

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

J. M. LEMAIRE

Le transfert dans les espaces fibrés

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 472, p. 23-37

http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__23_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

LE TRANSFERT DANS LES ESPACES FIBRÉS
 [D'après J. BECKER et D. GOTTLIEB]

par J. M. LEMAIRE

§ 1. Introduction: essai d'analyse chronologique

1.1 Le transfert est une notion classique en (co)homologie des groupes : soit G un groupe discret, H un sous-groupe d'indice fini N , et \mathbb{M} un G -module. La trace :

$$\tau : \mathbb{M}^H \longrightarrow \mathbb{M}^G$$

induit un homomorphisme, appelé transfert :

$$\tau : H^*(H; \mathbb{M}) \longrightarrow H^*(G; \mathbb{M}).$$

Si $\rho : H^*(G; \mathbb{M}) \longrightarrow H^*(H; \mathbb{M})$ est la restriction, la composée $\tau \circ \rho$ est la multiplication par l'indice N . (cf [L], p.55). On peut aussi définir le transfert par la (co)homologie singulière des revêtements finis d'ordre N : au niveau des chaînes, le transfert associe à un simplexe la somme de ses relèvements (cf par exemple [B] p.118).

Toujours dans le cas d'un revêtement $p : Y \rightarrow X$ d'ordre N , Atiyah ([A], p. 29) a remarqué que l'image directe des fibrés définit un transfert en K -théorie.

On a la formule :

$$(1) \quad \forall \xi \in \text{Vect}(X), \forall \eta \in \text{Vect}(Y) \quad , \quad f_*(f^* \xi \otimes \eta) = \xi \otimes f_* \eta$$

qui est à rapprocher de la formule :

$$\forall x \in C^*(X) \quad , \quad \forall y \in C^*(Y), \quad \tau(p^* x \cup y) = x \cup \tau y$$

pour les cochaines singulières. Mais on notera qu'en général le fibré $f_*(1)$ n'est pas trivial, de sorte que $f_*(f^* \xi) = \xi \otimes f_*(1) \neq N \cdot \xi$.

Dans [KP], Kahn et Priddy généralisent tout cela en construisant une S -application (i.e. un morphisme dans la catégorie stable) :

$$\tau_p : \Sigma^r X^+ \longrightarrow \Sigma^r Y^+$$

qui induit les transferts ci-dessus ($X^+ = X \amalg * = X/\emptyset$). Par suite il y a un transfert en toute théorie de (co)homologie, et ce transfert commute aux opérations cohomologiques stables : on explique ainsi des résultats d'Evens [E] pour les opérations de Steenrod et de Quillen [Q] pour les opérations d'Adams localisées.

1.2 Les résultats précédents suggèrent les questions suivantes :

soit $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration ; dans quelles conditions :

a/ a-t-on un transfert $\tau_p : h^*(E) \rightarrow h^*(B)$ vérifiant la formule :

$$(1') \quad \tau_p(p \times \cup y) = x \cup \tau_p \eta$$

pour une théorie multiplicative h^* ?

b/ ce transfert est-il induit par une S-application ?

Ces questions ont été résolues, avec un succès croissant, dans les articles [I] à [V]. (*)

Dans [I], Gottlieb définit le transfert en (co)homologie ordinaire, à coefficients (constants) quelconques, pour les fibrations localement triviales de fibre une variété topologique compacte M_n . Cette construction repose sur deux idées :

a/ "l'intégration de long de la fibre" : supposons M orientable, et, pour simplifier l'écriture, sans bord. Si le système local $\tilde{H}^n(M; Z)$ est trivial, la suite spectrale de Serre de cohomologie du fibré $M \rightarrow E \rightarrow B$ permet de définir :

$$p_{\#} : H^i(E, G) \rightarrow H^{i-n}(B; G)$$

par la composée :

$$(2) \quad H^i(E) \rightarrow E_{\infty}^{i-n, n} \xrightarrow{\gamma} E_2^{i-n, n} = H^{i-n}(B, H^n(M; G)) = H^{i-n}(B)$$

b/ le "théorème d'inclusion de la fibre". Il dit que, sous les mêmes hypothèses sur M , il existe une classe $\chi \in H^n(E, Z)$ telle que

(*) Le rapporteur remercie D. Gottlieb pour son "leitfaden".

