HENRY P. MCKEAN
PIERRE VAN MOERBEKE

Sur le spectre de quelques opérateurs et les variétés de Jacobi

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 474, p. 54-68
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__54_0>

Séminaire BOURBAKI
28e année, 1975/76, n° 474

SUR LE SPECTRE DE QUELQUES OPÉRATEURS ET LES VARIÉTÉS DE JACOBI

par Henry P. McKEAN et Pierre van MOERBEKE

La question des déformations isospectrales d'opérateurs s'est révélée importante dans la résolution de toute une classe d'équations non-linéaires. Ce lien fut découvert en 1967 par C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal et R. M. Miura [6,8] ; l'essentiel en est que l'équation de Korteweg-de Vries [1] $\partial q/\partial t = 3qq' - \frac{1}{2} q'''$ sur la droite réelle a comme invariant la partie discrète du spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville $Q = -d^2/dx^2 + q(x,t)$, construit à partir de la solution $q(x,t)$ de l'équation. Ainsi, traduit en termes spectraux, le problème aux données initiales pour cette équation admet une solution simple. P. D. Lax [16] fit appel à la théorie générale des opérateurs en vue de fournir une explication mathématique à ce fait résultant d'un calcul aussi astucieux qu'obscur. C. Gardner [7] et surtout L. Faddeev et V. E. Zakharov [3] exploitèrent son allure hamiltonienne et conservative ; cette ligne de pensée a joué un rôle important dans l'évolution du sujet.

Nos travaux ont surtout porté sur le cas périodique, ce qui présente l'avantage, mais aussi la difficulté, que les systèmes évoluent sur des surfaces compactes ; c'est ce point de vue que nous adopterons dans cet exposé.

En premier lieu, nous illustrons sur des matrices la structure de ces déformations isospectrales ; lorsque les matrices sont dites de Jacobi, ces déformations constituent, en quelque sorte, une liste complète. Nous étudierons en détail les flots ainsi définis, surtout du point de vue des variétés de Jacobi qu'ils engendrent ; enfin, dans le dernier chapitre, lorsque nous aborderons l'étude du spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville Q , le langage approprié sera celui de la géométrie de dimension infinie. Certains des résultats du dernier chapitre ont aussi été obtenus par Dubrovin et Novikov [1], Its et Matveev [10], Lax [17,18] et Novikov [23].

Chapitre I. Les déformations isospectrales de matrices

Soit $\mathbb{M}$ la variété des matrices X réelles, symétriques d'ordre n , ayant un spectre simple fixé $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ $(\lambda_i \neq 0)$; $\mathbb{M} = O(n)/\Gamma$, où Γ est le sous-

[1] $q' \equiv Dq \equiv \partial q/\partial x$

groupe fini des matrices diagonales dont les éléments sont ± 1 . Cette variété de dimension $n(n-1)/2$ est immergée dans R^p , où $p = n(n+1)/2$. Soit K une matrice antisymétrique fixée, indépendante de X . La colonne $e_\alpha \equiv (e_{1\alpha} \ldots e_{n\alpha})^\dagger$ désigne le vecteur propre (normalisé à un) de X associé à λ_α .

THÉORÈME 1.- Les systèmes d'équations différentielles [1]

$$(1) \qquad \dot{X} = [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}] \qquad \alpha = 1, \ldots, n-1$$

définissent $n-1$ champs de vecteurs commutatifs sur la variété $\mathbb{M}$. Les $n-1$ champs de vecteurs sont indépendants aux points X si et seulement si $K_{\alpha\beta} \equiv (Ke_\alpha, e_\beta) \neq 0$ pour au moins $n-1$ couples différents (α,β) $(\alpha < \beta)$. Appelons ces X les points généraux.

Démonstration. Soit $F(X)$ une fonction C^2 sur $\mathbb{M}$. Alors le champ de vecteurs $\mathcal{X}_\alpha$ est défini comme suit [2]

$$\mathcal{X}_\alpha(F) = [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}] \cdot \frac{\partial F}{\partial X} .$$

Une simple dérivation de $Xe_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ par rapport à X montre que

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial x} = e_\alpha \otimes e_\alpha \equiv (e_{i\alpha} e_{j\alpha}) .$$

Soit $H_k = \frac{1}{k+1} \operatorname{Tr} X^{k+1}$ (k entier). Signalons que $\partial H_k / \partial X = X^k$. Pour montrer que le spectre λ_β de X est un invariant de (1), il suffit que

$$[K, \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial X}] \cdot \frac{\partial H_k}{\partial X} = \operatorname{Tr} \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial X} [\frac{\partial H_k}{\partial X}, K] = e_\beta \cdot [\frac{\partial H_k}{\partial X}, K] e_\beta = 2e_\beta \cdot \frac{\partial H_k}{\partial X} K e_\beta$$

$$= 2e_\beta \cdot X^k K e_\beta = 2\lambda_\beta^k (e_\beta \cdot Ke_\beta) = 0 .$$

Il s'ensuit que λ_β est un invariant du flot $\dot{X} = [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}]$; c'est-à-dire que [3]

$$0 = \frac{\partial}{\partial X} (\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial X} \cdot [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}]) = \frac{\partial^2 \lambda_\beta}{\partial X^2} \cdot [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}] + \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial X} \cdot [K, \frac{\partial^2 \lambda_\alpha}{\partial X^2}]$$

$$= \frac{\partial^2 \lambda_\beta}{\partial X^2} \cdot [K, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial X}] - \frac{\partial^2 \lambda_\alpha}{\partial X^2} \cdot [K, \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial X}] .$$

---

[1] $[A,B] = AB - BA$. Soit F une fonction différentiable de X ; alors $\partial F/\partial X$ est la matrice dont le (i,j)-ième élément est donné par $\partial F / \partial x_{ij}$.

