ALAIN GUICHARDET

Représentations de G^X selon Gelfand et Delorme

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 486, p. 238-255
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__238_0>

REPRÉSENTATIONS DE G^X SELON GELFAND ET DELORME

par Alain GUICHARDET

§ 1. Introduction

I.M. Gelfand a tenté depuis quelques années de mettre sur pieds une théorie des "distributions non commutatives" qui consisterait à peu près en ceci : on sait qu'une distribution (au sens ordinaire) sur une variété X est une forme linéaire continue T sur l'espace $C_0^\infty(X,\mathbf{R})$ des applications différentiables à support compact de X dans $\mathbf{R}$; ou encore, en considérant $f \mapsto e^{i\,T(f)}$, un caractère du groupe abélien $C_0^\infty(X,\mathbf{R})$; ou enfin une représentation unitaire irréductible de ce groupe. Remplaçons maintenant $\mathbf{R}$ par un groupe de Lie G ; il sera "naturel" d'appeler "distribution sur X à valeurs dans G " une représentation unitaire irréductible du groupe $C_0^\infty(X,G)$; on aura immédiatement par exemple les "distributions de Dirac" : $C_0^\infty(X,G) \ni f \mapsto U(f(x_0))$ où U est une représentation irréductible donnée de G et x_0 un point de X. Il est déjà plus difficile de généraliser les dérivées des distributions de Dirac ; cela a été fait par Gelfand et Graiev en 1968 ([5]) pour $G = SU(2)$. Dès cette époque ces auteurs ont senti le besoin de construire une "intégrale multiplicative" qui généraliserait la distribution définie par la mesure de Lebesgue μ lorsque $X = \mathbf{R}^n$; comme cette distribution est caractérisée (à un coefficient constant près) par son invariance relativement à toutes les transformations différentiables de $\mathbf{R}^n$ qui conservent μ, on peut poser comme suit le problème de l'intégrale multiplicative dans le cas général : on se donne une mesure μ sur X et on cherche une représentation unitaire irréductible de $C_0^\infty(X,G)$ qui soit invariante (à équivalence unitaire près) par tous les automorphismes de $C_0^\infty(X,G)$ provenant des transformations différentiables de X qui conservent μ. Dans l'introduction à leur article [12], Verchik, Gelfand et Graiev affirment qu'ils ont construit une intégrale multiplicative pour toute une classe de groupes G semi-simples, à savoir les (ou des ? : cette imprécision, regrettable du point de vue historique, provient de l'absence d'article dans la langue russe) groupes pour lesquels la représentation triviale

ε_G n'est pas isolée dans l'espace $\hat{G}$ des représentations unitaires irréductibles (ceci exclut bien sûr les groupes compacts) ; ils ajoutent qu'ils considèrent dans [12] uniquement le cas de $G = SL(2,\mathbf{R})$ parce que " l'on ne peut comprendre une situation nouvelle sans avoir fait auparavant une étude approfondie du groupe SL_2 ". Enfin dans [13] les mêmes auteurs Verchik, Gelfand, Graiev construisent une intégrale multiplicative par une méthode générale, exposée au § 3 ci-dessous, qui s'applique en particulier à tous les groupes $SO_o(n,1)$ et $SU(n,1)$. Bien que [13] ne donne pas les démonstrations (qui d'ailleurs n'ont jamais été publiées par leurs inventeurs), on peut dire que cette méthode repose essentiellement sur la non-nullité du premier groupe de cohomologie $H^1(G,U)$ du groupe considéré G à valeurs dans l'espace d'une certaine représentation U ; or P. Delorme a démontré [2] que les groupes $SO_o(n,1)$ et $SU(n,1)$ (plus précisément : les groupes d'algèbre de Lie $so(n,1)$ ou $su(n,1)$) sont les seuls groupes de Lie connexes simples admettant des représentations U avec $H^1(G,U) \neq 0$, et Gelfand nous a dit l'an dernier que ce résultat était inconnu de lui ; la démonstration de Delorme repose sur le fait que les groupes en question sont les seuls groupes de Lie connexes simples pour lesquels ε_G n'est pas isolée dans $\hat{G}$ - et cela nous ignorons si Verchik, Gelfand et Graiev le savaient, bien que visiblement ils l'aient pour le moins pressenti.

§ 2. Produits tensoriels continus de représentations

(Pour plus de détails on pourra consulter mon article d'exposition [8].)

Commençons par quelques considérations purement formelles. Si l'on veut construire une représentation de $C_o^\infty(X,G)$ invariante par les automorphismes de $C_o^\infty(X,G)$ provenant de transformations différentiables de X conservant une mesure μ , l'idée la plus naturelle est de faire un produit tensoriel indexé par X de représentations de G toutes identiques à une même représentation, ce qui signifie ceci : on se donne une représentation U de G dans un espace hilbertien H , on pose $\tilde{H} = \bigotimes_{x \in X} H_x$ avec $H_x = H$, et on définit une représentation $\tilde{U}$ de $C_o^\infty(G,X)$ dans $\tilde{H}$ par $U(f) = \bigotimes_{x \in X} U(f(x))$; nous écrirons cela $\tilde{U} = \otimes U$ (en particulier précisons bien que si U et V sont des représentations de G , $U \otimes V$ est une représentation de $G \times G$ et non de G).

Mais quel sens peut-on donner à ces produits tensoriels ? Il ne serait certainement pas raisonnable de faire un produit tensoriel "discret" sans tenir compte de la structure de X , ni de μ ; l'espace $\widetilde{H}$ obtenu serait beaucoup trop gros et, de plus, sans lien avec les données. On est donc amené à faire un produit tensoriel "continu", dans lequel le produit scalaire de deux "tenseurs décomposables" $\xi = \otimes \xi_x$, $\eta = \otimes \eta_x$ serait donné par le produit continu des produits scalaires $(\xi_x|\eta_x)$, à savoir $\exp[\int \log(\xi_x|\eta_x)d\mu(x)]$ lorsque ceci a un sens. De plus il est naturel de postuler de bonnes propriétés d'associativité, disant ce qui se passe quand on fait une partition finie ou dénombrable de X .