$i^* \chi = \chi(M) \cdot \mu$, où $i : M \hookrightarrow E$ est l'inclusion, $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de M , et $\mu \in H^*(M; Z)$ la classe d'orientation. Ce dernier théorème est une généralisation de la remarque suivante : si M est différentiable, et si le fibré admet un groupe structural de difféomorphismes, alors le fibré tangent à M s'étend en un fibré sur E , à savoir le fibré des "vecteurs tangents" aux fibres : $EG \times_G TM \rightarrow EG \times_G M = E$. Par suite toute classe caractéristique de M est dans l'image de i^* , en particulier la classe d'Euler !

Toujours sous les hypothèses sur M faites en a/ et b/ le transfert $\tau : H^i(E) \rightarrow H^i(B)$ est alors défini par :

$$(3) \quad \forall x \in H^i(E), \tau(x) = p_{\#} (x \cup \chi)$$

ce transfert est naturel et satisfait la formule (1'). Il en résulte aisément que τp^* est la multiplication par $\chi(M)$. Cette approche reste intéressante car elle permet de définir, dans le cas où M est différentiable, des transferts associés à d'autres nombres caractéristiques (Pontryagin, Stiefel-Whitney).

Dans [III], elle est utilisée pour définir le transfert de Lefschetz, associé à un triangle :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \rho \searrow & & \swarrow \rho \\ & B & \end{array}$$

mais cette construction est dépassée par celle de [V] : voir plus loin.

1.3 La question b/ est résolue dans [II], toujours dans le cas où la fibre est une variété compacte M . Bien que cette construction soit aussi dépassée par celle de [V], il n'est pas inutile d'en dire quelques mots. Considérons d'abord le fibré trivial $p : M \rightarrow *$. Le transfert cherché est une S -application :

$$\tau : S^r = S^r \wedge S^0 \rightarrow S^r \wedge M^+$$

telle que la composée :

$$S^r \xrightarrow{\tau} S^r \wedge M^+ \xrightarrow{S^r p^+} S^r$$

soit de degré $\chi(M)$.

Supposons M différentiable, de fibré tangent α , plongée dans \mathbb{R}^r , de fibré normal β . Le choix d'un voisinage tubulaire définit l'application de Thom-Pontryagin $c : S^r \rightarrow T(\beta)$. Alors on peut prendre pour $\tau : S^r \rightarrow S^r \wedge M^+$ la composée :

$$S^r \xrightarrow{c} T(\beta) \rightarrow T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+.$$

En effet la composée :

$$T(\beta) \rightarrow T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+ \xrightarrow{p} S^r$$

n'est autre que l'application de Gauss :

$$g : T(\beta) = D(\beta)/S(\beta) \rightarrow e^r/S^{r-1} = S^r$$

qui est de degré $\chi(M)$ d'après le théorème de Hopf (cf [M], th.1 p.38).

La construction du transfert $S^r \wedge B^+ \rightarrow S^r \wedge E^+$ dans [II] consiste à faire ce qui précède "fibre par fibre" : Gottlieb et Becker utilisent une version G -équivariante de l'application $S^r \rightarrow S^r \wedge M^+$ (qui repose sur le théorème de plongement de Mostow) et des constructions plus ou moins classiques de G -fibrés. Entre autres propriétés, le transfert ainsi obtenu généralise celui de Kahn et Priddy pour les revêtements.

