MICHEL DEMAZURE

Identités de MacDonald

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n^{o} 483, p. 191-201

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__191_0>

IDENTITÉS DE MACDONALD

par Michel DEMAZURE

On désigne par $\eta(X)$ la série formelle

$$\eta(X) = X^{1/24} \prod_{m \geq 1} (1 - X^m) ,$$

de sorte que $\eta(e^{2\pi i z})$ est la fonction de Dedekind.

1. MACDONALD : Identités sur la fonction η (première forme) [5]

Soient G un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe, T un tore maximal de G ; posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Chaque homomorphisme continu de T dans $\mathbf{C}^*$ s'écrit sous la forme
$e^{\lambda} : \exp(x) \longmapsto e^{\lambda}(\exp(x)) = e^{\lambda(x)}$, $x \in \mathrm{Lie}(T)$, où $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est une forme linéaire complexe convenable sur $\mathfrak{h}$; en particulier, les racines de G relativement à T sont les e^{α} , où α parcourt le système de racines R de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$; les homomorphismes continus de T dans $\mathbf{C}^*$ sont les e^{λ} , où λ parcourt le réseau $P \subset \mathfrak{h}^*$ des poids de R .

Choisissons un système de racines positives, et soit ρ la demi-somme des racines ≥ 0 ; pour chaque racine $\alpha \in R$, soit $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}^*$ la racine inverse correspondante ; notons P_{++} l'ensemble des poids dominants, c'est-à-dire des éléments $\lambda \in P$ tels que $\langle \lambda , H_{\alpha} \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$. Pour tout $\lambda \in P_{++}$, notons $(V_{\lambda} , \tau_{\lambda})$ une représentation irréductible de G de plus grand poids e^{λ} , de sorte que (H. Weyl)

$$(1) \qquad \dim V_{\lambda} = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \lambda + \rho , H_{\alpha} \rangle}{\langle \rho , H_{\alpha} \rangle}$$

$$(2) \qquad \chi_{\lambda} = (\mathrm{Tr}\ \tau_{\lambda})|_T = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\ e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w)\ e^{w(\rho)}} ,$$

où W est le groupe de Weyl de R. Pour tout $\lambda \in P$, on notera encore $\dim V_\lambda$ et χ_λ les seconds membres de (1) et (2).

Enfin, soit Φ la forme de Killing $u \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(u))^2$ sur $\mathfrak{h}$ et soit $\| \ \|^2$ la forme inverse sur $\mathfrak{h}^*$. Avec ces notations, on a ([5], 8.9) :

$$(3) \qquad \eta(X)^{\dim G} = \sum_{\lambda \in M^\vee} \dim V_\lambda . X^{\|\lambda + \rho\|^2} ,$$

où $M^\vee$ est le sous-réseau de P engendré par les $\sum_{\alpha > 0} \langle \alpha , H_\beta \rangle \alpha$, $\beta \in R$ [c'est l'image du réseau des coracines $\sum \mathbf{Z}\, H_\alpha \subset \mathfrak{h}$ par l'application $H \mapsto \sum_{\alpha > 0} \langle \alpha , H \rangle \alpha$]. Notons au passage que (3) contient la "formule étrange" de Freudenthal

$$(4) \qquad \|\rho\|^2 = \dim G/24 ,$$

et compte tenu de (4) s'écrit aussi

$$(5) \qquad \prod_{m \geq 1} (1 - X^m)^{\dim G} = \sum_{\lambda \in M^\vee} \dim V_\lambda . X^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2} .$$

Naturellement, les formules (3) sont multiplicatives par rapport à G, et on peut donc supposer G "presque simple" (i.e. R irréductible) ce que nous ferons désormais. Donnons trois exemples :

a) $G = SU(2,\mathbf{C})$; alors P s'identifie à $\mathbf{Z}$, P_{++} à $\mathbf{N}$, avec les racines $\alpha = 2$, $\alpha = -2$; on a $M^\vee = 4\mathbf{Z}$ et pour $n \in P$, $\dim V_n = n + 1$, $\|n + \rho\|^2 = \|n + 1\|^2 = \frac{1}{8}(n + 1)^2$, d'où

$$(6) \qquad \eta(X)^3 = \sum_{n \equiv 1\ (4)} n\, X^{n^2/8}$$

formule due à Jacobi (plus connue sous la forme équivalente

$$(7) \qquad \prod_{m \geq 1} (1 - X^m)^3 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n + 1)\, X^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad).$$

b) $G = SU(5,\mathbf{C})$; alors $\eta(X)^{\dim G} = \eta(X)^{24}$ est la fonction $\Delta(X) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) X^n$, d'où après calcul l'expression suivante de la fonction de Ramanujan, due à DYSON :

$$(8) \qquad \tau(n) = \frac{1}{1!\ 2!\ 3!\ 4!} \sum \prod_{i < j} (u_i - u_j) ,$$

sommation étendue aux familles $(u_1, \ldots, u_5)$ d'entiers tels que $u_i \equiv i\ (5)$,