[2] $A.B \equiv \operatorname{Tr}(A\,B)$ désigne le produit scalaire des matrices A et B .

[3] $\partial^2 \lambda / \partial X^2$ est une forme bilinéaire symétrique qui à chaque x_{ij} fait correspondre la matrice $\frac{\partial}{\partial X} (\frac{\partial \lambda}{\partial x_{ij}})$.

Cette dernière relation est responsable du fait que les champs de vecteurs commutent ; c'est-à-dire que le crochet de Lie s'annule :

$$[\mathcal{X}_\alpha , \mathcal{X}_\beta]F = \sum_{k,\ell} [K, \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial X}]_{k,\ell} \; ([K, \frac{\partial^2\lambda_\beta}{\partial x_{k,\ell}\partial X}] . \frac{\partial F}{\partial X}) - \sum_{k,\ell} [K, \frac{\partial\lambda_\beta}{\partial X}]_{k,\ell} \; ([K, \frac{\partial^2\lambda_\alpha}{\partial x_{k,\ell}\partial X}] . \frac{\partial F}{\partial X})$$

$$= \frac{\partial F}{\partial X} . [K, [K, \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial X}] . \frac{\partial^2\lambda_\beta}{\partial X^2} - [K, \frac{\partial\lambda_\beta}{\partial X}] . \frac{\partial^2\lambda_\alpha}{\partial X^2}] = 0 .$$

Parmi les combinaisons linéaires de $\mathcal{X}_\alpha$ nous trouvons aussi les $n-1$ champs de vecteurs Y_k $(k = 1,\dots,n-1)$ définis par

$$\dot{X} = [K, \frac{\partial H_k}{\partial X}] = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\lambda_\alpha^k - \lambda_n^k)[K, \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial X}] ,$$

le déterminant de cette transformation étant égal à $\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$. Notons aussi que

$$\dot{X} = [K, \frac{\partial H_k}{\partial X}] = [K, X^k] = [A_k , X] \qquad \text{où} \quad A_k = \sum_{j=0}^{k-1} X^j K X^{k-j-1} .$$

Considérons maintenant le flot défini par $Y = \sum_{k=1}^{n-1} c_k Y_k$, soit $A = \sum_{k=1}^{n-1} c_k A_k$. Alors en dérivant l'équation $Xe_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ par rapport à ce flot, on trouve que

$$(X - \lambda_\alpha)(\dot{e}_\alpha - Ae_\alpha) = 0 .$$

Puisque λ_α est une valeur propre simple, le vecteur $\dot{e}_\alpha - Ae_\alpha$ doit être un multiple de e_α . En fait $\dot{e}_\alpha - Ae_\alpha = 0$, car A est antisymétrique et $\|e_\alpha\|^2 = 1$.

Si nous n'avons choisi que $n-1$ flots $\mathcal{X}_k$ ou Y_k , c'est que, de toute manière, les n flots $[K, \partial\lambda_\alpha/\partial X]$ $(\alpha = 1,\dots,n)$ sont dépendants car

$$\sum_{\alpha=1}^{n} [K, \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial X}] = [K,I] = 0 .$$

Enfin, les $n-1$ flots $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_{n-1}$ ou $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ sont indépendants aux points généraux X car, s'il existait une combinaison linéaire nulle, soit $\sum_{k=1}^{n-1} c_k Y_k = 0$, alors $Ae_\beta = 0$ pour tout β ; alors, puisque $k_{\beta\alpha} \neq 0$ pour au moins $n-1$ couples (α,β) $(\alpha < \beta)$, l'expression :

$$Ae_\beta = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_\beta^{k-j-1} \sum_{\alpha\neq\beta} \lambda_\alpha^j k_{\beta\alpha} e_\alpha = \sum_{\alpha\neq\beta} e_\alpha k_{\beta\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\lambda_\beta^k - \lambda_\alpha^k}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha} = 0 ,$$

se ramène à un système de $n-1$ équations au moins à $n-1$ inconnues sans terme indépendant, dont le déterminant est différent de zéro :

$$\det\left(\frac{\lambda_\beta^k - \lambda_\alpha^k}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}\right) \neq 0 \ , \ 1 \leq k \leq n-1 \ , \ (\alpha,\beta) \ (\alpha<\beta) \text{ tels que } K_{\alpha\beta} \neq 0 \ .$$

Dès lors **tous** les coefficients c_k s'annulent, ce qui achève la démonstration du théorème.