1.4 Il restait à construire le transfert pour un fibré de Hurewicz, de fibre un cw -complexe compact. Dans [IV], Casson et Gottlieb ont d'abord résolu ce problème en utilisant des lemmes techniques d'approximation des fibrations de Hurewicz par des fibrés de fibre une variété. Mais l'approche de [V] est beaucoup plus élégante, c'est donc elle que nous allons examiner plus en détail.

§ 2. Construction homotopique du transfert de Lefschetz

2.1 Les résultats

On considérera dans la suite un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & B \end{array}$$

dans lequel p est une fibration de Hurewicz et B un cw -complexe connexe, de dimension finie ; on suppose en outre que la fibre F de p a le type d'homotopie d'un cw -complexe fini . On désignera par \wedge_f le nombre de Lefschetz de la restriction de f à F .

Théorème de transfert

Soit A un sous-complexe de B . Il existe une S -application :

$$\tau(f) : \Sigma^r(B/A) \rightarrow \Sigma^r(E/p^{-1}(A))$$

cette application est naturelle, ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de f , et possède les propriétés suivantes :

a/ Si $B = *$, la composée

$$S^r \xrightarrow{\tau(f)} \Sigma^r B^+ \xrightarrow{p^+} S^r$$

est de degré \wedge_f .

b/ Pour toute théorie multiplicative h , on a les formules suivantes, pour tous $x \in h^*(B)$, $y \in h^*(E)$, $z \in h_*(B)$:

$$\begin{aligned} \tau(f)^*(p^*x \cup y) &= x \cup (\tau(f)^*y) \\ p_*(y \cap \tau(f)_*z) &= (\tau(f)^*y) \cap z \end{aligned}$$

On déduit facilement des propriétés précédentes le :

Corollaire 1 : la composée :

$$H^*(B, A; G) \xrightarrow{p^*} H^*(E, p^{-1}(A); G) \xrightarrow{\tau(f)^*} H^*(B, A; G)$$

est la multiplication par \wedge_f .

et la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch fournit immédiatement le :

Corollaire 2 : Pour toute théorie de cohomologie h , la composée :

$$h^*(B, A) \otimes_Z [\wedge_f^{-1}] \xrightarrow{p^*} h^*(E, p^{-1}(A)) \otimes_Z [\wedge_f^{-1}] \xrightarrow{\tau(f)} h^*(B, A) \otimes_Z [\wedge_f^{-1}]$$

est un isomorphisme .

En particulier, si $\Lambda_f = 1$, l'homomorphisme $p^*: h^*(B, A) \rightarrow h^*(E, p^{-1}(A))$ est une injection sur un facteur direct. Une autre conséquence moins immédiate est le :

Théorème de transgression

Supposons la fibre F connexe, et soit $\omega: \Omega B \rightarrow F$ l'évaluation de l'action en un point de F (qui figure dans la suite d'Eckmann-Hilton). Alors, pour tout cw-complexe fini X, l'homomorphisme :

$$\omega_*: \{X, \Omega B\} \rightarrow \{X, F\}$$

est tel que $\Lambda_f \cdot \omega_* = 0$.

2.2 Construction de $\tau(f)$

Elle repose sur l'extension de la S-dualité (de Spanier-Whitehead, cf [H] p.207, ou [S] pp.321-335) aux fibrés, plus précisément aux ex - espaces de James ([J]).

L'idée d'utiliser la S-dualité est suggérée par la dualité d'Atiyah : reprenons les notations de 1.3, et considérons la composée :

$$S^r \xrightarrow{c} T(\beta) \xrightarrow{d} T(\beta) \wedge M^+$$

où d est défini par $d v_m = (v_m, m)$. C'est une S-dualité. Considérons maintenant l'application

$$\theta: T(\beta) \wedge M^+ \rightarrow S^r \wedge M^+$$

obtenue comme suit : le fibré normal au plongement diagonal $M \hookrightarrow D(\beta) \times M$ est $\alpha \oplus \beta \cong \mathbf{R}^r$, par suite on peut choisir un voisinage tubulaire de M dans $D(\beta) \times M$ homéomorphe à $e^r \times M$.

