$ (sans structure parabolique) triviales localement sur X. L'oubli de la structure parabolique fournit une application submersive $p : P_{\mathcal{M}} \to J_{\mathcal{M}}$. Notons $\Delta_{\mathcal{M}}$ le fibré de base $J_{\mathcal{M}}$ des drapeaux de la fibre en C. Le souvenir retrouvé de la structure parabolique fournit une immersion $\iota : P_{\mathcal{M}} \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{M}}$.

PROPOSITION 7.- <u>Si</u> $h^0(X, \mathrm{End}\, \mathcal{M}) = h^0(X, \mathrm{End}^0 \mathcal{M})$ <u>et en particulier si</u>

$h^0(X, \mathrm{End}\,\mathcal{M}) = 1$, ι <u>est une immersion ouverte</u>.

Considérons la suite exacte $0 \to \mathrm{End}^0\mathcal{M} \to \mathrm{End}\,\mathcal{M} \to V_C \to 0$ où $V_C = \mathrm{End}(\mathcal{M}_C)/B_C$ est un $\mathcal{O}_C$-espace vectoriel de rang $\frac{r(r-1)}{2}$. On a donc une suite exacte $0 \to V_C \to H^1(X, \mathrm{End}^0\mathcal{M}) \to H^1(X, \mathrm{End}\,\mathcal{M}) \to 0$. L'application $H^1(X, \mathrm{End}^0\mathcal{M}) \to H^1(X, \mathrm{End}\,\mathcal{M})$ s'identifie à l'application linéaire tangente à p et V_C s'identifie à l'espace tangent vertical de $\Delta_{\mathcal{M}} \to J_{\mathcal{M}}$,d'où la proposition.

Le foncteur $\mathcal{M} \to \overset{r}{\wedge}\mathcal{M}$ $(r = \text{rang de } \mathcal{M})$ fournit une application $J_{\mathcal{M}} \to J_{\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}}$ d'où par composition une application $\pi : P_{\mathcal{M}} \to J_{\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}}$. Cette application est une submersion dont l'application linéaire tangente est l'application $H^1(X, \mathrm{End}^0\mathcal{M}) \to H^1(X, \mathrm{End}\overset{r}{\wedge}\mathcal{M})$ déduite de la trace. L'algèbre $\mathrm{End}\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative sans torsion génériquement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Donc $\mathrm{End}\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}$ est l'algèbre d'un revêtement fini birationnel X' de X et $J_{\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}}$ est un ouvert de la jacobienne de X' . En particulier lorsque $r = 1$, $P_{\mathcal{M}}$ est isomorphe à $J_{\mathcal{M}}$ et la déformation est $j \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathrm{End}\,\mathcal{M}} \mathcal{L}_j$ où $j \mapsto \mathcal{L}_j$ est le faisceau de Poincaré sur $J_{\mathcal{M}} \times X'$.

Notons $pr : P_{\mathcal{M}} \times X \to P_{\mathcal{M}}$ la première projection et M la déformation de $\mathcal{M}$ sur $P_{\mathcal{M}} \times X$. On a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to pr^*\Omega^1_{P_{\mathcal{M}}} \otimes M \to \mathcal{P}^1 M \to M \to 0$$

où $\mathcal{P}^1 M$ est le faisceau des 1-jets de sections de M relatifs à la projection $P_{\mathcal{M}} \times X \to X$. Cette suite exacte définit donc un élément de $\mathrm{Ext}^1(P_{\mathcal{M}} \times X ; M , pr^*\Omega^1_{P_{\mathcal{M}}} \otimes M)$ et on constate, en tenant compte de la trivialité locale de la variation et de la structure parabolique, que cet élément provient d'une classe $K.S \in H^0(P_{\mathcal{M}} \times X ; \mathrm{End}^0(M) \otimes pr^*\Omega^1_{P_{\mathcal{M}}})$; c'est-à-dire d'une section sur $P_{\mathcal{M}}$ de $R^1pr_*\,\mathrm{End}^0(M) \otimes pr^*\Omega^1_{P_{\mathcal{M}}}$ faisceau qui s'écrit encore $\mathcal{H}om(T^1_{P_{\mathcal{M}}} , R^1pr_*\,\mathrm{End}^0 M)$. Donc $K.S$ s'interprète comme un morphisme $T^1_{P_{\mathcal{M}}} \to R^1pr_*\,\mathrm{End}^0\mathcal{M}$ et s'appelle le <u>morphisme de Kodaira-Spencer</u>. En chaque point $y \in P_{\mathcal{M}}$, $(K.S)_y$ envoie $T^1_{P_{\mathcal{M}},y}$ dans $H^1(X, \mathrm{End}^0 M_y)$ qui est la fibre de $R^1pr_*\,\mathrm{End}^0\mathcal{M}$ et en $0 \in P_{\mathcal{M}}$, $(K.S)_0$ est un isomorphisme.