La géométrie de notre situation est simple : la variété $n(n-1)/2$-dimensionnelle $\mathbb{M}$ est définie par les équations algébriques $\mathrm{Tr}(X^k) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k$ pour $k = 1,2,\ldots,n$ dans R^p. L'espace normal N en un point X (général) de $\mathbb{M}$ est de dimension n et est engendré par les gradients $\partial\lambda_1/\partial X$, $\partial\lambda_2/\partial X,\ldots,\partial\lambda_n/\partial X$; N contient donc l'identité. L'opération de commutation avec K a l'effet de rabattre l'espace normal N sur un sous-espace de dimension $n-1$ de l'espace tangent T. Les équations (1) ont une structure hamiltonienne, c'est-à-dire qu'elles sont définies, toutes de la même manière, par un gradient suivi d'une opération antisymétrique. Les crochets de Poisson de deux fonctions F, G dans $C^1(R^p)$ s'écrivent

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [K, \frac{\partial G}{\partial x}] \ .$$

Si un système hamiltonien à r degrés de liberté (indépendant du temps) possède r intégrales en involution [1] $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, de gradients linéairement indépendants et si en outre les r intégrales définissent une surface connexe compacte de dimension r, alors il existe une transformation canonique vers de nouvelles coordonnées, dites action-angle, les coordonnées "action" étant des constantes du mouvement et les coordonnées "angle" des fonctions linéaires dans le temps. En outre, le système évolue sur un tore à r dimensions. Donc, en principe, la transformation canonique fournit les positions et les moments en fonction du temps et le problème est résolu. Nous sommes donc naturellement conduits à cette situation ; chacune des équations hamiltoniennes (1) possède les $n-1$ intégrales en involution $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$. Si en outre, nous disposons de $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ modules supplémentaires invariants sous l'action de (1) et définissant des sous-variétés de $\mathbb{M}$ de dimension $n-1$, alors les équations (1) évoluent, en général, sur des tores de dimension $n-1$. Nous illustrerons et confirmerons ces idées dans le cas plus simple des matrices de Jacobi, ce qui fera l'objet du Chapitre II. Pour des notions de mécanique hamiltonienne, consulter le livre de Arnold-Avez [25].

---

[1] Les crochets de Poisson $\{\lambda_i , \lambda_j\} = 0$.

Chapitre II. Les matrices de Jacobi

Soit R^{2n} $(n \geq 3)$ la classe des matrices de Jacobi réelles et périodiques

$$X = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \cdot \\ 0 & a_2 & b_3 & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & a_{n-1} \\ a_n & \cdot & \cdot & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

et dans R^{2n}, soit $\mathbb{M}$ la sous-variété de dimension n des matrices X de spectre $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ fixé. En vue de conserver le caractère tridiagonal de X, nous introduisons dans (1) la matrice [1] $K = X^+ - X^-$ dépendant de X. Cette dépendance est loisible et les principaux résultats du Chapitre I subsistent, à quelques modifications près : les flots Y_k définis par [2]

$$(2) \qquad \dot{X} = [K, X^{k\Delta}]^{\Delta} = [X^{k^+} - X^{k^-}, X] \qquad k = 1,\dots,n-1$$

commutent et sont linéairement indépendants dès que X est général. En outre, ils laissent invariant le module $A \equiv a_1 \dots a_n$. Soit $\mathbb{M}_A \subseteq \mathbb{M}$ la sous-variété des matrices de Jacobi de module fixé A. L'espace normal en un point X de $\mathbb{M}_A$ a la dimension $n+1$ et est engendré par les gradients $\partial\lambda_1/\partial X,\dots,\partial\lambda_n/\partial X$ et $\partial A/\partial X$, tandis que l'espace tangent, de dimension $n-1$, est engendré par les $n-1$ champs de vecteurs Y_k.

Soit X_o une origine sur $\mathbb{M}_A$ choisie une fois pour toutes. Nous définissons l'application de R^{n-1} dans $\mathbb{M}_A$, qui à tout vecteur ω de R^{n-1} fait correspondre $\exp(\omega.Y)X_o$. Cette action est transitive sur $\mathbb{M}_A$, à condition que les $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{M}_A$. Alors le groupe

$$L = \{\omega \mid \exp(\omega.Y)X_o = X_o\}$$

est un sous-groupe discret de R^{n-1}. Il s'ensuit que $\mathbb{M}_A = R^{n-1}/L$; ceci est un tore. Donc les flots (2) apparaissent comme des mouvements linéaires sur $\mathbb{M}_A$. Cependant, il y a, en réalité, bien davantage, car les périodes du tore $\mathbb{M}_A$ peuvent être exprimées à l'aide d'intégrales hyperelliptiques ; en bref, $\mathbb{M}_A$ est une variété de Jacobi. De plus, la transformation canonique vers les coordonnées action-angle est du type rationnel. C'est ce que nous nous proposons d'expliquer.

[1] X^+ (respectivement X^-) est la matrice triangulaire obtenue par omission de la partie triangulaire inférieure (respectivement supérieure), y compris la diagonale.

[2] L'indice supérieur Δ signifie que l'on prend la partie tridiagonale de la matrice auquel ce symbole se réfère ; c'est-à-dire qu'on annule tous les éléments sauf ceux de la diagonale et les deux sous-diagonales, y compris les deux coins.