Tout cela paraîtra probablement bien vague au lecteur - qui n'en sera que plus agréablement surpris d'apprendre qu'un problème aussi mal posé admet une solution relativement précise et simple. Avant de l'exposer, je dois dire quelques mots des espaces hilbertiens symétriques (ou espaces de Fock de la physique quantique).

Prenons un espace hilbertien H , sur le <u>corps des réels</u> pour simplifier ; notons $S^n H$, pour n entier > 0 , sa n-ième puissance symétrique hilbertienne, et SH la somme hilbertienne des $S^n H$, $n \geq 0$, avec $S^0 H = \mathbf{R}$. A tout $x \in H$ on associe le vecteur $\mathrm{EXP}\, x$ de SH , de coordonnées

$$(1, x, x^{\otimes 2}/\sqrt{2!}, \dots, x^{\otimes n}/\sqrt{n!}, \dots) \quad ;$$

les vecteurs de cette forme sont totaux dans SH et linéairement indépendants. Si A est un opérateur orthogonal dans H et b un élément de H , il existe un unique opérateur orthogonal dans SH , noté $O_{A,b}$, tel que

$$(1) \qquad O_{A,b} \,.\, \mathrm{EXP}\, x = \exp[-\|b\|^2/2 - (Ax|b)] \,.\, \mathrm{EXP}(Ax + b) \,.$$

Ces opérateurs se multiplient de la façon suivante :

$$(2) \qquad O_{A,b}\, O_{A',b'} = O_{AA',b+Ab'}$$

Notons maintenant G un groupe topologique, A une représentation orthogonale continue de G dans H , b un 1-cocycle pour A , ou application continue de G dans H vérifiant

$$b(gg') = b(g) + A(g)\, b(g') \qquad \forall\, g, g' \in G \quad ;$$

(2) montre que l'application $g \mapsto O_{A(g),b(g)}$ est une représentation (orthogonale continue) de G dans SH ; nous la noterons $O_{A,b}$, et $U_{A,b}$ la représentation unitaire complexifiée de $O_{A,b}$.

Ceci étant nous pouvons exposer la solution du problème (mal) posé au début de ce paragraphe. Un théorème profond et difficile d'Araki et Woods ([1], voir aussi [7]) affirme que si μ est diffuse on doit procéder comme suit pour définir des produits tensoriels continus $\otimes H_x$ et $\otimes U_x$ (ici les H_x et les U_x peuvent dépendre de x). Tout d'abord, pour des raisons de simple commodité, nous remplaçons $C_0^\infty(X,G)$ par le groupe $\widetilde{G}$ des applications de X dans G qui sont boréliennes et ne prennent qu'un nombre fini de valeurs (du coup il suffit que X soit un espace borélien muni d'une mesure μ, et non plus une variété). Puis nous nous donnons un champ mesurable d'espaces hilbertiens réels $x \mapsto K_x$, un champ mesurable de représentations orthogonales $x \mapsto A_x$ de G dans les divers K_x, un champ mesurable de 1-cocycles $x \mapsto b_x$ pour les diverses A_x tel que $\int \|b_x(g)\|^2 d\mu(x) < +\infty$ pour tout $g \in G$; on pose $\widetilde{K} = \int^\oplus K_x \, d\mu(x)$; on définit une représentation $\widetilde{A}$ et un cocycle $\widetilde{b}$ de $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{K}$ par

$$\widetilde{A}(f) = \int^\oplus A_x(f(x)) \, d\mu(x)$$
$$\widetilde{b}(f) = \int^\oplus b_x(f(x)) \, d\mu(x) \qquad \forall f \in \widetilde{G} .$$

D'autre part à partir des objets K_x, A_x, b_x on peut construire comme indiqué ci-dessus un espace hilbertien complexe H_x, complexifié de SK_x, et une représentation unitaire $U_x = U_{A_x,b_x}$ de G dans H_x ; de même à partir de $\widetilde{K}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{b}$ on construit $\widetilde{H}$ et $\widetilde{U}$. Alors la bonne définition de $\otimes H_x$ et $\otimes U_x$ est

$$\otimes H_x = \widetilde{H} \quad , \quad \otimes U_x = \widetilde{U} .$$

Il est à peu près évident que $\widetilde{U}$ est bien invariante, à équivalence unitaire près, par les automorphismes de $\widetilde{G}$ provenant de transformations de X qui conservent μ.

<u>Moralité</u> : contrairement à ce qui se passe pour les produits tensoriels ordinaires, finis ou infinis, on ne peut faire le produit tensoriel continu d'une famille de représentations U_x que si elles sont d'un type très particulier, à savoir du type $U_{A,b}$.

§ 3. Irréductibilité des P. T. C. de représentations

Nous exposons ici le résultat de Verchik, Gelfand, Graiev [13] que, comme il a été dit dans l'introduction, ses auteurs ont énoncé sans démonstration ; la démonstration qui suit est due pour l'essentiel à P. Delorme qui ne l'a pas non plus publiée.

THÉORÈME 1.- *On considère (pour simplifier) l'intervalle $X = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue $\mu = dx$; on se donne un groupe localement compact G et un sous-groupe compact Γ ; une représentation orthogonale continue A de G dans un espace hilbertien réel K et un 1-cocycle b pour A ; on suppose que b est nul sur Γ, que $b(G)$ est total dans K, et que K ne contient aucun vecteur non nul invariant par Γ. On pose $\widetilde{K} = L^2(X,\mu,K)$; on définit une représentation $\widetilde{A}$ et un cocycle $\widetilde{b}$ de $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{K}$ par*

$$(\widetilde{A}(f).\xi)(x) = A(f(x)).\xi(x) \qquad \forall\, \xi \in \widetilde{K}$$

$$\widetilde{b}(f)(x) = b(f(x))$$

pour toute $f \in \widetilde{G}$. Alors la représentation unitaire $\widetilde{U}$ de $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{H}$ (complexifié de $S\widetilde{K}$), associée à $\widetilde{A}$ et $\widetilde{b}$, est irréductible.