Le morphisme de Kodaira-Spencer mesure l'obstruction à construire une $P_{\mathcal{M}}$-

connexion sur M qui préserve la filtration parabolique (en conservant les degrés). Mais nous cherchons une connexion qui augmente les degrés d'une unité. L'obstruction correspondante se décrit ainsi : on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathrm{End}^o M \to \mathrm{End}^1 M \to \bigoplus_1^r \mathrm{Hom}(M_i/M_{i-1}\,,\, M_{i+1}/M_i) \to 0\,,$$

d'où une suite exacte

$$(4.1)\qquad \begin{tikzcd} \bigoplus_1^r \mathrm{Hom}(M_i/M_{i-1}\,,\, M_{i+1}/M_i) \arrow[r, "i"] & R^1 pr_* \mathrm{End}^o M \arrow[r] & R^1 pr_* \mathrm{End}^1 M \arrow[r] & 0 \\ & T^1_P \arrow[u, dashed, "K.S"] \arrow[ur, dashed, "K.S^1"'] & & \end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme surjectif $K.S^1 : T^1_{P_{\mathcal{M}}} \to R^1 pr_* \mathrm{End}^1 M$, qui mesure l'obstruction cherchée. Enfin comme $(K.S)_o$ est un isomorphisme, on déduit de (4.1) une application

$$i_o : \bigoplus_1^r \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}\,,\, \mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i) \to T^1_{P_{\mathcal{M}},0}\,,$$

la donnée (CD 3) fournit alors un élément $i_o(\Phi) \in T^1_{P_{\mathcal{M}},0}$.

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> U <u>un voisinage ouvert de</u> $\sigma \in \mathbf{C}$ et $\gamma : U \to P$, $\gamma(0) = 0$, <u>une courbe analytique</u>. <u>Soit</u> ∇ <u>une</u> U-<u>connexion sur</u> $\gamma^* M$ <u>adaptée à la structure parabolique et telle que</u> $(\Phi_\nabla)_o = \Phi$. <u>Alors</u>

1) $(K.S^1) \circ d\gamma = 0$

2) $d\gamma(o)(\frac{\partial}{\partial t}) = i_o(\Phi)$.

<u>Réciproquement</u>, <u>supposons</u> 1) <u>et</u> 2) <u>et supposons de plus que pour tout</u> $t \in U$, $h^o(X\,,\,\mathrm{End}^1 M_t) = h^o(X\,,\,\mathrm{End}^1 \mathcal{M})$. <u>Alors</u>, <u>il existe sur</u> $\gamma^* M$ <u>une</u> U-<u>connexion</u> ∇ <u>adaptée à la structure parabolique et telle que</u> $(\Phi_\nabla)_o = \Phi$.

La première assertion est claire. Démontrons la réciproque. Il existe sur $\gamma^* M$ une connexion $\tilde{\nabla}$ adaptée et telle $i_o(\Phi_{\tilde{\nabla}})_o = i_o(\Phi)$. De la suite exacte $\mathrm{End}^1 \mathcal{M} \to \bigoplus_1^r \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}\,,\, \mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i) \xrightarrow{i_o} T^1_{P_{\mathcal{M}},0}$, on déduit qu'il existe un endomorphisme u de $\mathcal{M}$ qui induit $(\Phi_{\tilde{\nabla}})_o - \Phi$. L'hypothèse supplémentaire implique qu'un tel u est la restriction à X d'un $v \in \mathrm{End}^1 \gamma^* M$. La connexion $\nabla = \tilde{\nabla} - v$ convient.

La condition supplémentaire dans la réciproque de la prop. 7 est automatiquement satisfaite lorsque $R^1 pr_* \mathrm{End}^1 M$ est localement libre sur $P_{\mathcal{M}}$. C'est le cas

<u>lorsque</u> $\mathcal{M}$ <u>est de rang</u> 1 . C'est aussi le cas lorsque $h^0(X, \mathrm{End}^1 \mathcal{M})$ prend la valeur minimum 1 , en vertu du théorème de semi-continuité. On a $h^0(X, \mathrm{End}^1 \mathcal{M}) = 1$ lorsque les $\mathcal{M}_i$ sont stables c'est-à-dire que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_i$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{M}_i$, on a

$\chi(\mathcal{F}) < \mathrm{rg}\,\mathcal{F} \cdot \dfrac{\chi(\mathcal{M}_i)}{r}$ [11]. Dans tous ces cas les données (CD i) , $1 \leq i \leq 3$, peuvent être complétées par des constructions (CD i) , $4 \leq i \leq 6$ et par suite donnent naissance à des sous-algèbres elliptiques de $\mathcal{D}$ (prop. 4). Il faut remarquer que ces algèbres ne sont pas en général uniquement déterminées par (CD 1) , (CD 2) , (CD 3) . Elles dépendent essentiellement et en général du choix de $(r-1)$ fonctions analytiques à dérivées $\not\equiv 0$ et par ailleurs arbitraires.