Adoptons les notations suivantes : X_i^j est la matrice X dont on a écarté les $i-1$ premières et les $n-j$ dernières lignes et colonnes. Soit $\Delta_i^j = \det(\lambda I - X_i^j)$. Soit X^- la matrice X où a_n est changé en $-a_n$. Soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $(\lambda_1^-,\ldots,\lambda_n^-)$ et $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})$ respectivement les spectres des matrices X, X^- et X_2^n ; c'est-à-dire que $\det(\lambda_k I - X) = 0$, $\det(\lambda_k^- I - X^-) = 0$ et $\Delta_2^n(\mu_i) = 0$. Soit $R(\lambda) = \det(\lambda I - X).\det(\lambda I - X^-)$. Alors la théorie de Floquet adaptée aux matrices de Jacobi affirme que

$$\lambda_1 < \lambda_1^- \leq \mu_1 \leq \lambda_2^- < \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1}^- \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n^- < \lambda_n$$

si n est pair et $A > 0$, tandis que

$$\lambda_1^- < \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 < \lambda_2^- \leq \mu_2 \leq \lambda_3^- < \ldots < \lambda_{n-1}^- \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n^- < \lambda_n$$

si n est impair et $A > 0$; si $A < 0$, le rôle des λ_k et λ_k^- sera renversé. De plus les λ_i et le module A déterminent les λ_i^- ; donc les λ_i^- sont aussi invariants sous l'action de (2). Soit Λ_i l'intervalle des λ contenant μ_i. Par exemple, lorsque n est pair et $A > 0$, $\Lambda_1 = [\lambda_1^-, \lambda_2^-]$, $\Lambda_2 = [\lambda_2, \lambda_3]$, etc...

THÉORÈME 2.- Les champs de vecteurs $Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ sont linéairement indépendants si et seulement si aucun des intervalles Λ_i n'est dégénéré. La suite du théorème ne considère que ce cas.

Les μ_k constituent un système de coordonnées locales sur le tore $\mathbb{M}_A$; plus exactement, si les λ_i et A sont fixés, alors à chaque $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})$ choisi arbitrairement dans l'intervalle qui les contient, il correspond 2^r matrices, telles que $\Delta_2^N(\mu_i) = 0$, où r est le nombre de μ_i tels que μ_i soit dans l'intérieur de l'intervalle Λ_i ; plus précisément à chaque [1] $p = (p_1,\ldots,p_n)$, où $p_i = (\mu_i, \sqrt{R(\mu_i)})$, le radical $\sqrt{R(\mu_i)}$ ayant un signe déterminé, il correspond exactement une matrice X telle que $\Delta_2^n(\mu_i) = 0$; lorsque μ_i est dans l'intérieur de Λ_i, la matrice X dépendra des différentes combinaisons de signes des radicaux $\sqrt{R(\mu_i)}$. Donc $\mathbb{M}_A$ sera, topologiquement, le produit des Λ_i^2, où Λ_i^2 est un double revêtement de Λ_i relié par les extrémités, soit un cercle. Ainsi le tore $\mathbb{M}_A$ est muni de deux systèmes de coordonnées, d'une part un système additif $(t_1,\ldots,t_{n-1})$, provenant de R^{n-1} et d'autre part d'un système

---

[1] Le signe de $\sqrt{R(\mu_i)}$ peut être $+1$ ou -1.

local $(\mu_1,\dots,\mu_{n-1})$. Passer d'un système à l'autre s'effectue à l'aide de la transformation de Jacobi :

$$(3)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \int_{\mu_\alpha^o}^{\mu_\alpha} C^{-1}(1,\mu,\dots,\mu^{n-2})^{\dagger} \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} = (t_1,\dots,t_{n-1})^{\dagger}, \quad \text{modulo les périodes} \; .$$

L'origine $(\mu_1^o,\dots,\mu_{n-1}^o)$ correspond au spectre de la matrice X_o . C désigne une matrice triangulaire d'ordre n-1, dont les éléments sont des fonctions symétriques des λ_i et λ_i^- . La matrice des périodes L est formée des colonnes

$$\int_{\Lambda_\alpha} C^{-1}(1,\mu_1,\dots,\mu^{n-2})^{\dagger} \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} \qquad \alpha = 1,\dots,n-1 \; .$$

Exprimé dans un langage différent, L peut être vu comme la matrice des périodes réelles des différentielles de première espèce le long des cycles Λ_α^2 de la surface de Riemann (de genre $n-1$) construite à partir de l'expression algébrique $y^2 = R(z)$. Pour construire les périodes le long des cycles complémentaires, il suffira d'intégrer sur les $n-1$ intervalles $[\lambda_1,\lambda_1^-]$, $[\lambda_2^-,\lambda_2]$, $[\lambda_3,\lambda_3^-]$, etc..., du moins lorsque n est pair et $A > 0$. Ces périodes seront purement imaginaires. Nous pouvons ainsi conclure que $\mathbb{M}_A$ n'est autre que la partie réelle de la variété de Jacobi associée à la surface de Riemann hyperelliptique $y^2 = R(z)$.

Par ailleurs, l'inversion de (3) ou, ce qui est pareil, l'expression des polynômes symétriques en $(\mu_1,\dots,\mu_{n-1})$ en fonction de $(t_1,\dots,t_{n-1})^{\dagger}$ peut s'effectuer à l'aide des fonctions Θ , construites à partir de la matrice des périodes. Ceci à son tour permet d'exprimer les éléments de la matrice X en fonction du temps lorsque l'action est fournie par $\Sigma\, t_i Y_i$. Donc, par ce biais, nous avons résolu complètement les équations (2).

Enfin, la transformation des (a_i , b_i) vers les nouvelles variables (μ_i , ν_i) , où

$$\nu_i = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} [-a_1^2 \pm a_1^2)\, \Delta_3^n(\mu_i) + (-a_n^2 \pm a_n^2)\, \Delta_2^{n-1}(\mu_i)]$$

est une transformation de type rationnel, le signe dépendant du signe du radical $\sqrt{R(\mu_i)}$; elle est canonique, c'est-à-dire qu'elle respecte la structure symplectique.