On va d'abord introduire quelques notations. Pour tout entier $n > 0$, on note Δ_n le sous-ensemble de X^n formé des suites $(x_1,\dots,x_n)$ ayant au moins deux termes égaux ; Δ_n est négligeable pour $\mu^{\otimes n}$.

On notera (K_1,A_1) la représentation unitaire complexifiée de (K,A) ; $(\widetilde{K}_1,\widetilde{A}_1)$ celle de $(\widetilde{K},\widetilde{A})$, avec $\widetilde{K}_1 = L^2(X,\mu,K_1)$. Pour tout $n > 0$, on note $(T^n\widetilde{K}_1 , T^n\widetilde{A}_1)$ la n-ième puissance tensorielle hilbertienne de $(\widetilde{K}_1,\widetilde{A}_1)$; on peut identifier $T^n\widetilde{K}_1$ à $L^2(X^n,\mu^{\otimes n},T^nK_1)$ en associant à tout élément $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n$ de $T^n\widetilde{K}_1$ l'application

$$X^n \ni (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \xi_1(x_1) \otimes \dots \otimes \xi_n(x_n) \in T^nK_1 \quad ;$$

alors pour tout $f \in \widetilde{G}$, $T^n\widetilde{A}_1(f)$ devient l'opérateur décomposable de composantes

$$(T^n\widetilde{A}_1(f))_{x_1,\ldots,x_n} = A_1(f(x_1)) \otimes \ldots \otimes A_1(f(x_n)) .$$

Enfin on note $(T\widetilde{K}_1 , T\widetilde{A}_1)$ la somme hilbertienne des $(T^n\widetilde{K}_1 , T^n\widetilde{A}_1)$ pour $n \geq 0$, $(T^o\widetilde{K}_1 , T^o\widetilde{A}_1)$ étant la représentation triviale de dimension 1 .

Le groupe $\widetilde{G}$ est limite inductive de sous-groupes G_ν définis comme suit : ν désigne une partition finie de X en sous-ensembles boréliens $X_1,\ldots,X_k$ et G_ν est l'ensemble des applications boréliennes de X dans G qui sont constantes sur les X_i ; c'est un groupe localement compact isomorphe à G^k .

<u>Lemme 1</u>.- <u>L'algèbre de von Neumann</u> $\mathfrak{A}$ <u>engendrée par</u> $T\widetilde{A}_1(\widetilde{\Gamma})$ <u>contient, pour tout entier</u> $r \geq 0$, <u>le projecteur orthogonal</u> $P_r : T\widetilde{K}_1 \to T^r\widetilde{K}_1$.

<u>Démonstration</u>. On note C l'ensemble des caractères des représentations irréductibles non triviales du groupe compact Γ ; on rappelle que pour tout élément δ de C , on a $\int \delta(\gamma)\, d\gamma = 0$, et que si U est une représentation unitaire de Γ , l'opérateur $U(\delta) = \int \delta(\gamma)\, U(\gamma)\, d\gamma$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace isotypique correspondant à δ ; en particulier on a

$$\sum_{\delta \in C} A_1(\delta) = I \tag{3}$$

puisque $A_1|_\Gamma$ ne contient pas la représentation triviale.

Fixons maintenant un entier $p > r$; on note ν_p la partition de X en p sous-intervalles égaux : $X_{p,1} ,\ldots, X_{p,p}$; puis pour toute suite d'entiers $i_1,\ldots,i_r$ vérifiant $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq p$, et tous éléments $\delta_1,\ldots\delta_r$ de C on considère la fonction suivante sur Γ_{ν_p} :

$$f \longmapsto Q_{p,\delta_1,\ldots\delta_r,i_1,\ldots i_r}(f) = \delta_1(\gamma_{i_1}) \times \ldots \times \delta_r(\gamma_{i_r})$$

si $f(x) = \gamma_1$ pour $x \in X_{p,1} ,\ldots, \gamma_p$ pour $x \in X_{p,p}$.

Cette fonction est un caractère de Γ_{ν_p} et ces caractères (pour p fixé) sont deux à deux distincts ; donc les opérateurs $T\widetilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\ldots\delta_r,i_1,\ldots i_r})$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux ; leur somme

$$P_{r,p} = \sum_{\delta_1\ldots\delta_r} \sum_{i_1\ldots i_r} T\widetilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\ldots\delta_r,i_1,\ldots i_r})$$

est un projecteur qui appartient à $\mathfrak{A}$. Il suffit donc, pour démontrer le lemme, de montrer que lorsque p tend vers l'infini, $P_{r,p}$ tend fortement vers P_r , ou encore que $\sum_{\delta_1 \dots \delta_r} \sum_{i_1 \dots i_r} T^n \tilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\dots\delta_r}, {}_{i_1,\dots i_r})_{x_1,\dots x_n}$ tend fortement vers I si $n = r$ et vers 0 si $n \neq r$, et cela pour tout $(x_1,\dots x_n) \in X^n - \Delta_n$.

Or on a

$$T^n \tilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\dots\delta_r}, {}_{i_1,\dots i_r})_{x_1,\dots x_n} =$$

$$\int_{\Gamma^p} A_1(f(x_1)) \otimes \dots \otimes A_1(f(x_n)).\delta_1(\gamma_{i_1})\dots\delta_r(\gamma_{i_r})\, d\gamma_1 \dots d\gamma_p$$

en posant

$$f(x) = \gamma_1 \quad \text{si} \quad x \in X_{p,1} \;,\dots,\; \gamma_p \quad \text{si} \quad x \in X_{p,p} \;.$$

Comme $x_1,\dots x_n$ sont deux à deux distincts, ils appartiennent, pour p assez grand, à des sous-ensembles deux à deux distincts que nous noterons X_{p,j_1} ,..., X_{p,j_n} ; on a donc

$$T^n \tilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\dots\delta_r}, {}_{i_1,\dots i_r})_{x_1,\dots x_n} =$$

$$\int A_1(\gamma_{j_1}) \otimes \dots \otimes A_1(\gamma_{j_n}) . \delta_1(\gamma_{i_1})\dots\delta_r(\gamma_{i_r}) . d\gamma_1 \dots d\gamma_p \;.$$