Posons $W = \ker(K.S^1)$. On obtient un sous-faisceau cohérent de $T^1_{P_{\mathcal{M}}}$ qui n'est pas toujours localement libre. Il s'agit, d'après la prop. 7, de trouver des courbes intégrales de cette "distribution" (en un sens généralisé).

PROPOSITION 8.- 1) <u>Lorsque</u> $r > 1$, W <u>est dans l'espace tangent vertical de</u> $\pi : P_{\mathcal{M}} \to J_{\overset{r}{\Lambda}\mathcal{M}}$.

2) <u>Supposons que</u> $h^0(X, \mathrm{End}\,\mathcal{M}) = 1$. <u>Soit</u> T_Δ <u>l'espace tangent vertical de</u> $p : P_{\mathcal{M}} \to J_{\mathcal{M}}$. <u>Alors</u>, $W \cap T_\Delta$ <u>est un sous-fibré de</u> T_Δ <u>de rang</u> $r-1$ dont les crochets engendrent T_Δ .

3) <u>Sous les hypothèses de</u> 2), $W/W \cap T_\Delta$ <u>est un sous-faisceau de</u> $p^*T_{J_{\mathcal{M}}}$ <u>engendré par une section</u>.

Démontrons 1). Lorsqu'on dispose d'une courbe intégrale γ de W on a sur γ^*M une connexion adaptée à la structure parabolique de M . On en déduit sur $\overset{r}{\Lambda}\gamma^*M$ une connexion a priori méromorphe en $U \times C$ mais dont on vérifie qu'elle est holomorphe. Donc la déformation de $\overset{r}{\Lambda}\gamma^*M$ est triviale. Les démonstrations des assertions 2) et 3) sont laissées au lecteur.

Dans le cas $r > 2$, la distribution W est donc hautement non intégrable.

Dans le cas $r = 2$, et lorsque le genre $g \leq 1$. On peut poursuivre les calculs. On peut aussi donner une description des sous-algèbres elliptiques $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ engendrées par des opérateurs d'ordre 4 et 6 . En genre $g > 1$, $r = 2$, on ne possède pour le moment aucun résultat plus précis.

Le cas le plus important est le cas $r = 1$. Dans ce cas la structure parabolique est triviale et $P_{\mathcal{M}}$ est un germe d'espace principal homogène sous la Jacobienne $\mathrm{Jac}(X')$ où $X' = \mathrm{Spec\ End}\,\mathcal{M}$. On a $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}/\mathcal{M}(-1)\,,\,\mathcal{M}(1)/\mathcal{M}) = T_C$ l'espace tangent à X en C . En chaque point $y \in P_{\mathcal{M}}$ lè sous-espace $W_j \subset T'_{P_{\mathcal{M}}} = H'(X', \mathcal{O}_{X'})$ est engendré par l'image de T_C provenant de la suite exacte

$$T_C \xrightarrow{\omega} H'(X', \mathcal{O}_{X'}) \to H'(X', \mathcal{O}_{X'}(C)) \to 0 .$$

Les trajectoires cherchées sont donc les orbites du sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Jac}(X')$ de vecteur tangent à l'origine $\omega(T_C)$. Soient ϑ une coordonnée locale sur X en C et $\mathcal{W}$ un voisinage de C tel que ϑ ne s'annule pas sur $\mathcal{W} - C$. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, notons L_t le faisceau inversible sur X qui possède deux sections génératrices σ_0 sur $X - C$ et σ_1 sur $\mathcal{W}$ reliées par la relation $\sigma_0/\mathcal{W} - C = e^{t/\vartheta}\,\sigma_1/\mathcal{W} - C$. Alors, il résulte de ce qui précède que la déformation cherchée est $t \mapsto \mathcal{M} \otimes L_t$. La connexion provient de l'unique connexion ∇ sur $t \mapsto L_t$ telle que $\nabla \sigma_0 = 0$.

Disons que deux sous-algèbres elliptiques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}$ sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par changement de variables et par changement de fonctions ($f \mapsto \varphi.f$ où $\varphi(0) \neq 0$) . Résumons les résultats précédants dans le cas $r = 1$.

THÉORÈME (Kričever).- Il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalences de sous-algèbres elliptiques de $\mathcal{D}$ possédant des opérateurs d'ordre premier entre eux et les triples $(X\,,\,C\,,\,\mathcal{M})$ constitués par une courbe complète irréductible et réduite X , un point lisse $C \in X$, un faisceau cohérent $\mathcal{M}$ sur X sans torsion de rang 1 tel que $h^0(X, \mathcal{M}) = h^1(X, \mathcal{M}) = 0$

En effet, les différentes indéterminations dans la construction des objets (CD i) , $1 \leq i \leq 6$, sont les suivantes :

a) Le paramétrage de la courbe γ . Les changements de paramétrages correspondent aux changements de variables.

b) Le choix de $\Phi \in T_C$. Les différents choix correspondent à des changements de variables linéaires.

c) Le choix de la connexion ∇ . Le choix, à isomorphisme de déformation près, est unique sauf lorsque $g = 0$ qui demande un examen particulier.

d) Le choix de la section s . Les changements de sections correspondent aux différents changements de fonctions.