$\sum u_i = 0 \ , \ \sum u_i^2 = 10n$.

c) $G = E_8$; alors on trouve une expression pour $\eta(X)^{248}$ qu'il n'est pas utile de reproduire ici (voir [5], p. 140).

Signalons avant de passer à la suite, une démonstration "directe" de l'identité (3) due à VAN ASCH [7].

Soit maintenant h le <u>nombre de Coxeter</u> de R et soit B l'ensemble des racines simples. Alors [5], 8.13

$$(9) \qquad \prod_{\beta \in B} \eta(X^{h\|\beta\|^2})^{h+1} = \sum_{\lambda \in M} \dim V_\lambda \, . \, X^{\|\lambda+\rho\|^2} \ ,$$

où M est le sous-réseau de P engendré par les $h\alpha$, $\alpha \in R$.

Si toutes les racines de R ont la même longueur (Kostant dit alors que G est "simply-laced"), on a $\|\alpha\|^2 = \frac{1}{h}$ pour tout $\alpha \in R$, $M = M^\vee$ et $(h+1)\mathrm{rg}\,G = \dim G$, de sorte que (9) coïncide avec (3). Le premier cas où il n'en n'est pas ainsi est $G = \mathrm{Spin}(5)$, pour lequel (3) parle de $\eta(X)^{10}$ et (9) de $(\eta(X)\eta(X^2))^5$.

2. MACDONALD : <u>Identités pour les caractères</u> (<u>première forme</u>) [5]

En fait, (3) et (9) proviennent par spécialisation d'identités pour les caractères que voici.

Soit d'abord $p(X)$ le polynôme caractéristique de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ pour $t \in T$:

$$p(X) = \det(1 - X\,\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(t)) = (1-X)^{\mathrm{rg}(G)} \prod_{\alpha \in R} (1 - X\,e^\alpha) \ ;$$

alors ([5], 8.7)

$$(10) \qquad \prod_{m \geq 1} p(X^m) = \sum_{\lambda \in M^\vee} \chi_\lambda \, . \, X^{\|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2} \ ,$$

identité qui implique (5), donc (3), ("faire $t = 1$ ").

De même en posant

$$q(X) = \prod_{\beta \in B} (1 - X^{h\|\beta\|^2}) \prod_{\alpha \in R} (1 - X^{h\|\alpha\|^2} e^\alpha) \ ,$$

on a ([5], 8.11)

$$(11)\qquad \prod_{m\geq 1} q(X^m) = \sum_{\lambda\in M} \chi_\lambda \, . \, X^{\|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2} \, ,$$

qui implique (9) par spécialisation (compte tenu de la deuxième formule étrange ([5], 8.12)

$$(12)\qquad \|\rho\|^2 = \frac{h(h+1)}{24} \sum_{\beta\in B} \|\beta\|^2) \, .$$

Donnons un exemple de (10). Pour $G = SU(2,\mathbf{C})$, on a

$p(X) = (1 - X)(1 - ZX)(1 - Z^{-1}X)$, avec $Z = e^{\alpha}$, et $\chi_n = \dfrac{Z^{n+1} - Z^{-n}}{Z - 1}$; un petit calcul donne alors

$$(13)\qquad \prod_{m\geq 1} (1-X)^m(1-ZX^m)(1-Z^{-1}X^{m-1}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n Z^{-n} X^{n(n-1)/2} \, ,$$

une identité de Jacobi sur les fonctions-thêta.