En passant l'extérieur des voisinages au quotient, on obtient θ . Il est clair que $\theta d c: S^r \rightarrow S^r \wedge M^+$ n'est autre que τ , et on peut montrer que $p\theta: T(\beta) \wedge M^+ \rightarrow S^r$ est S-dual de dc.

Le théorème de Hopf assure que la composée $(p\theta)(dc): S^r \rightarrow S^r$ est de degré $\chi(M)$. Mais ceci se généralise :

Lemme ([V], 2.1).- Soit X un cw-complexe fini et f : X → X une application continue ; soit $\tilde{\lambda}(f) = \Sigma(-1)^i \text{tr } \tilde{H}_i(f)$. Soit $\mu : S^r \rightarrow X \wedge \tilde{X}$ une S-dualité et $\tilde{\mu} : X \wedge \tilde{X} \rightarrow S^r$ le dual de μ pour la dualité :

$$S^{2r} = S^r \wedge S^r \xrightarrow{\mu \wedge \tilde{\mu}} X \wedge \tilde{X} \wedge X \wedge \tilde{X} \xrightarrow{T} X \wedge \tilde{X} \wedge X \wedge \tilde{X}$$

(où T permute les X). Alors la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} X \wedge \tilde{X} \xrightarrow{f \wedge \tilde{X}} X \wedge \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\mu}} S^r$$

est de degré $\tilde{\lambda}(f)$.

Preuve. Comme $\hat{\mu}$ est une S-dualité, $\hat{\mu}_* : \tilde{H}_*(X, \mathbb{Q}) \otimes \tilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow \tilde{H}_*(S^r; \mathbb{Q})$ est une dualité, i.e. la transposée $\tilde{\mu}_* : \tilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^*(\tilde{X}; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme de degré r. Par suite, en appliquant $\tilde{H}_*(.; \mathbb{Q})$, on est ramené à la version graduée de l'assertion suivante : si $u : V \rightarrow V$ est un endomorphisme d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie, la composée :

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{id}} \text{Hom}(V, V) = V^* \otimes V \xrightarrow{V^* \otimes u} V^* \otimes V \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$$

où ε est la forme canonique (évaluation), est la multiplication par $\text{tr } u$: c'est la définition intrinsèque de la trace !

Il s'ensuit que dans le cas du fibré trivial $F \rightarrow *$, on a la définition suivante du transfert : soit $\mu : S^r \rightarrow F^+ \wedge \tilde{F}$ une S-dualité, $\tilde{\mu}$ son dual comme ci-dessus.

Alors $\tau(f)$ est la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} F^+ \wedge \tilde{F} \xrightarrow{(F, f)^+ \wedge \tilde{F}} F^+ \wedge F^+ \wedge \tilde{F} \xrightarrow{F^+ \wedge \tilde{\mu}} F^+ \wedge S^r = S^r \wedge F^+.$$

Le transfert par une fibration quelconque n'est autre que l'extension de cette construction aux ex-espaces.

2.3 Ex-espaces

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les principales définitions :

un ex-espace (au-dessus d'un cw-complexe fixé B) est la donnée de deux applications continues $p : E \rightarrow B$ et $\Delta : B \rightarrow E$ telles que $p \Delta = \text{id}$. On notera simplement $E = (E, B, p, \Delta)$.

Une ex-application $f : E \rightarrow E'$ entre deux ex-espaces est une application continue telle que $p'f = p$ et $f\Delta = \Delta'$. On définit de même une ex-homotopie.

On identifie un espace pointé $(X, *)$ à l'ex-espace $(B \times X, B, p_B, j)$, avec $jb = (b, *)$. A toute application continue $p : E \rightarrow B$ on associe l'ex-espace :

$$\bar{E} = (E \amalg B, B, \bar{p}, \bar{\Delta})$$

où \bar{p} et $\bar{\Delta}$ sont définis de façon évidente.