5. Fibré des solutions

Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ une sous-algèbre elliptique et (X, C, M, ∇, s) l'objet géométrique correspondant. Notons $\delta^{(o)} \in H^o(U \times X, M(U \times C))$ la section d'image $s \in H^o(U, M_1/M)$. Posons $\delta^{(i)} = \nabla^i \delta^{(o)}$. Les sections $\delta^{(i)}$, $0 \leq i \leq r-1$, forment une base locale de $M(U \times C)$ au voisinage de $U \times C$. Soit $x \in X = \{0\} \times X$, $x \neq C$, un point lisse où les sections $\delta^{(i)}$ sont linéairement indépendantes. Alors $\nabla^r \delta^{(o)}$ est une section de $M(U \times C)$ au voisinage de $U \times \{x\}$. Par suite, il existe des fonctions $a_i(t,x)$ telles que

$$\nabla^r \delta^{(o)} = \sum_0^{r-1} a_i(t,x)\, \delta^{(i)} .$$

Les fonctions $a_i(t,x)$ sont méromorphes en (t,x) et pour t fixé, méromorphes en x . Comme $\nabla^r \delta^{(o)} \in M_{r+1}$, les $a_i(x,t)$, $i > 0$, sont holomorphes au voisinage de $U \times C$, et $a_o(x,t)$ possède un pôle simple le long de $U \times C$. Considérons alors l'opérateur différentiel

$$S_x = \frac{\partial^r}{\partial z^r} - \sum_0^{r-1} a_i(z,x) \frac{\partial^i}{\partial z^i} . \tag{5.1}$$

On obtient ainsi un opérateur différentiel en la variable z dépendant méromorphiquement de x .

PROPOSITION 9.- <u>Soit</u> $x \in X$ <u>un point général</u>. <u>Notons</u> $\lambda_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ <u>le caractère d'évaluation en</u> $x \in X$. <u>Alors l'espace des fonctions</u> $f \in \mathbb{C}\{z\}$ <u>solutions de</u>

$$Lf = \lambda_x(L) f , \qquad \forall\, L \in \mathcal{A} ,$$

<u>est l'espace des fonctions</u> f <u>telles que</u>

$$S_x f = 0 .$$

Résulte de l'interprétation de $\nabla(\mathcal{M})$ donnée par la prop. 5.

Soit v une coordonnée locale de X en C . Les fonctions $a_i(x,t)$ ont des développements

$$\begin{cases} a_i(x,t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j}(t) v^j & i > 0 , \\ a_o(x,t) = b_{o,-1}(t) v^{-1} + \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_{o,j}(t) v^j , & \end{cases} \tag{5.2}$$

où les fonctions $b_{i,j}(t)$ sont holomorphes.

Réciproquement, la connaissance des fonctions $b_{i,j}$ permet de reconstituer l'algèbre $\mathcal{A}$. En effet, si $x \longmapsto \alpha(x)$ est une fonction méromorphe sur X holomorphe sur $X - C$, l'opérateur différentiel L_α qu'on lui associe s'obtient en compensant successivement les parties polaires de $\alpha\,\delta^{(o)}$ par des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}\{t\}$ des $\nabla^i\,\delta^{(o)}$. Par suite, les coefficients de l'opérateur L_α s'exprime, lorsque $b_{o,-1}(t) = 1$ ce qu'on peut toujours réaliser par un changement de la variable t, comme des polynômes en les $b_{i,j}(t)$ et leurs dérivées.

Lorsque $r > 1$, les $a_i(x,t)$ restent, lorsque t varie, dans des systèmes linéaires fixes. Notons $\delta_o^{(i)}$ les sections de $\mathcal{M}$ obtenues en restreignant les sections $\delta^{(i)}$ à $X = \{0\} \times X$. Posons

$$Wr_o = \delta_o^{(o)} \wedge \cdots \wedge \delta_o^{(r-1)} .$$

On obtient ainsi une section de $\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}$. Supposons pour simplifier que X soit lisse et notons D_{Wr_o} le diviseur de Wr_o. Pour tout diviseur D sur X notons $\mathcal{L}(D)$ l'espace des fonctions méromorphes dont le diviseur majore $-D$.