Notons enfin la conséquence suivante de (10) (Macdonald, non publié)

$$(14)\qquad \int_G \Big(\prod_{m\geq 1} \det(1 - X^n \operatorname{Ad}(g))\Big)dg = 1 \quad .$$

3. KOSTANT : <u>Deuxième forme des identités</u> [4]

Soit $a^\vee$ (resp. a) le point de T tel que

$$e^{\alpha}(a^\vee) = e^{2\pi i \|\alpha\|^2} \qquad\qquad (\text{resp. } e^{\alpha}(a) = e^{2\pi i/h})$$

pour $\alpha \in B$. Alors, pour tout $\lambda \in M^\vee$, on a ([4], 3.5.2 et 3.6)

<u>soit</u> $\chi_\lambda(a^\vee) = 0$ et alors $\chi_\lambda = 0$ (i.e. $\lambda + \rho$ est singulier)

<u>soit</u> $\chi_\lambda(a^\vee) = \pm 1$ et alors $\lambda + \rho \in w(P_{++} + \rho)$, pour un unique w , et

on a $\det(w) = \chi_\lambda(a^\vee)$.

De même pour M et a [Notons en passant que a est <u>principal</u> au sens de Kostant, c'est-à-dire est un élément régulier g tel que $\operatorname{Ad}(g)$ soit d'ordre minimum (à savoir h)]. De cela, et des propriétés évidentes d'antisymétrie des applications $\lambda \mapsto \dim V_{\lambda-\rho}$ et $\lambda \mapsto \chi_{\lambda-\rho}$, on tire une nouvelle forme des identités précédentes :

$$(15)\qquad \eta(X)^{\dim G} = \sum_{\lambda\in P_{++}} \chi_\lambda(a^\vee) . \dim V_\lambda . X^{\|\lambda+\rho\|^2} \, ,$$

$$(16)\qquad \prod_{\beta\in B} \eta(X^{h\|\beta\|^2})^{h+1} = \sum_{\lambda\in P_{++}} \chi_\lambda(a) . \dim V_\lambda . X^{\|\lambda+\rho\|^2} \, ,$$

$$(17) \qquad \prod_{m\geq 1} p(X^m) = \sum_{\lambda \in P_{++}} \chi_\lambda(a^\vee).\chi_\lambda.X^{\|\lambda+\rho\|^2-\|\rho\|^2} ,$$

$$(18) \qquad \prod_{m\geq 1} q(X^m) = \sum_{\lambda \in P_{++}} \chi_\lambda(a).\chi_\lambda.X^{\|\lambda+\rho\|^2-\|\rho\|^2} .$$

Par exemple, pour $G = SU(2,\mathbf{C})$, (15) donne directement l'identité de Jacobi (7).

4. MACDONALD : Systèmes de racines affines [5]

On ne donnera pas ici la définition précise d'un système de racines affines réduit ([5], n° 2). Disons simplement qu'il s'agit d'un ensemble S de formes linéaires affines sur un espace affine et qu'à chaque élément $\theta \in S$ est associé une réflexion r_θ laissant fixe $\mathrm{Ker}\,\theta$ et telle que $r_\theta(S) = S$; les r_θ engendrent le groupe de Weyl $W(S)$ de S . Donnons deux exemples.

a) Prenons G , T , etc., comme ci-dessus ; considérons la fonction affine constante θ_o de valeur $2\pi i$ sur $\mathfrak{h}$. Alors les $\alpha + n\theta_o$, $\alpha \in R$, $n \in \mathbf{Z}$, forment un système de racines affines réduit S ; ce sont les formes linéaires affines θ sur $\mathfrak{h}$ tels que pour tout $x \in \mathrm{Lie}(T)$, $e^{\theta(x)}$ s'écrive $e^\alpha(\exp x)$, $\alpha \in R$. Le groupe $W(S)$ est le groupe de Weyl affine W_a de G , engendré par W et les translations par les éléments du noyau de l'application exponentielle $\mathrm{Lie}(T) \to T$.

b) De même, les $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|^2} + n\theta'_o$, $\alpha \in R$, $n \in \mathbf{Z}$, forment un système de racines affines réduit S' (θ'_o fonction constante $\neq 0$ arbitraire).

En fait, tout système de racines affines réduit est somme directe de systèmes de la forme S , de systèmes de la forme S' , et de systèmes exceptionnels dits de type BC_ℓ , que l'on obtient à partir des groupes G de type C_ℓ par une variante des constructions précédentes. Dans ce numéro, on se restreint au cas a) pour simplifier l'exposé.