Quant à la position relative des tores $\mathbb{M}_A$, ils sont paramétrisés par le module A . Dans la suite de la discussion, prenons le cas où $A > 0$ et n pair ; il est intéressant de remarquer que $A > 0$ peut prendre n'importe quelle valeur inférieure à A_o , où

$$A_o^{-1} = \max_\alpha - \frac{4}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda'_\alpha - \lambda_i)} ;$$

les λ'_α sont les minima relatifs du polynôme caractéristique $\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ de X. Dès que $A = A_o$, il y a dégénérescence globale des champs de vecteurs ; nous trouvons que M_{A_o} est un tore de dimension inférieure à $n-1$. Au contraire, lorsque $A = 0$, M_A est encore un tore de dimension $n-1$, sauf qu'il y a dégénérescence ou non des champs de vecteurs selon les endroits.

Nous ne pourrions terminer l'exposé de ce chapitre sans indiquer le rapport entre le flot Y_1 et le problème de la vibration de certains systèmes de masses sur un cercle reliées par des ressorts (treillis de Toda) ; en effet, Y_1 peut être explicité de la façon que voici

$$\dot{b}_k = 2(a_k^2 - a_{k-1}^2) \quad , \qquad \dot{a}_k = a_k(b_{k+1} - b_k) .$$

Ce système d'équations différentielles ordinaires est équivalent aux équations de Hamilton

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

où

(4) $$H = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{k=1}^{n} e^{q_k - q_{k+1}} \qquad \text{avec } q_{n+1} = q_1$$

par le biais de la transformation de Flaschka [4,5]

$$b_k = -\tfrac{1}{2} p_k \ , \qquad a_k = \tfrac{1}{2} \exp\left(\tfrac{1}{2}(q_k - q_{k+1})\right) .$$

Or la fonction de Hamilton (4) décrit un système de n masses vibrantes disposées sur un cercle et reliées entre elles par des ressorts dont la force de rappel est exponentielle. Les résultats de ce chapitre sont élaborés dans Kac - van Moerbeke [14,15] et van Moerbeke [24]. Pour d'autres systèmes dynamiques se rapportant à ces méthodes, consulter J. Moser [21,22] et M. Adler [26].

Chapitre III. L'équation de Hill

Soit q une fonction C^∞ de période 1. Considérons l'opérateur

$$Q \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) .$$

Convenons d'appeler $y_1(x,\lambda)$ et $y_2(x,\lambda)$ les solutions de $Qy = \lambda y$ telles que

$y_1(0,\lambda) = 1$, $y_1'(0,\lambda) = 0$ et $y_2(0,\lambda) = 0$, $y_2'(0,\lambda) = 1$; celles-ci satisfont à des équations intégrales ; ce sont des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{2}$ et de type 1 . Le spectre de Q , en tant qu'opérateur sur les fonctions C^2 de période 2 , est constitué d'une suite (appelée spectre périodique)

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \lambda_5 \leq \lambda_6 < \dots \nearrow \infty ,$$

chacun des points λ_i étant associé à une fonction propre normalisée [1] f_i , de période 1 ou 2 , selon que $i = 0, 3$ (mod. 4) ou $i = 1, 2$ (mod. 4) ; ou de façon équivalente selon que le discriminant $\Delta(\lambda_i) \equiv y_1(1,\lambda_i) + y_2'(1,\lambda_i)$ est égal à +2 ou -2 (théorie de Floquet). Les racines de $y_2(1,\mu) = 0$ constituent le spectre de Q agissant, cette fois, sur les fonctions C^2 de $[0,1]$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Ces spectres sont entrelacés comme suit :

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \mu_2 \leq \lambda_4 < \lambda_5 \leq \mu_3 \leq \lambda_6 < \dots .$$

Soit

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} .$$

Cette série admet le développement asymptotique

$$\mathcal{D}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j H_{j-1}}{(2j-3)\dots 3.1} \qquad (t \downarrow 0)$$

où $H_{-1} = 1$ et les H_j $(j \geq 0)$ sont des intégrales sur $[0,1]$ de polynômes universels en $q(x)$, $q'(x)$, etc... sans terme constant. Celles-ci peuvent être calculées grâce à la règle de récurrence [2]

$$(5) \qquad D \frac{\partial H_j}{\partial q} = L \frac{\partial H_{j-1}}{\partial q} ,$$

où $D = \frac{d}{dx}$ et $L = qD + Dq - \frac{1}{2} D^3$ sont tous deux des opérateurs antisymétriques. En outre $(L - 2\lambda D) f_i^2 = 0$. Chacune des équations aux dérivées partielles non linéaires

$$(6) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial H_m}{\partial q} = [K_m , Q] ,$$

où

$$K_m = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial H_{k-1}}{\partial q} D - \frac{1}{2} \left(D \frac{\partial H_{k-1}}{\partial q} \right) \right) (2Q)^{n-k} ,$$

---

[1] dans $(0,1)$

[2] Si H est une fonctionnelle de q , nous désignons par la fonction $\frac{\partial H}{\partial q}$ la dérivée de Fréchet de H par rapport à q .