PROPOSITION 10.- <u>Il existe une fonction holomorphe</u> $t \longmapsto \varphi(t)$, <u>des applications holomorphes</u> $t \longmapsto b_i(t,x) \in \mathcal{L}(D_{Wr_o})$, $1 \leq i \leq r-2$, <u>une application holomorphe</u> $t \longmapsto b_o(t,x) \in \mathcal{L}(D_{Wr_o} + C)$ <u>et un élément</u> $b(x) \in \mathcal{L}(D_{Wr_o})$ <u>tels que</u>

$$(5.3)\qquad \begin{cases} a_{r-1}(t,x) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t) + b(x)} , \\[2ex] a_i(t,x) = \dfrac{b_i(x,t)}{\varphi(t) + b(x)} \\[2ex] a_o(t,x) = \dfrac{b_o(x,t)}{\varphi(t) + b(x)} . \end{cases}$$

Bornons nous à des indications. On a déjà vu que la déformation $\overset{r}{\wedge} M$ de $\overset{r}{\wedge}\mathcal{M}$ est triviale. Il résulte alors des formules de Krammer que le diviseur des $a_i(t)$ est supérieur à un diviseur linéairement équivalent à D_{Wr_o} pour $i > 0$ et $D_{Wr_o} + C$ pour $i = 0$. La forme plus précise (5.3) s'obtient en utilisant la connexion induite par ∇ sur $\overset{r}{\wedge} M$.

Les formules (5.3) permettent de faire des calculs explicites dans certains cas. Dans le cas $r = 1$, l'équation S_x , $x \in X$, s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z} - a(z,x) = 0 .$$

La solution est

$$\psi(z,x) = e^{\int_0^z a(u,x)du} .$$

On a donc

$$a = \psi'/\psi .$$

La fonction ψ s'interprète ainsi. La connexion ∇ donne une U-trivialisation de $M \mid U \times (X - C)$. Soit alors s la section horizontale qui coïncide avec $\delta^{(o)}$ sur $\mathcal{X} = \{0\} \times X$. Alors $\delta^{(o)} = \psi s$. Lorsque X est lisse, on peut, utilisant la description précise de la déformation donnée au n° 4, exprimer ψ à l'aide du plongement de X dans sa Jacobienne et de la fonction Θ de cette Jacobienne [8]. On en déduit alors $a(z,x)$ et on obtient ainsi un moyen de calculer explicitement les opérateurs différentiels associés aux fonctions sur X . Des calculs ont été aussi faits lorsque X est rationnelle singulière.

6. Calcul symbolique

Notons $\hat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[t]][D]$ l'algèbre des opérateurs à coefficients séries formelles. Appelons algèbre symbolique et notons S l'algèbre $\hat{\mathcal{D}}[[I]]$, le symbole I étant soumis aux relations

$$(6.1) \quad \begin{cases} ID = DI = 1 . \\ [I , a(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{(n)}(t)\, I^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} I^{n+1} a^{(n)}(t) . \end{cases}$$

Tout élément $\sigma \in S$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$(6.2) \qquad \sigma = \sum_{n >> -\infty} a_n(t)\, I^n .$$

Pour $\sigma \in S$ écrit sous la forme (6.2), notons $\hat{\sigma}$ la série formelle

$$\hat{\sigma} = \sum_{n >> -\infty} a_n(t)\, \xi^{-n} .$$

Si $\sigma_1 , \sigma_2 \in S$, on a

$$\widehat{\sigma_1 . \sigma_2} = \hat{\sigma}_1 \circ \hat{\sigma}_2 ,$$

où on pose

$$\hat{\sigma}_1 \circ \hat{\sigma}_2 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \hat{\sigma}_1 \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \hat{\sigma}_2 \quad . \tag{6.3}$$

On reconnait dans (6.3) la loi de composition des symboles. Identifions $\mathcal{D}$ à une sous-algèbre S . Alors, tous les éléments elliptiques de $\mathcal{D}$ sont <u>inversibles</u> dans S .

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une sous-algèbre elliptique de $\mathcal{D}$ et (X, C, M, ∇, s) l'objet géométrique associé. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,C}$ de X en C est l'ensemble des fractions f/g telles que $f, g \in \mathcal{A}$, $\operatorname{ord} f \leq \operatorname{ord} g$. Par suite, l'anneau $\mathcal{O}_{X,C}$ et même son complété $\hat{\mathcal{O}}_{X,C}$ s'identifient à un sous-anneau de S . Faisons opérer $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$ à gauche sur S et $\hat{\mathcal{O}}_{X,C}$ à droite sur S . On obtient ainsi une structure de $\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{O}}_{X,C}$ - module dont on vérifie qu'elle se prolonge naturellement en une structure de $\hat{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \hat{O}_{X,C}$ - module. Soit $v \in \hat{\mathcal{O}}_{X,C}$ un générateur de l'idéal maximal. La multiplication par v induit des isomorphismes de S et par suite S est muni d'une structure de $(\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{O}}_{X,C})_{(v)}$ - module. La multiplication à gauche par D est une $\hat{\mathcal{O}}$-connexion sur S .

Par ailleurs $(\hat{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{O}}_{X,C})$ est le complété de l'anneau local de $(\mathcal{O}, C) \in U \times X$. Notons $\hat{M}_{(v)}$ le localisé du complété de M en $(\mathcal{O}, C)$ et $\hat{\nabla}_{(v)}$ la $\mathcal{O}$-connexion déduite de ∇ .

PROPOSITION 11.- <u>Le</u> $(\hat{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{O}}_{X,C})_{(v)}$ - <u>module</u> S <u>muni de la connexion</u> D <u>est isomorphe à</u> $(\hat{M}_{(v)}, \hat{\nabla}_{(v)})$.