Si E, E' sont deux ex-espaces, on définit sans beaucoup d'imagination les ex-espaces $E \times_B E'$, $E \vee_B E'$, $E \wedge_B E'$, $\Sigma E = S^1 \times_B \wedge_B E$. On définit ΩE comme étant l'ex-espace des lacets dans les fibres issus de la section $\Delta(B)$, etc ...

Dans ce rapport, on appellera "bon" ex-espace un ex-espace $E = (E, B, p, \Delta)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1/ $p : E \rightarrow B$ est une ex-fibration, i.e. il existe une fonction de relèvement de chemins :

$$\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$$

telle que pour tout $\sigma \in B^I$, on ait

$$\Gamma(\Delta(\sigma(0)), \sigma) = \Delta\sigma$$

2/ E est "bien basé", i.e. il existe une rétraction (au sens des ex-applications)

$$r : E \times_B I \longrightarrow E \vee_B I .$$

Il est clair qu'un espace bien pointé s'identifie à un bon ex-espace comme indiqué plus haut, et que si $p : E \rightarrow B$ est une fibration, \bar{E} est un bon ex-espace.

Pour les bons ex-espaces, on peut développer une théorie de l'homotopie entièrement analogue à la théorie classique (théorème de suspension, suites exactes, etc...). Pour les ex-espaces dont la base est de dimension finie et la fibre a le type d'homotopie d'un cw-complexe fini fini, on définit la S-dualité comme dans le cas classique :

$\mu : S^r \times B \rightarrow E \wedge_B \tilde{E}$ est une S-dualité si :

$$D_\mu : \{X \wedge_B E, Y\}_q \rightarrow \{X, Y \wedge_B \tilde{E}\}_{q+r}$$

$$D^\mu : \{E \wedge_B X, Y\}_q \rightarrow \{X, E \wedge Y\}_{q+r}$$

sont des isomorphismes, pour tout q , quels que soient les bons ex-espaces X et Y .

On a les résultats suivants :

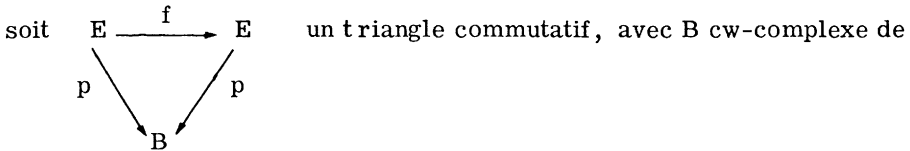
Théorème 2.3.1

$S^r \times B \rightarrow E \wedge_B \tilde{E}$ est une S-dualité si la restriction à chaque fibre est une S-dualité.

Théorème 2.3.2

Tout bon ex-espace, de base de dimension finie et de fibre ayant le type d'homotopie d'un cw-complexe fini, admet un S-dual.

Nous pouvons à présent définir le transfert :



dimension finie, p fibration de fibre F ayant le type d'homotopie d'un cw-complexe fini. D'après le théorème 2.3.2, il existe une S-dualité d'ex-espaces :

$$\mu : S^r \times B \rightarrow \bar{E} \wedge_B \tilde{E}$$

comme dans le cas des espaces, $\bar{E} \wedge_B \tilde{E}$ est S^{2r} -autodual et on définit

$$\tilde{\mu} : \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \rightarrow S^r \times B,$$

Soit la composée :

$$S^r \times B \xrightarrow{\mu} \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{(\bar{E}, \tilde{f}) \wedge \tilde{E}} \bar{E} \wedge_B \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{\bar{E} \wedge \tilde{\mu}} \bar{E} \wedge_B B \times S^r \xrightarrow{\cong} S^r \bar{E}$$

et soit $A \subset B$, et $E_A = p^{-1}(A)$. La composée ci-dessus envoie

$S^r \times A \cup \{s_0\} \times B$ dans $S^r \times E_A \cup \{s_0\} \times E$; par passage au quotient, on obtient donc :

$$\tau(f) : S^r \wedge (B/A) \longrightarrow S^r \wedge (E/E_A)$$

qui est le t transfert cherché . Les vérifications nécessaires se font sans surprise.