possède comme intégrales les points λ_i du spectre périodique de Q . Que (6) possède cette propriété pour $H_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)^2 dx$ est trivial, car l'équation $\partial q/\partial t = \partial q/\partial x$ a pour effet de translater $q(x)$. Pour $H_2 = \int (\frac{1}{2} q^3 + \frac{1}{4} q'^2)$, (6) se réduit à l'équation de Korteweg-de Vries. Chacun des flots (6) est hamiltonien, car ils sont formés d'un gradient suivi d'un opérateur antisymétrique. Ces flots laissent donc invariants tous les H_m ; les H_m (ou les λ_i) constituent donc un système d'invariants en involution, c'est-à-dire que les crochets de Poisson s'annulent

$$\{H_n , H_m\} = \int D\frac{\partial H_n}{\partial q} \cdot \frac{\partial H_m}{\partial q} = 0 .$$

Comme auparavant, les champs de vecteurs ainsi définis

$$X_m(F) = \left(D\frac{\partial H_m}{\partial q} , \frac{\partial F}{\partial q} \right) \equiv \int_0^1 D\frac{\partial H_m}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} dx$$

sont commutatifs.

Pour fixer les idées, supposons que les n $(\leq \infty)$ premiers intervalles $[\lambda_{2i-1} , \lambda_{2i}]$ $(i = 1,2,\dots)$ soient non-dégénérés. Soit $\mathbb{M}$ la variété des fonctions $q \in C^\infty$ de période 1 et donnant lieu à un spectre fixé $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$. D'après la théorie de Floquet, exposée au début, $\mathbb{M}$ est encore défini comme l'ensemble des solutions [1] $q \in L_1^2$ telles que

$$(7) \qquad 2(-1)^i = \Delta(\lambda_{2i}) \qquad \text{lorsque } \lambda_{2i} \text{ est simple.}$$

Pour chaque μ_i dans $[\lambda_{2i-1} , \lambda_{2i}]$,

$$(8) \qquad \int_0^1 y_2^2(x,\mu_i)dx = \frac{d}{d\lambda} y_2(1,\mu_i) \cdot \tfrac{1}{2}(\Delta(\mu_i) - \sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4}) .$$

De cette formule il résulte que les λ_i , les μ_i [2] déterminent les normes des fonctions propres $y_2(x,\mu_i)$; rappelons que $y_2(x,\mu_i)$ n'est pas normalisé à 1 , mais $y_2(0,\mu_i) = y_2(1,\mu_i) = 0$ et $y_2'(0,\mu_i) = 1$. Selon un théorème de Borg [9], la fonction $q(x)$ est déterminée de façon unique par le spectre μ_i et les normes des fonctions propres associées. Donc, étant donné les $p_i = (\mu_i , \sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4})$, il y correspond 2^r fonctions q , où $r \leq n$ est le nombre de μ_i dans $(\lambda_{2i-1} , \lambda_{2i})$ et ce, à cause de l'ambiguïté du signe du radical ; bien sûr cette ambiguïté disparaît lorsque $\Delta^2(\mu_i) = 4$. Nous avons ainsi montré que $\mathbb{M}$ est un tore de dimension $n \leq \infty$; autrement dit, $\mathbb{M}$ est un revêtement 2^n-uple du pro-

---

[1] L_1^2 est l'espace des fonctions réelles mesurables de période 1 telles que $\int_0^1 |f|^2 dx < \infty$.

[2] et un choix particulier du signe du radical pour chaque μ_i

duit

$$[\lambda_1,\lambda_2] \times [\lambda_3,\lambda_4] \times \ldots \times [\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}] ,$$

le groupe de revêtement étant le groupe $Z_2 \times \ldots \times Z_2$ (n fois) ; l'action de ce dernier a comme effet de renverser les signes dans (8). Signalons qu'une inversion de signe dans (8) pour tout μ_i transforme $q(x)$ en $q(1-x)$. Alors que la construction du système de coordonnées μ_i sur $\mathbf{M}$ ne pose pas de problèmes, munir $\mathbf{M}$ d'une structure additive exige des techniques bien plus élaborées. La variété $\mathbf{M}$ est analytique à cause des équations intégrales que satisfont y_1 et y_2. L'espace normal N de $\mathbf{M}$ en tant que sous-variété de L^2_1, est engendré par les gradients

$$\frac{\partial \Delta}{\partial q}(\lambda_{2i}) = -\frac{d\Delta}{d\lambda}(\lambda_{2i}) f^2_{2i}(x) ,$$

du moins, lorsque tous les λ_{2i} sont simples, tandis que l'espace tangent sera obtenu en rabattant l'espace normal à l'aide d'un opérateur antisymétrique, soit D . Il en résulte que N est la sous-variété de L^2_1, engendrée par f^2_{2i}, si λ_{2i} est simple et par [1] f^2_{2i-1} et $f_{2i-1}f_{2i}$ lorsque λ_{2i} est double, tandis que T est engendré par les fonctions $D(f^2_{2i})$ $(i = 1,\ldots,n)$. Comme

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f^2_{2i}(x)$$

pour des ε_i convenables, N contient en fait la fonction 1 . Par ce biais, l'on montre, entr'autres, que $\mathbf{M}$ est immergé dans L^2_1 sans présenter de "plis", car la décomposition $L^2_1 = N \oplus T$ est, en réalité, semblable en chaque point de $\mathbf{M}$. Enfin chaque vecteur Y de T peut être exprimé comme une combinaison linéaire $\Sigma x_i Y_i$ où Y_i est le champ de vecteurs définis par l'équation

$$\dot{q} = -\frac{d\Delta}{d\lambda}(\lambda_{2j})\, Df^2_{2j} \qquad (j = 1,2,\ldots) . \tag{9}$$