Cette proposition résulte de la construction même de l'objet géométrique associé à $\mathcal{A}$ (n° 3).

En particulier le module S est libre de base $D^{r-1}, D^{r-2}, \ldots, D^{o}$. Par suite,

$$D^r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i(t,v) D^i$$

où $a_i(t,v) \in (\hat{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \hat{\mathcal{O}}_{X,C})_{(v)}$. Les séries formelles $a_i(t,v)$ ainsi trouvées sont les développements en séries des fonctions $a_i(t,x)$ du n° 5. Cela fournit un algorithme pour calculer ces développements que nous allons expliciter dans le cas $r = 1$.

Soit $L \in \mathcal{A}$ un opérateur de degré $n > 0$ dont le coefficient dominant est 1 . Il existe un élément $L^{1/m} \in S$ du type

$$L^{1/m} = D + \alpha_o(t) + \sum_{i \geq 1} \alpha_i(t) D^{-i}$$

tel que $(L^{1/m})^n = L$. On constate alors que tout élément de S se développe en séries de puissances de $v = (L^{1/m})^{-1}$. On a donc

$$D = \frac{1}{v} + \sum_0^{\infty} b_i(t) v^i .$$

La série formelle

$$a(t,v) = \frac{1}{v} + \sum_0^{\infty} b_i(t)\, v^i$$

est le développement en série de la fonction $a(t,x)$ du n° 5. On remarquera que les $b_i(t)$ s'obtiennent à partir d'expressions polynomiales universelles en les coefficients de l'opérateur L et leurs dérivées. De telles expressions appelées <u>hamiltonien</u> apparaissent aussi lorsqu'on calcule le développement asymptotique de la trace de la résolvante. Les <u>hamiltoniens</u> de la résolvante peuvent d'ailleurs se calculer à partir de la fonction $a(t,v)$. Grâce au calcul variationnel de GEL'FAND et DIKII ces hamiltoniens permettent de décrire les variations isospectrales de L [4].

7. Variations isospectrales

Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ une sous-algèbre elliptique (X , C , M , ∇ , s) l'objet géométrique associé, r le rang de M . Appelons spectre de $\mathcal{A}$ le couple formé de la courbe pointée (X,C) et de l'entier r . Lorsque $r > 1$, on a vu que l'ensemble des classes d'équivalence de sous-algèbres ayant même spectre n'est pas en général un objet de type fini. Lorsque $r = 1$, ces classes d'équivalences correspondent aux classes d'isomorphismes de faisceaux $\mathcal{M}$ de rang 1 sur X tels que $h^0(\mathcal{M}) = h^1(\mathcal{M}) = 0$. Ces classes d'isomorphismes sont en correspondance biunivoque avec les points d'une variété algébrique F quasi-projective. Lorsque X est lisse de genre g , F est le complémentaire du diviseur Θ dans la jacobienne des faisceaux inversibles de degré $g-1$ sur X . Dans le cas général F n'est pas lisse (ni même irréductible lorsque X n'est pas de Gorenstein). Mais la jacobienne $\mathrm{Jac}(X)$ des faisceaux inversibles de degré 0 opère sur F . Les orbites de cette opération sont lisses et nous allons étudier ces orbites. Plus généralement, sans hypothèse sur le rang de M , nous allons étudier les familles algébriques de sous-algèbres elliptiques de $\mathcal{D}$ obtenues en faisant agir la jacobienne de X sur (X , C , M , ∇ , s) .

Interprétons les points de $\mathrm{Jac}\, X$ comme des faisceaux inversibles J munis d'un générateur j de leurs fibres en C . Il existe un ouvert de Zariski $H_{\mathcal{M}} \subset \mathrm{Jac}\, X$ tel que pour tout $J \in H_{\mathcal{M}}$, $(X , C , M \otimes J , \nabla \otimes \mathrm{id}_J , s \otimes j)$ possède les propriétés (CD i) , $1 \leq i \leq 6$, du n° 3. Donc pour tout $J \in H_{\mathcal{M}}$, on a un plongement

$$L(J) : \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{D}$$

qui à une fonction f méromorphe sur X, holomorphe sur $X - C$ associe l'opérateur différentiel $L(J , f)$. Lorsqu'on fixe f, on obtient une application de $H_{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{D}$ et on note $d_J L(J , f)$ la différentielle de cette application. On a alors :

PROPOSITION 12.- <u>Il existe une section algébrique</u> $J \mapsto V(J) \in \Omega^1_{\mathrm{Jac}(X)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}$ <u>telle que pour tout</u> $f \in \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X)$ <u>on ait</u>

$$d_J\, L(J,f) = [V(J) , L(J,f)] ,$$

<u>et telle que de plus</u>

$$d_J\, V(J) = [V(J) , V(J)] .$$

Cette proposition résulte d'une description précise de la section $V(J)$ que nous allons donner maintenant.