2.4 Démonstration du théorème de transgression

Nous en indiquons seulement les étapes essentielles .

Soit $E' \xrightarrow{f'} E'$ un triangle commutatif,

$$\begin{array}{ccc}
 & & \\
 p' \searrow & & \swarrow p' \\
 & \Sigma X &
 \end{array}$$

avec les hypothèses du théorème de transfert mais où la base est la suspension d'un espace pointé X .

Si $F' = p'^{-1}(\ast)$ est la fibre de p' , on a le transfert :

$$\tau(f') : \Sigma^{r+1} X \longrightarrow \Sigma^r(E'/F')$$

ce dernier a ici une interprétation très simple : en relevant les chemins canoniques de ΣX , à savoir $\lambda_{\langle t, x \rangle} : u \mapsto \langle ut, x \rangle$, on définit une application continue

$$\sigma : \Sigma X \longrightarrow E'/F' .$$

Lemme : Si F' est connexe, les S -applications $\tau(f')$ et $\wedge \sigma$ sont égales (\wedge désigne le nombre de Lefschetz de $f'|F'$) .

Soit maintenant le triangle $E \xrightarrow{f} E$ toujours avec les mêmes

$$\begin{array}{ccc}
 & & \\
 p \searrow & & \swarrow p \\
 & B &
 \end{array}$$

hypothèses . Soit $b_0 \in B$, et $\omega : \Omega B \rightarrow F$ l'évaluation de l'action en b_0 .

Soit X un complexe de dimension finie, et $g : X \rightarrow \Omega B$ une application continue pointée .

La composée :

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma \Omega B \xrightarrow{a} B$$

où a est l'adjointe de l'identité de ΩB , induit un triangle :

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E' \\ p' \searrow & & \swarrow p' \\ & \Sigma X & \end{array}$$

Lemme : Le carré :

$$\begin{array}{ccc} E'/F & \xrightarrow{k} & \Sigma F \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \Sigma \omega \\ \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma g} & \Sigma \Omega B \end{array}$$

dans lequel $k : E'/F \rightarrow \Sigma F$ est le "bord" de la suite de Puppe de la cofibration $F \hookrightarrow E'$, est commutatif .

Pour établir le théorème de transgression, il suffit de montrer que $\wedge \{\omega g\} = 0$, pour toute $g : X \rightarrow \Omega B$ avec X de dimension finie .

D'après le second lemme, on a $\{\omega g\} = \{k \sigma\}$ et d'après le premier, $\wedge \{\omega g\} = \{k \cdot \wedge \sigma\} = \{k\} \cdot \tau(f')$. Or le diagramme commutatif suivant de S-applications :

$$\begin{array}{ccccc} E'^+ & \xrightarrow{c'} & E' & \xrightarrow{j} & E'/F & \xrightarrow{k} & \Sigma F \\ \tau(f') \uparrow & & & \nearrow \tau(f') & & & \\ \Sigma X^+ & \xrightarrow{c} & \Sigma X & & & & \end{array}$$

où c, c', j sont les quotients évidents, et $kj = 0$ par Puppe, montre que $\{k\}\tau\{c\} = 0$, d'où $\{k\}\tau = 0$ puisque c a une section.

§ 3. Applications

3.1 Un principe de scindement ([II])

Théorème,- Soit ξ un $2n$ -fibré vectoriel réel de base B de dimension finie . Il existe un cw-complexe (de dimension finie) X et une application $\lambda : X \rightarrow B$ tels que :

- (1) le groupe structural de $\lambda^*\xi$ se réduit au normalisateur $N(T)$ d'un tore maximal de $O(2n)$.
- (2) $\lambda^* : h^* B^+ \rightarrow h^* E^+$ est un monomorphisme sur un facteur direct , pour toute théorie h^* .