Ces Y_i déterminent des flots différentiables sur $\mathbf{M}$, de même que les combinaisons linéaires $\Sigma x_i Y_i$ pourvu que [2] $x \in I^{m/2\dagger}$. Le lecteur se demandera pourquoi considérer les flots non différentiels (9) plutôt que les flots locaux (6). La raison en est la suivante : bien que nous ayons la relation remarquable

$$\frac{\partial H_m}{\partial q} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, p_n(\lambda_{2i}) f_{2i}(x)^2 ,$$

(les ε_i sont des coefficients convenables et les p_n sont des polynômes de degré n ne dépendant que de M), il est possible que les champs de vecteurs X_m définis par (6) n'engendrent, en général, pas tout l'espace T .

[1] f_{2i-1} et f_{2i} désignent une base du sous-espace propre associé à une valeur propre $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i}$ dégénérée.

[2] $I^{m/2\dagger}$ sera défini dans la suite.

Lorsque $n < \infty$, les champs $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants, ils engendrent T et agissent transitivement sur le tore $\mathbb{M}$ de dimension n ; donc X_{n+1} doit être une combinaison linéaire des précédents ; il s'ensuit que tout point q de $\mathbb{M}$ satisfait à l'équation différentielle

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial H_i}{\partial q} + \frac{\partial H_{n+1}}{\partial q} = c_o ,$$

les c_i étant des polynômes symétriques des λ_i . Enfin, nous pouvons fournir des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\lambda_o < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{2n-1} < \lambda_{2n}$ soit la partie simple du spectre d'une fonction périodique q . Quant au reste, la théorie se poursuit comme dans le cas des matrices de Jacobi.

Revenons au cas $n = \infty$. Voici d'abord quelques définitions. Dans l'espace tangent T , nous emboîtons des espaces, notés $I^{m/2\dagger}$ $(m = 3,5,7,\ldots)$

(10) $\quad I^{3/2\dagger} \subset I^{5/2\dagger} \subset I^{7/2\dagger} \subset \ldots \subset I^{\infty/2\dagger} \subset T$

formés de suites x_i telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \, i^{m+1} < \infty .$$

Ces espaces sont plongés dans l'espace tangent T par le biais du champ $\Sigma x_i Y_i$. Nous désignons par $I^{m/2}$ l'espace des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{2}$ et de type ≤ 1 telles que

$$\|\varphi\|^2_{m/2} = \int_0^\infty |\varphi(\mu)|^2 \mu^{m/2} d\mu < \infty .$$

Il existe une application surjective de $I^{m/2\dagger}$ vers le dual de $I^{m/2}$, dont le noyau est formé des combinaisons linéaires des champs $X_1, \ldots, X_p$ pour $m = 2p+3$. Il en résulte que $I^{3/2\dagger}$ est le dual de $I^{3/2}$ et que dans la hiérarchie (10), $I^{m/2\dagger}$ contient les champs $X_1, \ldots, X_p$ $(m = 2p+3)$ et pas un X_i de plus. En réalité, les expressions $\varphi(\mu)(\Delta^2(\mu) - 4)^{-\frac{1}{2}} d\mu$ avec $\varphi \in I^{m/2}$ peuvent être conçues comme des différentielles du premier ordre.

Quant à la structure additive sur $\mathbb{M}$, soit Ω la matrice des périodes primitives dans $I^{m/2\dagger}$

$$\omega_{ij} = 4 \int_{\lambda_{2i-1}}^{\lambda_{2i}} \prod_{1 \leq i \neq j} \frac{1 - \mu/\lambda_{2i}}{1 - \lambda_{2j}/\lambda_{2i}} \frac{d\mu}{\sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}} \qquad j = 1,2,\ldots .$$

---

[1] A ces espaces sont associées de nombreuses formules d'interpolation, permettant de reconstruire φ à partir des valeurs $\varphi(\mu_i)$; voir de Branges [2].

Les ω_i constituent une base dans $I^{m/2\dagger}$ au sens que tout point $x \in I^{m/2\dagger}$ peut être développé en $\Sigma\, y_i\, \omega_i$ avec $\Sigma\, i^{-m+1}\, y_i^2 < \infty$. Soit q_o une origine dans $\mathbb{M}$; alors le treillis des périodes $L^{m/2}$ (c'est-à-dire les points ω tels que $\exp(\omega.Y)q_o = q_o$) est engendré par Ω , au sens que $\omega = \Sigma\, n_i\, \omega_i$ avec n_i entier tels que $\Sigma\, i^{-m+1}\, n_i^2 < \infty$. La transformation de Jacobi de $\mathbb{M}$ vers $I^{m/2\dagger}/L^{m/2}$ peut s'expliciter comme suit :

$$2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int_{p_\alpha^o}^{p_\alpha} \prod_{1 \leq i \neq j} \frac{1 - \mu/\lambda_{2i}}{1 - \lambda_{2j}/\lambda_{2i}} \frac{d\mu}{\sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}} = x_j \ ,$$

le nombre de rotations n_i autour du cycle $[\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}]$ satisfaisant à la condition ci-dessus. Cette application est un homéomorphisme de M sur $I^{m/2\dagger}/L^{m/2}$. Signalons que forcément L doit contenir des périodes aussi petites que l'on veut, car $I^{3/2\dagger}/L$ est compact, tandis que $I^{3/2\dagger}$ n'est même pas localement compact. En conclusion, $\mathbb{M}$ est une variété de Jacobi (réelle) et l'homéomorphisme

$$q \rightarrow p_i \quad (i = 1,2,\ldots) \rightarrow x \text{ dans } I^{m/2\dagger} \subseteq T \text{ modulo les périodes}$$

a comme inverse

$$x \rightarrow Y = \Sigma\, x_i\, Y_i \rightarrow (\exp Y)(q_o) \ ,$$

conformément à nos espérances.