Si l'ensemble $\{j_1,\dots j_n\}$ n'est pas inclus dans l'ensemble $\{i_1,\dots i_r\}$, l'intégrale ci-dessus est nulle car elle contient en facteur un terme du type $\int A_1(\gamma)\, d\gamma$ qui est nul ; de même si $\{j_1,\dots j_n\} \not\supset \{i_1,\dots i_r\}$ elle l'est aussi car elle contient un terme du type $\int \delta(\gamma)\, d\gamma$ qui est nul ; finalement l'intégrale ne peut être non nulle que si $\{j_1,\dots j_n\} = \{i_1,\dots i_r\}$, ce qui implique $n = r$; ceci démontre notre assertion dans le cas où $n \neq r$. Supposons maintenant $n = r$; fixons $\delta_1,\dots\delta_r$ et faisons varier $i_1,\dots i_r$; l'intégrale ne peut être non nulle que si $(i_1,\dots i_r)$ est la suite $(j_1,\dots j_r)$ remise dans l'ordre croissant, i.e. si on a $j_1 = i_{s(1)}$,..., $j_r = i_{s(r)}$ où s est une permutation de $\{1,\dots,r\}$; on a ainsi

$$\sum_{i_1 \dots i_r} T^r \tilde{A}_1(Q_{p,\delta_1,\dots\delta_r}, {}_{i_1,\dots i_r})_{x_1,\dots x_r} =$$

$$\int A_1(\gamma_{i_{s(1)}}) \otimes \dots \otimes A_1(\gamma_{i_{s(r)}}) . \delta_1(\gamma_{i_1})\dots\delta_r(\gamma_{i_r}) . d\gamma_1 \dots d\gamma_p$$

$$= A_1(\delta_{s(1)}) \otimes \dots \otimes A_1(\delta_{s(r)}) \;.$$

D'où enfin, en utilisant (3) :

$$\sum_{\delta_1 \ldots \delta_r} \sum_{i_1 \ldots i_r} T^r \widetilde{A}_1 (Q_{p,\delta_1 \ldots \delta_r, i_1 \ldots i_r})_{x_1, \ldots x_r} = I .$$

Lemme 2.- L'élément EXP 0 de $\widetilde{H}$ est cyclique pour la représentation $\widetilde{U}$.

Démonstration. Notons M le sous-espace vectoriel fermé de $\widetilde{H}$ engendré par les vecteurs $\widetilde{U}(f)$. EXP 0 avec $f \in \widetilde{G}$, et montrons que $M = \widetilde{H}$. On peut identifier $\widetilde{H}$ à $S\widetilde{K}_1$ et écrire

$$\widetilde{H} = S\widetilde{K}_1 \subset T\widetilde{K}_1 \quad ;$$

alors, d'après (1) :

$$\widetilde{U}(f) \,.\, \mathrm{EXP}\ 0 = \exp[- \|\widetilde{b}(f)\|^2/2] \,.\, \mathrm{EXP}\ \widetilde{b}(f) \quad ;$$

on notera Q_n le projecteur orthogonal $S\widetilde{K}_1 \to S^n\widetilde{K}_1$, restriction de P_n à $S\widetilde{K}_1$. D'après le lemme 1, M contient les vecteurs

$$Q_n(\mathrm{EXP}\ \widetilde{b}(f)) = (n!)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{b}(f)^{\otimes n}$$

et il suffit de montrer que les vecteurs $\widetilde{b}(f)^{\otimes n}$ sont totaux dans $S^n\widetilde{K}_1$. Faisons opérer le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans $T^n\widetilde{K}_1$, T^nK_1 et X^n par

$$s(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n) = \xi_{s^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{s^{-1}(n)}$$

$$s(x_1, \ldots, x_n) = (x_{s^{-1}(1)}, \ldots, x_{s^{-1}(n)}) \quad ;$$

identifiant $T^n\widetilde{K}_1$ à $L^2(X^n, \mu^{\otimes n}, T^nK_1)$ on voit facilement que

$$(s(\xi))_x = s(\xi_{s^{-1}(x)}) \qquad \forall\ \xi \in T^n\widetilde{K}_1 \ , \ x \in X^n \ ;$$

donc si ξ appartient à $S^n\widetilde{K}_1$ on a

(4) $$\xi_{s(x)} = s(\xi_x) \ .$$

Considérons un élément ξ de $S^n\widetilde{K}_1$ orthogonal aux $\widetilde{b}(f)^{\otimes n}$ et montrons que $\xi = 0$. En passant dans $L^2(X^n, \mu^{\otimes n}, T^nK_1)$ on aura

$$\int_{X^n} (\xi_{x_1 \ldots x_n} | b(f(x_1)) \otimes \ldots \otimes b(f(x_n))) \,.\, dx_1 \ldots dx_n = 0$$

pour toute $f \in \widetilde{G}$; comme ξ et $b(f)^{\otimes n}$ sont dans $S^n\widetilde{K}_1$, (4) montre que l'expression sous le signe $\int$ est invariante par permutations ; par suite

(5) $$\int_{E_n} (\xi_{x_1 \ldots x_n} | b(f(x_1)) \otimes \ldots \otimes b(f(x_n))).dx_1 \ldots dx_n = 0$$

où E_n est l'ensemble des $x = (x_1, \ldots x_n)$ vérifiant $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Tout point x de E_n admet une base de voisinages de la forme $X_1 \times \ldots \times X_n$ avec $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$; fixons $g_1, \ldots g_n$ dans G et définissons $f \in \widetilde{G}$ par

$$f(X) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in X_1 , \ldots , g_n \quad \text{si } x \in X_n \\ e & \text{si } x \notin X_1 \cup \ldots \cup X_n \end{cases} ;$$

comme b est un cocycle, $b(e)$ est nul et $b(f(x_1)) \otimes \ldots \otimes b(f(x_n))$ ne peut être non nul que si chaque x_i appartient à un X_j ; comme $x_1 < \ldots < x_n$, (5) s'écrit

$$\sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n} \int_{X_{j_1} \times \ldots \times X_{j_n}} (\xi_{x_1 \ldots x_n} | b(g_{j_1}) \otimes \ldots \otimes b(g_{j_n})).dx_1 \ldots dx_n = 0$$

pour tous $g_1, \ldots g_n \in G$. Notons $F_{j_1, \ldots j_n}(g_1, \ldots g_n)$ l'intégrale qui figure au second membre ; on a donc

(6) $$\sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_n} F_{j_1, \ldots j_n}(g_1, \ldots g_n) = 0 \qquad \forall\, g_1, \ldots g_n ,$$

et on remarque que $F_{j_1, \ldots j_n}(g_1, \ldots g_n)$ est nul si l'un des g_{j_i} est égal à e .