La démonstration s'appuie sur le fait que $\chi(G/N(T)) = 1$ pour tout groupe de Lie compact G (cf par exemple [B], p.27, 6.3). On prend alors $X = \tilde{E}/N(T)$, où \tilde{E} est l'espace total du $O(2n)$ -fibré principal associé à ξ et l'on applique le corollaire 2 à la fibration :

$$O(2n)/N(T) \rightarrow \tilde{E}/N(T) \xrightarrow{\lambda} \tilde{E}/O(2n) = B.$$

Ce théorème est à la base de la démonstration du théorème de Quillen-Friedlander-Sullivan, alias la conjecture d'Adams, proposée dans [II], § 7. L'idée consiste à appliquer le théorème à la théorie de cohomologie associée à l'espace de lacets infini BF , et compte-tenu de ce que $N(T) = \epsilon_n \int O(2)$, de se ramener via des techniques inspirées de [Q], à la "conjecture" pour les fibrés de rang 2, démontrée par Adams.

3.2 "The fibering question" (cf [III] et [IV])

Il s'agit de savoir si un espace E peut être l'espace total d'une fibration de façon non triviale. Dans ce qui suit, "compact" signifie homotope à un cw-complexe fini.

Théorème : Il n'existe pas de fibration non triviale, de fibre et base compacte, d'espace total $\mathbb{R}IP^{2n}$, $\mathbb{C}IP^{2n}$, $\mathbb{H}IP^{2n}$, cay IP^2 .

Théorème : Soit $p : S^n \rightarrow B$, $n \geq 2$ une fibration non triviale de base et de fibre F compacte. Alors :

- si n est pair, $F \sim S^0$
- si n est impair, $[p] \in \pi_n(B)$ est d'ordre infini.

Faute de l'espace nécessaire, nous nous contenterons de montrer à titre d'exemple qu'il n'existe pas de submersion non triviale $p : \mathbb{R}IP^{2n} \rightarrow M$ sur une variété M . D'après Ehresmann, p est une fibration de fibre une variété compacte F . On a $\chi(M) \cdot \chi(F) = \chi(\mathbb{R}IP^{2n}) = 1$, d'où $\chi(F) = \pm 1$.

On en déduit que F est connexe, et la suite exacte d'homotopie montre que $\pi_1(M) = 0$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le transfert en cohomologie entière montre que p^* est injective, donc $H^*(M)$ est de torsion et M n'est pas orientable : ergo $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit \tilde{M} le revêtement universel de M ; on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{2n} \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{M} & \longrightarrow & M \end{array}$$

et le transfert montre que \tilde{p}^* est injective : par suite, ou bien \tilde{M} est acyclique, donc un point, ou bien F est de dimension nulle et connexe, donc un point .

3.3 Applications du théorème de transgression

Notons d'abord que ce théorème entraîne que $\wedge \omega_* = 0$ pour toute théorie d'homologie, en particulier l'homotopie stable, et que $\wedge \omega^* = 0$ au moins en cohomologie ordinaire .

Quant à l'application ω , elle apparaît sous des formes variées :

projection $G \rightarrow G/H$, où G est un groupe topologique et G/H un quotient compact ; évaluation $\omega : M \rightarrow X$ où M est un espace d'équivalences d'homotopie de X ; inclusion de la fibre d'un fibré principal . D'où une variété d'applications, qu'on trouvera dans [III], [IV], ou [V].

En voici quelques unes :

Proposition.- Soit G un groupe de Lie compact, et N le normalisateur d'un tore maximal . Alors la projection $G \rightarrow G/N$ est stablement triviale .

En effet, $\chi(G/N) = 1$ et G est un polyèdre . On observera que $\rho_* : \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(G/N)$ est un isomorphisme pour $n \geq 3$!