Les suites exactes de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(nC) \rightarrow \mathcal{O}_X(nC)/\mathcal{O}_X \rightarrow 0$ fournissent en passant à la cohomologie et à la limite inductive sur n, une application de $\hat{K}_C$ sur $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ où $\hat{K}_C$ est le complété en C du corps des fonctions de X.

A tout $w \in \hat{K}_C$, on associe donc un élément de $H^1(X , \mathcal{O}_X)$, c'est-à-dire un champ de vecteurs tangents θ_w sur $\mathrm{Jac}(X)$.

Par ailleurs, soit $J \in H_{\mathcal{M}}$ et identifions $\hat{K}_C$ à son image dans S (n° 6) par le plongement défini par $(X , C , M \otimes J , \nabla \otimes \mathrm{id}_J , s \circ j)$. On a

$$W = \alpha_0(t)D^{nr} + \ldots + \alpha_{nr}(t) + \sum_{n>0} \beta_n(t)I^n \tag{7.1}$$

où $-n$ est la valuation de W. Notons $[w]_J$ l'opérateur $\sum_{i=0}^{nr} \alpha_i(t)\, D^i$. C'est la partie entière du symbole associé à W.

PROPOSITION 13.- a) <u>Pour tout</u> $f \in \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X)$, <u>on a</u>

$$d_J\, L(J,f)(\theta_w) = -[[w]_J , L(J,f)] .$$

b) <u>Pour tout</u> w^1 <u>et</u> $w^2 \in \hat{K}_C$, <u>on a</u>

$$[[w^2]_J , [w^1]_J] = d_J[w^1]_J(\theta_{w^2}) - d_J\, [w^2]_J(\theta_{w^1})$$

La proposition 12 s'en déduit en prenant une famille finie $w_1,\ldots,w_g$ telle que les θ_{w_i} forment une base de $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ et en posant $V(J)(\theta_{w_i}) = -[w_i]_J$.

Donnons des indications sur la démonstration de a); celle de b) est analogue. Quitte à changer M on peut supposer que $J = \mathcal{O}_X$. Comme il s'agit de calculer une dérivée première, le calcul se fait sur $(U\times X)[\varepsilon] = U\times X\times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2)$. On a une déformation $J[\varepsilon]$ sur $X[\varepsilon]$ du faisceau $\mathcal{O}_X$, munie d'une section σ au voisinage de C telle que $\sigma/C[\varepsilon] = 1$. Cette déformation correspond à la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X \to J[\varepsilon] \to \mathcal{O}_X \to 0$ d'invariant $\theta_w \in H^1(X,0)$. La variation de M considérée est alors $M\otimes J[\varepsilon]$. Au voisinage de $(U\times C)[\varepsilon]$ cette variation est trivialisable mais c'est la trace de la section $d^o \in H^o((U\times X)[\varepsilon], M[\varepsilon]_1)$ qui varie. On vérifie qu'on a, au voisinage de $(U\times C)[\varepsilon]$,

$$d^o = \delta^{(o)} \otimes \sigma + \varepsilon (\delta^{(o)}w - \sum_{o}^{nr} \alpha_i(t)\delta^{(i)})\otimes \sigma \tag{7.2}$$

où les $\alpha_i(t)$ sont ceux de la formule (7.1), $\delta^{(o)}$ est la section de M_1 qui induit s et $\delta^{(i)} = \nabla^i \delta^{(o)}$. Soit $f \in \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X)$. Il existe un opérateur différentiel $L(f) + \varepsilon L'(f) \in \mathcal{D}[\varepsilon]$, tel que dans $S[\varepsilon]$, on ait

$$(L(f) + \varepsilon L'(f))d^o = d^of .$$

En reportant (7.2) on obtient

$$\begin{cases} d^of = L(f)\, \delta^{(o)} \otimes \sigma + \varepsilon (\delta^{(o)}wf - [w]\, L(f)\, \delta^{(o)})\otimes \sigma \\ (L(f) + \varepsilon L'(f))d^o = L(f)\, \delta^{(o)} \otimes \sigma + \varepsilon (L'(f)\, \delta^{(o)} + \delta^{(o)}fw - L(f)[w]\delta^{(o)})\otimes\sigma \end{cases}$$

d'où

$$L'(f) = [L(f) , [w]] ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit $f \in \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X)$ de valuation $-n$ à l'infini et $L(J,f) \in \mathcal{D}$ l'opérateur associé. Pour tout entier $p > 0$, il existe un élément $f^{p/n} \in \hat{K}_C$ tel que $(f^{p/n})^n = f^p$. Dans l'algèbre symbolique S , on a $f = L(J,f)$ par suite $f^{p/n} = L(f)^{p/n}$ d'où $[f^{p/n}] = [L(f)^{p/n}]$. Il résulte de la prop. 13 que pour tout $g \in \Gamma(X - C , \mathcal{O}_X)$, on a

$$d_J\, L(J,g)\, (\theta_{f^{p/n}}) = -[[L(J,f)^{p/n}] , L(J,g)] ,$$

d'où pour $f = g$

$$d_J\, L(J,f)\, (\theta_{f^{p/n}}) = -[[L(J,f)^{p/n}] , L(J,f)] . \tag{7.3}$$

L'équation (7.3) est appelée l'équation de Korteweg - de Vries généralisée. Elle ne fait intervenir que les coefficients de l'opérateur $L(J,f)$. Les relations qu'elle impose aux coefficients sont des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Comme on a indiqué par ailleurs des moyens de construire des familles d'opérateurs vérifiant (7.3), on a donc décrit des moyens de construire des solutions de ces équations. Lorsque $r = 1$, des calculs explicites permettent d'exprimer ces solutions en termes de fonctions Θ associées aux jacobiennes des courbes.