(6) s'écrit aussi

$$(\textstyle\sum \text{ pour un } j_i \text{ au moins égal à } 1) + (\textstyle\sum \text{ pour tous } j_i \neq 1) = 0 \; ;$$

pour $g_1 = e$, le premier terme est nul, donc aussi le second ; mais celui-ci est indépendant de g_1 , donc nul pour tous $g_1, \ldots g_n$, et il en est de même du premier :

(7) $$\textstyle\sum (\text{pour un } j_i \text{ au moins égal à } 1)\, F_{j_1, \ldots j_n}(g_1, \ldots g_n) = 0$$

pour tous $g_1, \ldots g_n$. On écrit ceci $\sum$ pour un j_i au moins égal à 1 et un j_i au moins égal à 2 plus $\sum$ pour un j_i au moins égal à 1 et tous j_i différents de 2 ; pour $g_2 = e$ le premier terme est nul, etc. De proche en proche on arrive à $\sum$ pour un j_i au moins égal à 1 , un j_i au moins égal à 2 , ..., un j_i au moins égal à n , c'est-à-dire à $F_{1,2,\ldots,n}(g_1, \ldots g_n)$. Finalement on a démontré que

$$\int_{X_1 \times X_2 \times \ldots X_n} (\xi_{x_1, \ldots x_n} | b(g_1) \otimes \ldots \otimes b(g_n)) . dx_1 \ldots dx_n = 0$$

pour tous $g_1,\dots g_n$. Ceci s'écrit aussi

$$\left(\int_{X_1 \times X_2 \times \dots X_n} \xi_{x_1,\dots x_n} \cdot dx_1 \dots dx_n \,\middle|\, b(g_1) \otimes \dots \otimes b(g_n)\right) = 0 \quad ;$$

comme $b(G)$ est total dans K_1 cela implique que le premier terme du produit scalaire est nul ; comme les ensembles $X_1 \times \dots \times X_n$ forment une base de voisinages de $(x_1,\dots x_n)$, il en résulte que $\xi_{x_1,\dots x_n}$ est nul presque partout.

Démonstration du théorème

Soit R un opérateur dans $\widetilde{H}$ permutable à $\widetilde{U}(\widetilde{G})$; d'après le lemme 1, R permute au projecteur sur $\mathrm{EXP}\ 0$, donc $R(\mathrm{EXP}\ 0) = k\ \mathrm{EXP}\ 0$ où $k \in \mathbf{C}$; puis pour $f \in \widetilde{G}$, on aura

$$R \,.\, \widetilde{U}(f) \,.\, \mathrm{EXP}\ 0 = \widetilde{U}(f) \,.\, R \,.\, \mathrm{EXP}\ 0 = k\, \widetilde{U}(f) \,.\, \mathrm{EXP}\ 0 \quad ;$$

d'où enfin $R = k I$ puisque $\mathrm{EXP}\ 0$ est cyclique (lemme 2).

§ 4. Autre réalisation de $\widetilde{U}$ dans le cas où $G = SL(2,\mathbf{R})$

On va indiquer ici une autre réalisation de $\widetilde{U}$ donnée dans [12], et semble-t-il, particulièrement appréciée de Gelfand.

Rappels sur les représentations unitaires irréductibles de $SL(2,\mathbf{R})$

(Pour plus de détails on pourra consulter [6].)

Pour tout $\lambda \in [0,1[$ notons D_λ l'espace des fonctions f sur $\mathbf{R}$, réelles, C^∞ et telles que $t \mapsto |t|^{\lambda-2} f(1/t)$ soit aussi C^∞ ; on définit une représentation T_λ^0 de G dans D_λ par

$$\left(T_\lambda^0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . f\right)(t) = |bt + d|^{\lambda-2} \,.\, f\left(\frac{at + c}{bt + d}\right) \ .$$

A partir des T_λ^0 on construit des représentations orthogonales de la façon suivante :

a) supposons d'abord $\lambda \neq 0$; on définit un produit scalaire sur D_λ invariant par T_λ^0 :

$$(f_1 | f_2) = \int |t_1 - t_2|^{-\lambda} \,.\, f_1(t_1) . f_2(t_2) \,.\, dt_1 \,.\, dt_2 \quad ;$$

par complétion et complexification on obtient des représentations unitaires irréductibles, deux à deux inéquivalentes, qui constituent la série complémentaire de $SL(2,\mathbb{R})$;

b) supposons maintenant $\lambda = 0$; la forme linéaire sur D_0 : $f \mapsto \int f(t)\,dt$ est invariante par T_0^0 , donc aussi son noyau F ; on définit sur F un produit scalaire invariant par T_0^0 :

$$(f_1|f_2) = -\int \log|t_1 - t_2| \cdot f_1(t_1).f_2(t_2) \cdot dt_1 \cdot dt_2 \quad ;$$

en complétant F on obtient une représentation orthogonale irréductible ; sa complexifiée n'est pas irréductible, mais somme de deux représentations irréductibles inéquivalentes T_0^+ et T_0^- qui font partie de la série discrète de $SL(2,\mathbb{R})$. Au total la représentation T_0^0 fournit trois représentations unitaires irréductibles : T_0^+ , T_0^- et la représentation triviale (provenant de D_0/F). Il se trouve que ces trois représentations sont exactement les limites de T_λ dans $\hat{G}$ lorsque λ tend vers 0 .