Considérons la plus grande racine $\tilde{\alpha}$ de R , et la racine affine $\beta_o = \theta_o - \tilde{\alpha} \in S$; soit A l' "alcôve" de $\mathfrak{h}$ définie par les conditions $\mathrm{Im}(\beta_i) \geq 0$, $i = 0,\ldots,\ell$ [on note $\beta_1,\ldots,\beta_\ell$ les racines simples]. On dit qu'une forme linéaire affine θ est > 0 si $\mathrm{Im}(\theta|_A) > 0$; toute racine affine est soit > 0 soit < 0 . Pour tout $w \in W(S)$, on note $s(w)$ la somme (finie) des éléments θ de S tels que $\theta > 0$, $w^{-1}(\theta) < 0$. Par ailleurs, considérons le groupe $P \oplus \mathbb{Z}\theta_0$ et le sous-monoïde des éléments négatifs, soit $(P \oplus \mathbb{Z}\theta_0)_-$; on peut définir l'algèbre large $\mathbb{Z}[[(P \oplus Z\theta_0)_-]]$, algèbre de séries formelles en les $\underline{e}^{-u}$, $u \in P \oplus \mathbb{Z}\theta_0$, $u > 0$.

On a dans cette algèbre l'identité formelle([5], 8.1) :

$$(19) \qquad Q.\prod_{\theta \in S, \theta > 0} (1 - \underline{e}^{-\theta}) = \sum_{w \in W(S)} \det(w)\, \underline{e}^{-s(w)} \qquad \text{où } Q = \prod_{m > 0} (1 - \underline{e}^{-m\theta_0})^{\ell} .$$

Cette formule est, au facteur correctif Q près, l'analogue direct de la formule d'H. Weyl

$$(20) \qquad \prod_{\alpha \in R, \alpha > 0} (1 - \underline{e}^{-\alpha}) = \sum_{w \in W} \det(w)\, \underline{e}^{w(\rho)-\rho} ,$$

(noter que $\rho - w(\rho)$ est la somme des $\alpha > 0$ tels que $w^{-1}(\alpha) < 0$.)

Montrons rapidement comme (19) implique (10). Le premier membre de (19) s'écrit

$$\prod_{m \geq 1} (1-\underline{e}^{-m\theta_0})^{\ell} . \prod_{\alpha \in R} \prod_{m \geq 1} (1-\underline{e}^{-\alpha - m\theta_0}) . \prod_{\alpha \in R, \alpha > 0} (1-\underline{e}^{-\alpha}) ,$$

d'où utilisant (20) et posant $X = \underline{e}^{-\theta_0}$

$$\prod_{m \geq 1} p(X^m) . \sum_{w \in W} \det(w)\, \underline{e}^{w(\rho)-\rho} \qquad ;$$

cela ressemble beaucoup au premier membre de (10) ; on calcule de même le second membre de (19) en décomposant $W(S)$ en produit semi-direct de W et d'un groupe de translations et en utilisant la formule des caractères (2) (voir [5] pour les détails).

Pour un système de racines affines du type b), le facteur correctif Q est légèrement différent et on obtient par traduction la formule (11).

La démonstration de l'identité (19) dans [5] est assez compliquée, bien qu'étant, comme dit Macdonald, "a purely formal exercise". L'analogie entre (19) et (20) n'explique pas la présence du facteur Q . C'est MOODY [6] qui a remarqué que l'identité (19) s'interprêtait raisonnablement par la présence de racines "complémentaires" dans les algèbres de Lie euclidiennes, mais sans en donner une démonstration directe. C'est à KAČ que l'on doit une démonstration de ce type.

5. MOODY - KAČ : Algèbres de Lie définies par une matrice de Cartan

Cette construction est essentiellement due à MOODY, puis généralisée par KAČ et GARLAND - LEPOWSKY, voir [2].

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i , j \leq \ell}$ une matrice carrée satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $a_{ij} \in \mathbf{Z}$, $a_{ii} = 2$,

2) $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$,

3) il existe $q_1,\ldots,q_\ell \in \mathbf{N}^*$ tels que $q_i a_{ij} = q_j a_{ji}$.

Exemples.- a) Les matrices de Cartan des algèbres de Lie semi-simples satisfont aux conditions précédentes.

b) Les matrices de Cartan associées aux systèmes de racines affines satisfont aussi à ces conditions.