8. Développements. Résultats voisins et analogues

Pour terminer, signalons que Kričever a étendu la théorie au cas des opérateurs différentiels matriciels [6] et que dans [1] on commence à étendre le dictionnaire aux équations aux dérivées partielles à deux variables. Pour étudier le cas de l'équation de Schrödinger à une variable à coefficients périodiques sans propriété d'algébricité, McKean et Trubowicz ont introduit des courbes analytiques non compactes munies d'une donnée de croissance à l'infini [9].

Pour les équations aux différences finies, Mumford et van Moerbeke ont établi un dictionnaire analogue à celui présenté ici (cf. [11]). Enfin en caractéristique $p > 0$, il existe aussi un dictionnaire du même type découvert par Drinfeld (cf. [11]).

Enfin signalons qu'une partie des résultats de Kričever qui ne concerne pas les variations isospectrales a été découverte par J.-L. Burchnall, T. W. Chaundy et H. F. Baker de 1922 à 1931. Cette référence [13] était tombée dans l'oubli (*)

(*) Alinéa ajouté le 6 octobre 1978.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.A. DUBROVIN, I.M. KRIČEVER, S.P. NOVIKOV - The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, tome 229 (1976), n°1. Translation Soviet Math. Dokl., vol. 17 (1976), n° 4.

[2] B.A. DUBROVIN, V.B. MATVEEV, S.P. NOVIKOV - Non linear equations of Korteweg-de Vries type, finite zone linear operators, and abelian varieties, Russian Math. Survey, 31:1 (1976), 59-146 from Uspekhi Mat. Nauk, 31:1 (1976), 55-136.

[3] I.M. GEL'FAND, L.A. DIKII - Asymptotic behaviour of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg- de Vries equations, Russian Math. Survey, 30:5 (1975), 77-113 from Uspekhi Mat. Nauk, 30:5 (1975), 67-100.

[4] I.M. GEL'FAND, L.A. DIKII - Fractional powers of operators and Hamiltonian systems, Fonct. Anal. and its Appl., vol. 10, n° 4, oct.-déc. 1976, Transl. April 1977.

[5] I.M. KRIČEVER - Algebraic-geometric construction of the Zaharov-Sabat equations and their periodic solutions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, tome 227 (1976), n°2. Translation Soviet Math. Dokl., vol. 17 (1976), n° 2, 394-397.

[6] I.M. KRIČEVER - Algebraic curves and commuting matricial differential operators, Fonct. Anal. and it Appl., vol. 10, n° 2, April-June 1976.

[7] Yu.I. MANIN - Aspects algébriques de la théorie des équations différentielles, Itogi Nauki, à paraître.

[8] V.B. MATVEEV - Abelian functions and solitons, Instytut Fizyki Teoretycznej, Preprint n° 373, Wroclaw, June 1976.

[9] H.P. McKEAN, E. TRUBOWITZ - Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, Comm. Pure and Appl. Math., 29 (1976), 143-226.

[10] H.P. McKEAN, P. VAN MOERBEKE - The spectrum of Hill's equation, Inventiones Math., 30 (1975), 217-274.

[11] D. MUMFORD - An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg- de Vries equation and related non linear equations, Proceedings of the Kyoto conference on algebraic geometry, Jan. 1978, à paraître.

[12] S.P. NOVIKOV - Periodic problem for the Korteweg-de Vries equation I, Funktsional'. Analiz i Ego Prilozhen, 9, n° 1, (1975), 65-66. Translation in Funct. Anal., Jan. 1975, 236-246.

[13] J.-L. BURCHNALL and T. W. CHAUNDY - Commutative Ordinary differential operators, Proc. London Math. Soc. ser. 2, vol. 21, p. 420-440, (1922).

- Commutative Ordinary differential operators, Proc. Roy. Soc. A, vol. 118, p. 557-583, (1928).

- Commutative Ordinary Differential operators II - The Identity $P^n = Q^m$, Proc. Roy. Soc. A, vol. 134, p. 471-485, (1931).

H. F. BAKER, F.R.S. - Note on the Foregoing paper, "Commutative Ordinary Differential Operators", by J.-L. BURCHNALL and J. W. CHAUNDY, Proc. Roy. Soc. A, vol. 118, p. 584-593, (1928).