Quelques notations

Nous pouvons maintenant introduire les objets A et b qui interviennent dans le théorème 1 : A est la complétée (non complexifiée) de la représentation dans F , b est le cocycle défini par $b(g) = A(g)f_0 - f_0$ où $f_0(t) = 1/(\pi(1+t^2))$; on voit assez facilement que A et b vérifient les hypothèses du théorème 1 relativement au sous-groupe $\Gamma = SO(2)$. On notera

- K l'espace de A , complété de F
- H le complexifié de SK
- U la représentation $U_{A,b}$ de G dans H
- ξ_1 le vecteur EXP 0 de H
- ψ la fonction de type positif associée à U et ξ_1 :

$$\psi(g) = (U_{A(g),\,b(g)}\,\mathrm{EXP}\ 0 \mid \mathrm{EXP}\ 0) = \exp[-\|b(g)\|^2/2]$$

- U_1 la sous-représentation dans le sous-espace H_1 engendré par les $U(g)\xi_1$.

Pour tout $\lambda > 0$ on peut faire une construction analogue en remplaçant le cocycle b par $\lambda^{\frac{1}{2}} b$; la fonction de type positif obtenue est évidemment ψ^λ ;

on notera H_λ , U_λ , ξ_λ l'espace hilbertien complexe, la représentation unitaire et le vecteur cyclique associés à ψ^λ par la construction de Gelfand - Segal ; ces notations sont cohérentes avec les précédentes lorsque $\lambda = 1$.

Lemme 3.- Pour tout $\lambda \in]0,1[$, U_λ contient une fois et une seule la représentation T_λ , dans un sous-espace que nous noterons H'_λ ; la représentation restante (dans $H''_\lambda = H_\lambda \ominus H'_\lambda$) se décompose en une intégrale de représentations irréductibles de la série principale. Enfin si on note P_λ le projecteur orthogonal de H_λ sur H'_λ , on a $\|P_\lambda \xi_\lambda\| - 1 = O(\lambda^2)$ lorsque $\lambda \to 0$ (autrement dit H'_λ est relativement grand dans H_λ lorsque λ est petit).

Idée de la démonstration. Elle consiste essentiellement en des calculs sur des fonctions sur G biinvariantes par Γ ; on sait qu'on a une décomposition $G = \Gamma\Gamma'\Gamma$ (plus connue sous le nom de KAK !) où Γ' est le sous-groupe formé des éléments $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$; on peut donc se borner à considérer les valeurs des fonctions en question sur les éléments g_t . On vérifie d'abord que $\psi^\lambda(g_t) = ((\operatorname{ch} 2t + 1)/2)^{-\lambda/2}$; d'autre part les fonctions sphériques des représentations irréductibles de classe 1 sont les suivantes :

$$\varphi_s(g_t) = P_{-s/2}\,(\operatorname{ch} 2t)$$

où les $P_{-s/2}$ sont les fonctions de Legendre, et où s décrit, soit l'ensemble $1 + i\mathbb{R}_+$ pour la série principale, soit l'ensemble $]0,1[$ pour la série complémentaire. Décomposer U_λ revient à décomposer ψ^λ suivant les φ_s à l'aide d'une mesure positive bornée (théorème de Bochner - Godement). Il se trouve que ψ^λ se décompose en une constante $k(\lambda)$ fois φ_λ plus une intégrale portant sur la série principale et que $k(\lambda) = 1 + O(\lambda^2)$ pour $\lambda \to 0$. Il en résulte que U_λ se décompose en T_λ plus une intégrale de représentations de la série principale ; enfin la dernière assertion résulte de ce que $k(\lambda) = \|P_\lambda \xi_\lambda\|^2$.

<u>Autre réalisation de $\widetilde{U}$</u>

La fonction de type positif $\widetilde{\psi}$ sur $\widetilde{G}$ associée à la représentation $\widetilde{U}$ et au vecteur $\widetilde{\xi} = \mathrm{EXP}\ 0 \in \widetilde{H} = \widetilde{SK}_c$ est donnée par

$$\widetilde{\psi}(f) = (\widetilde{U}(f)\ \mathrm{EXP}\ 0 \mid \mathrm{EXP}\ 0) = \exp[-\|\widetilde{b}(f)\|^2/2]$$

$$= \exp[-\int \|b(f(x))\|^2/2 \, . \, d\mu(x)] = \exp[\int \log \psi(f(x)) \, . \, d\mu(x)] \, .$$

Comme (lemme 2) EXP 0 est cyclique pour $\widetilde{U}$, on peut considérer que $\widetilde{H}$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{\xi}$ sont les objets $H_{\widetilde{\psi}}$, $U_{\widetilde{\psi}}$, $\xi_{\widetilde{\psi}}$ associés à $\widetilde{\psi}$ par Gelfand Segal. D'autre part, on a vu au § 3 que G est limite inductive de sous-groupes $\widetilde{G}_\nu$ où ν est une partition finie $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$; soit $\lambda_i = \mu(X_i)$; notons $\widetilde{H}_\nu$ le sous-espace fermé de $\widetilde{H}$ engendré par $\widetilde{U}(\widetilde{G}_\nu).\widetilde{\xi}$ et $\widetilde{U}_\nu$ la sous-représentation correspondante de $\widetilde{G}_\nu$; la réunion des $\widetilde{H}_\nu$ est dense dans $\widetilde{H}$ et on peut écrire symboliquement $\widetilde{U} = \varinjlim \widetilde{U}_\nu$. La fonction de type positif $\widetilde{\psi}_\nu$ sur $\widetilde{G}_\nu$ définie par $\widetilde{U}_\nu$ et $\widetilde{\xi}$ n'est autre que $\widetilde{\psi}|_{\widetilde{G}_\nu}$ c'est-à-dire que l'on a, en identifiant $\widetilde{G}_\nu$ à G^n :

$$\widetilde{\psi}_\nu = \psi^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \psi^{\lambda_n} \quad ;$$

il résulte de là que

$$\widetilde{H}_\nu = H_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes H_{\lambda_n}$$

$$\widetilde{U}_\nu = U_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes U_{\lambda_n}$$

$$\widetilde{\xi} = \xi_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{\lambda_n} \, .$$

Finalement $\widetilde{U}$ apparaît comme la <u>limite inductive des produits tensoriels finis</u> $U_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes U_{\lambda_n}$ lorsque $n \to +\infty$ et que chaque $\lambda_i \to 0$. On va voir - <u>et ce sera l'autre réalisation annoncée de</u> $\widetilde{U}$ - que $\widetilde{U}$ est aussi la <u>limite inductive des produits tensoriels finis</u> $T_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes T_{\lambda_n}$; on doit quand même faire remarquer un inconvénient de ce point de vue : les représentations $T_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes T_{\lambda_n}$ ne forment pas naturellement un système inductif.