Proposition.- Soit G un groupe de Lie qui opère sur un cw-complexe connexe fini X , tel que $\chi(X) \neq 0$. Soit $x \in X$, et soit $\omega_x : G \rightarrow X$ l'évaluation en x . Alors $0 = \omega_* : H_*(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z})$.

Remarquons d'abord que l'assertion ne dépend pas de x . Ensuite, le théorème de Lefschetz, joint au fait qu'un tore admet un générateur, montre qu'un tore maximal T de G admet un point fixe x_0 .

Par suite ω_{x_0} factorise à travers $\rho : G \rightarrow G/T$. Le théorème de transgression montre que $\chi(G/T) \cdot \rho_* = 0$. Or, d'après Bott et Borel [BB], $H_*(G/T; \mathbb{Z})$ est sans torsion. Comme $\chi(G/T) = |W(G)| \neq 0$ on a $\rho_* = 0$ et donc $\omega_* = 0$.

Proposition.- Soit $\alpha \in \pi_1(S^{2n})$, soit $\{\alpha\} \in \pi_{i-2n}^S$ l'élément représenté par α , et soit $\iota_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$ un générateur. Alors, si $[\alpha, \iota_{2n}] = 0$, on a $2\{\alpha\} = 0$.

Preuve $[\alpha, \iota_{2n}] = 0$ signifie qu'il existe une application $F : S^i \times S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ dont la restriction à $S^i \times \{*\}$ est α et la restriction à $\{*\} \times S^{2n}$ est l'identité. Soit M l'espace des applications continues de degré 1 de S^{2n} dans S^{2n} . L'adjointe de F est $\tilde{F} : S^i \rightarrow M$, et on a $\omega \tilde{F} = \alpha$, où $\omega : M \rightarrow S^{2n}$ est l'évaluation au point de base. Comme $\chi(S^{2n}) = 2$, le théorème de transgression montre que $2\{\alpha\} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [I] D.GOTTLIEB - Fibre bundles and the Euler characteristic ,
J.Diff. Geom.10 (1975) pp 39-48
- [II] J.C.BECKER - D.GOTTLIEB - The transfer map and fiber bundles ,
Topology 14 (1975) pp 1-12
- [III] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - Applications of the evaluation map
and transfer map theorems , Math. Ann. 211 (1974)
pp 277-288
- [IV] A.CASSON - D.GOTTLIEB - Fibrations with compact fibres , preprint
- [V] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - The transfer for fibrations and
duality , preprint
- [A] M. ATIYAH - Characters and cohomology of finite groups , IHES n°9
(1961) , pp 23-64
- [BB] R. BOTT - On torsion in Lie groups , Proc.Nat. Acad.Sc. USA (1954)
pp 586-588
- [B] G.E.BREDON - Introduction to compact transformation groups ,
Academic Press. N.Y. 1972
- [E] L.EVENS - Steenrod operations and the transfer , Proc. Amer. Math.
Soc. 19 (1968) pp 1387-1388
- [H] D.HUSEMOLLER - Fibre bundles , McGraw-Hill , N.Y. 1966
- [J] I.JAMES - Ex-homotopy theory , Ill Journ.Math. 15 (1971) , pp 324-337
- [KP] D.KAHN - S.PRIDDY - Applications of the transfer to stable homotopy
theory , Bull.Amer. Math.Soc. 78 (1972) pp 981-986
- [L] S.LANG - Rapport sur la cohomologie des groupes , Benjamin , N.Y.
(1966)
- [M] J.MILNOR - Topology from a differentiable viewpoint, U-Press of
Virginia , Charlottesville 1965
- [Q] D.QUILLEN - The Adams conjecture , Topology 10 (1970) pp 67-80
- [S] R.SWITZER - Algebraic Topology - Homotopy and Homology
Springer-Verlag Grundle Math.Wiss. n°212 , Berlin 1975