Enfin, l'identification de $\mathbb{M}$ à la variété de Jacobi a quelques conséquences importantes. D'abord il en résulte que les flots $\exp t\, X_i$ ont une solution globale et qu'ils sont différentiables par rapport aux conditions initiales. En outre, $\exp(t\, X_i)q$ est presque périodique en t , confirmant ainsi une conjecture de P. Lax [17,18]. Nous signalons aussi l'existence de nombreuses formules de traces reliant les spectres λ_i , μ_i et la fonction q , comme par exemple

$$\lambda_o^k + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{2i-1}^k + \lambda_{2i}^k - 2\mu_i^k) = L^k(0) \ ,$$

où $L^1(0) = q(0)$, $L^2(0) = q^2(0) - \frac{1}{2}\, q''(0)$,
$L^3(0) = q^3(0) - \frac{15}{16}\, q'(0)^2 - \frac{3}{2}\, q(0)\, q''(0) + \frac{3}{16}\, q''''(0)$, etc... .

Les travaux exposés dans ce chapitre sont dus à Dubrovin et Novikov [1], Its et Matveev [10], Lax [17, 18], Novikov [23], McKean- van Moerbeke [19], lorsque $n < \infty$, et à McKean-Trubowitz [20] lorsque $n = \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.A. DUBROVIN, S.P. NOVIKOV - Periodic and conditionally periodic analogues of multisoliton solutions of the Korteweg-de Vries equation, Dokl. Akad. Nauk U.S.S.R., 6 (1974), 2131-2144.

[2] L. de BRANGES - Some Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.

[3] L. FADDEEV and V.E. ZAKHAROV - Korteweg-de Vries equation : a completely integrable Hamiltonian system, Funkt. Anal. Priloz., 5 (1971), 18-27, Traduction dans Functional analysis and its application.

[4] H. FLASCHKA - The Toda lattice, I, Phys. Rev. B 9, (1974), 1924-1925.

[5] H. FLASCHKA - The Toda lattice, II, Progr. Theoretical Phys., 51 (1974), 703-716.

[6] C.S. GARDNER, J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL and R.M. MIURA - Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. letters, 19 (1967), 1095-1097.

[7] C.S. GARDNER - Korteweg-de Vries equation and generalizations IV, The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, J. Math. Phys., 12 (1971), 1548-1551.

[8] C.S. GARDNER, J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL and R.M. MIURA - Korteweg-de Vries equation and generalizations, VI Methods for exact solutions, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), 97-133.

[9] G. BORG - Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[10] A.R. ITS, V.B. MATVEEV - The periodic Korteweg-de Vries equation, Funkt. Anal. i ego Pril., 9 (1975).

[11] M. KAC, P. van MOERBEKE - Some probabilistic aspects of scattering theory, Compte-Rendus de la "Conf. on Functional Integr. and Appl.", 11, 4, Londres (1974), Oxford University Press.

[12] M. KAC, P. van MOERBEKE - On some isospectral second order differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 71, 6 (1974), 2350-2351.

[13] M. KAC, P. van MOERBEKE - On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices, Adv. in Math., 16, 2 (1975), 160-169.

[14] M. KAC, P. van MOERBEKE - On some periodic Toda lattices, Proc. Nat. Acad. Sci., 72, 4 (1975), 1627-1629.

[15] M. KAC, P. van MOERBEKE - The solution of the periodic Toda lattice, Proc. Nat. Acad. Sci., 72, 8 (1975), 2879-2880.

[16] P.D. LAX - Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), 467-490.

[17] P.D. LAX - Periodic solutions of the Korteweg-de Vries equation, Lectures in Appl. Math., 15 (1974), A.M.S. Providence R.I.

[18] P.D. LAX - Periodic solutions of the Korteweg-de Vries equation, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), 141-188.

[19] H.P. McKEAN, P. van MOERBEKE - The spectrum of Hill's equation $(n < \infty)$, Inventiones Mathematicae, 30 (1975), 217-274.

[20] H.P. McKEAN, E. TRUBOWITZ - The spectrum of Hill's equation ..., Comm. Pure Applied Math., (1976), à paraître.

[21] J. MOSER - Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential, An integrable system, Battelle Rencontres (Seattle) Summer lectures, Springer-Verlag Lecture Notes in Physics, 1974.

[22] J. MOSER - Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Advances in Math., 16, 2 (1975), 197-220.

[23] S.P. NOVIKOV - The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, Funkt. Anal. i ego Pril., 8 (1974), 54-66, Traduction en anglais dans Funct. Anal., (janv. 1975), 236-246.

[24] P. van MOERBEKE - The spectrum of Jacobi matrices, Inventiones Math., 37(1976), 45-81.

[25] V.I. ARNOLD et A. AVEZ - Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[26] M. ADLER - A new integrable system and a conjecture by Calogero, Bull. Amer. Math. Soc., (1976), à paraître.