En vertu du lemme 3 on peut écrire

$$\tilde{H}_\nu = (H'_{\lambda_1} \oplus H''_{\lambda_1}) \otimes \ldots \otimes (H'_{\lambda_n} \oplus H''_{\lambda_n}) = \tilde{H}'_\nu \oplus \tilde{H}''_\nu$$

où $\tilde{H}'_\nu = H'_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes H'_{\lambda_n}$ et où $\tilde{H}''$ est somme de produits tensoriels de n représentations dont l'une au moins se décompose sur la série principale. Considérons maintenant deux partitions $\nu_1 < \nu_2$:

$$X = X_{1,1} \cup \ldots \cup X_{1,n_1}$$

$$X = X_{2,1} \cup \ldots \cup X_{2,n_2}$$

avec $X_{1,1} = X_{2,1} \cup \ldots \cup X_{2,r}$, etc ; on a $G_{\nu_1} \subset G_{\nu_2}$. Posons $\lambda_{i,j} = \mu(X_{i,j})$. On va voir que l'injection canonique Λ de $\tilde{H}_{\nu_1}$ dans $\tilde{H}_{\nu_2}$ envoie $\tilde{H}'_{\nu_1}$ dans $\tilde{H}'_{\nu_2}$. Comme $\tilde{H}'_{\nu_1}$ est une représentation irréductible de $\tilde{G}_{\nu_1}$, il suffit de voir qu'elle est disjointe de $\tilde{H}''_{\nu_2}$; cette dernière, considérée comme représentation de $\tilde{G}_{\nu_2}$, est somme de représentations de la forme $L_1 \otimes \ldots \otimes L_{n_2}$ où l'une au moins des L_i – par exemple L_1 – se décompose sur la série principale ; LA RESTRICTION de $L_1 \otimes \ldots \otimes L_{n_2}$ à $\tilde{G}_{\nu_1}$ s'écrit $(L_1 \otimes \ldots \otimes L_r)|_G \otimes \ldots$ et il suffit de voir que $(L_1 \otimes \ldots \otimes L_r)|_G$ est disjointe du premier facteur intervenant dans $\tilde{H}'_{\nu_1}$, à savoir $H'_{\lambda_{1,1}}$; or on sait d'après Pukanszky [11] que le produit tensoriel (au sens représentation de $SL(2,\mathbb{R})$) de plusieurs représentations irréductibles dont l'une au moins est dans la série principale, se décompose uniquement sur les séries principale et discrète.

On voit ainsi que les représentations $H'_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes H'_{\lambda_n}$ forment un système inductif ; il reste à voir que la réunion des $\tilde{H}'_\nu$ est partout dense dans $\tilde{H} = \varinjlim \tilde{H}_\nu$. Pour cela, comme cette réunion est stable par $\tilde{U}$, et $\tilde{\xi}$ cyclique pour $\tilde{U}$, il suffit de montrer que $\tilde{\xi}$ appartient à $\overline{\cup \tilde{H}'_\nu}$. Notons P (resp. P_ν) le projecteur orthogonal de $\tilde{H}$ sur $\overline{\cup \tilde{H}'_\nu}$ (resp. de $\tilde{H}_\nu$ sur $\tilde{H}'_\nu$) ; on a $P\tilde{\xi} = \lim P_\nu \tilde{\xi}$; d'autre part

$$P_\nu \tilde{\xi} = P_{\lambda_1} \xi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes P_{\lambda_n} \xi_{\lambda_n}$$

$$\| P_\nu \tilde{\xi} \| = (1 + \varepsilon(\lambda_1)) \dots (1 + \varepsilon(\lambda_n))$$

où ε est une fonction vérifiant (cf. lemme 3) $\varepsilon(\lambda) = O(\lambda^2)$ pour $\lambda \to 0$; on en déduit facilement que $\|P_\nu \tilde{\xi}\| \to 1$, c'est-à-dire $\|P\tilde{\xi}\| = 1$, ou enfin $\tilde{\xi} \in \overline{\cup \tilde{H}'_\nu}$.

Remarques.- On peut déduire de là une autre démonstration de l'irréductibilité de $\tilde{U}$. Par ailleurs, du fait que $\tilde{U} = \varinjlim T_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_n}$ on déduit immédiatement que $T_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_n}|_G$ tend vers $\tilde{U}|_G$ au sens de la topologie de Fell sur l'ensemble des représentations (irréductibles ou non) de G ; puis que $T_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_n}|_G$ tend vers U , car il est facile de voir que U est contenue dans $\tilde{U}|_G$. Prenant en particulier $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$, on obtient $T_{1/n}^{\otimes n}|_G \to U$ - résultat que Gelfand compare à la loi des grands nombres.

§ 5. Commentaires finaux

a) Si G est un groupe de Lie simple connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \neq so(n,1)$ ou $su(n,1)$, $H^1(G,U)$ est nul pour tout $U \in \hat{G}$ ([2], résultat déjà mentionné dans l'introduction). Si par contre $\mathfrak{g} = so(n,1)$ ou $su(n,1)$, G admet suivant les cas une ou deux représentations unitaires irréductibles avec H^1 non nul (pour $G = SO_o(2,1)$ ce sont les représentations T_o^+ et T_o^-) ; elles sont non séparées de la représentation triviale ε_G puisque la série complémentaire converge à la fois vers elles et vers ε_G . Si l'on passe des représentations unitaires aux représentations (réelles) orthogonales, le résultat s'énonce plus simplement : il existe une et une seule représentation orthogonale irréductible avec un H^1 non nul, qui est alors de dimension 1 .

b) Considérons un produit tensoriel continu $\tilde{U}$ construit à partir d'un groupe G , d'une représentation orthogonale A , d'un cocycle b pour A , et de l'espace mesuré $X = [0,1]$, μ = mesure de Lebesgue ; on montre ([2]) que la classe d'équivalence de $\tilde{U}$ ne dépend que de la classe de cohomologie $[b]$ de b et que si $\tilde{U}$

est irréductible, $[b]$ n'est pas nulle. On peut déduire de là l'amélioration suivante du théorème 1 : lorsque $G = SO_0(n,1)$ ou $SU(n,1)$, $\widetilde{U}$ est irréductible si et seulement si A est l'unique représentation orthogonale irréductible de G avec H^1 non nul, et $[b]$ l'un des éléments non nuls tous proportionnels de $H^1(G,A)$; de plus deux éléments $[b]$ et $k[b]$ donnent des représentations $\widetilde{U}$ équivalentes si et seulement si $k = +1$ ou -1 ([13]) ; on obtient donc ainsi une famille à un paramètre de représentations irréductibles $\widetilde{U}$.

Conclusion : en voulant construire une "intégrale multiplicative" pour un groupe de Lie simple connexe G par la méthode des produits tensoriels continus, Verchik, Gelfand et Graiev sont tombés sur les seuls groupes G , les seules représentations A et les seuls cocycles b pour lesquels la construction est possible !

Problème : peut-on construire pour les groupes $SO_0(n,1)$ et $SU(n,1)$ des intégrales multiplicatives par d'autres méthodes ? Existe-t-il des intégrales multiplicatives pour d'autres groupes G , en particulier pour des groupes compacts ?

c) L'importance du groupe H^1 dans tout ce qui précède conduit à l'étudier dans d'autres circonstances. Voici quelques résultats déjà obtenus dans ce sens : si G est un groupe de Lie résolutble connexe, $B^1(G,U)$ est dense dans $Z^1(G,U)$ (pour la topologie de la convergence compacte) pour toute représentation factorielle U sauf pour un nombre fini de telles U qui sont de dimension 1 [2] ; plus particulièrement si G est nilpotent, $H^1(G,U)$ est nul pour toute représentation irréductible non triviale U .

d) Les propriétés mentionnées en a), jointes à d'autres exemples, m'ont amené à conjecturer que si G est un groupe localement compact quelconque, toutes les représentations factorielles de G avec H^1 non nul sont non séparées de la représentation triviale ; on sait actuellement le démontrer pour de nombr uses classes de groupes G (mais on n'a pas de démonstration générale) : les groupes de Lie résolubles connexes (en utilisant le résultat de c)) ; un grand nombre de groupes de Lie ni résolubles ni semi-simples mais à radical abélien ([10]) ; tous les groupes de Lie connexes de type (R) sur leur radical ([10]) ; les groupes localement compacts contenant un sous-groupe compact K tel que l'algèbre $L^1(K\backslash G/K)$ soit commutative ([2]) ; les groupes localement compacts à classes d'éléments conjugués relativement compactes ([9]) ; les groupes localement compacts admettant des sous-groupes distingués nilpotents cocompacts ([10]) ; etc.

e) Comme on l'a dit au § 2, $\widetilde{U}$ est le "produit tensoriel continu" de représentations de G toutes identiques à U ; or dans l'énoncé du théorème 1, l'irréductibilité de $\widetilde{U}$ ne semble aucunement liée à celle de U (alors que si X était fini, ces deux irréductibilités seraient trivialement équivalentes !) ; en fait il n'y a pas de lien entre elles, sauf pour des groupes G particuliers, par exemple de Lie nilpotents, auquel cas les irréductibilités de $\widetilde{U}$ et U sont effectivement équivalentes ([2] ; mais la situation n'est plus la même : A est alors triviale mais son espace est complexe) ; au contraire dans les exemples de Verchik, Gelfand et Graiev, $\widetilde{U}$ est irréductible alors que U ne l'est pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ARAKI, E. J. WOODS - Complete Boolean Algebras of Type I Factors, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., t. 2, 1966, p. 157-242.

[2] P. DELORME - 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations, à paraître.

[3] P. DELORME - Sur la 1-cohomologie des représentations des groupes de Lie semi-simples, C.R.Acad. Sci., t. 280, 1975, p. 1101-1103.

[4] P. DELORME - Sur la 1-cohomologie des représentations des groupes de Lie semi-simples et résolubles, C.R.Acad. Sci., t. 282, 1976, p. 499-502.

[5] I.M. GELFAND, M.I. GRAIEV - Représentations des groupes de quaternions sur les corps localement compacts et fonctionnels, Funkt. Anal. i Priloj., t. 2, 1968, p. 20-35 [en russe].

[6] I.M. GELFAND, M.I. GRAIEV, N.Ia. VILENKIN - Fonctions généralisées, t. 5.

[7] A. GUICHARDET - Symmetric Hilbert Spaces and related Topics, Lecture Notes in Math., vol. 261 (1972), Springer Verlag, Berlin.

[8] A. GUICHARDET - Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations (J. Multivariate Anal., à paraître).

[9] A. GUICHARDET - Sur la cohomologie des groupes topologiques. III, Bull. Sci. Math., t. 98, 1974, p. 201-208.

[10] A. GUICHARDET - Sur la 1-cohomologie de certains groupes localement compacts, C.R.Acad. Sci., t. 282, 1976, p. 571-573.

[11] L. PUKANSZKY - On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc., t. 100, 1961, p. 116-152.

[12] A.M. VERCHIK, I.M. GELFAND, M.I. GRAIEV - Représentations irréductibles du groupe G^X et cohomologie, Funkt. Anal. i Priloj., t.8, 1974, p. 67-69.

[13] A.M. VERCHIK, I.M. GELFAND, M.I. GRAIEV - Représentations du groupe SL(2,R) où R est un anneau de fonctions, Uspekhi Mat. Nauk, t. 28, 1973, p. 83-128.