Notons $\mathfrak{g}$ la $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie engendrée par des éléments x_i , y_i , h_i , $i = 1,\ldots,\ell$, soumis aux relations

$$[h_i , h_j] = 0 \quad , \quad i \neq j \quad ;$$

$$[x_i , y_j] = \delta_{ij}\, h_i \quad ;$$

$$[h_i , x_j] = a_{ij}\, x_i \quad , \qquad [h_i , y_j] = - a_{ij}\, y_j \quad ;$$

$$(\mathrm{ad}\ x_i)^{-a_{ij}+1}\, x_j = 0 \quad , \quad (\mathrm{ad}\ y_i)^{-a_{ij}+1}\, y_j = 0 \; , \quad i \neq j \; .$$

Lorsque (a_{ij}) est de la forme a), il est maintenant classique (HARISH-CHANDRA, CHEVALLEY, SERRE) que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée.

On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre (commutative) engendrée par les h_i ; l'algèbre $\mathfrak{g}$ est graduée de type $\mathbf{Z}^\ell$ (avec $\deg(x_i) = -\deg(y_i) =$ i-ème élément de base, $\deg(h_i) = 0$).

On note $\bar{\mathfrak{g}}$ le produit semi-direct $\mathfrak{g} \times \mathbf{Q}^\ell$, où, pour $(t_1,\ldots,t_\ell) \in \mathbf{Q}^\ell$, $\mathrm{ad}(t_1,\ldots,t_\ell)$ vaut $\sum t_i\, n_i$ en degré $(n_1,\ldots,n_\ell)$, et $\bar{\mathfrak{h}}$ le produit (direct)

$\mathfrak{h} \times \mathbb{Q}^{\ell} \subset \bar{\mathfrak{g}}$. On définit comme d'habitude les racines de $\bar{\mathfrak{g}}$ relativement à $\bar{\mathfrak{h}}$ et les sous-espaces propres $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$. On a ℓ racines simples $\beta_1,\dots,\beta_\ell$, [avec $\bar{\mathfrak{g}}^{\beta_i} = \mathbb{Q}x_i$, $\bar{\mathfrak{g}}^{-\beta_i} = \mathbb{Q}y_i$], qui engendrent un sous-espace de dimension ℓ de $\bar{\mathfrak{h}}^*$. Le groupe de Weyl W est le groupe d'automorphismes de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ engendré par les réflexions fondamentales données par

$$s_i(\varphi) = \varphi - \varphi(h_i)\beta_i \quad ;$$

on a

$$s_i(\beta_j) = \beta_j - a_{ij}\beta_j \quad .$$

L'opération de W sur $\bar{\mathfrak{h}}^*$ laisse stable l'ensemble des racines ; une racine de la forme $w(\beta_i)$, $w \in W$, est dite <u>racine principale</u> ; il y a éventuellement d'autres racines, dites <u>complémentaires</u>. Si α est une racine principale, $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$ est de dimension 1 ; pour une racine complémentaire α , $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$ peut être de dimension > 1 .

On définit les <u>poids dominants</u> comme les éléments λ de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ tels que $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$ pour $i = 1,\dots,\ell$; on peut alors généraliser la théorie classique. Disons qu'un $\bar{\mathfrak{g}}$-module E est <u>standard</u> si

1) E possède un plus grand poids λ , et E^{λ} est de dimension 1 .
2) E est engendré par E^{λ} .
3) Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^n E^{\lambda} = 0$ pour tout i .

Un tel module est <u>irréductible</u>, son plus grand poids est dominant ; inversement, pour tout poids dominant, il existe un $\bar{\mathfrak{g}}$-module standard dont c'est le plus grand poids (ces résultats de KAČ ne s'obtiennent que tout à la fin de la théorie comme conséquence de la formule des caractères, voir [2]).

6. KAČ : <u>La formule des caractères</u> [3]

Nous donnons seulement les énoncés, renvoyant à [2] pour les démonstrations.

Soit d'abord ρ un élément de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ tel que $\rho(h_i) = 1$ pour $i = 1,\dots,\ell$. Alors :

a) pour tout $w \in W$, toute racine $\alpha > 0$ telle que $w^{-1}(\alpha)$ est < 0 , est principale, et la somme de ces racines est $\rho - w(\rho)$.

b) On a l'identité formelle

$$(21)\qquad \prod_{\alpha>0} (1 - \underline{e}^{-\alpha})^{\dim \bar{\mathfrak{g}}^{\alpha}} = \sum_{w \in W} \det(w)\, \underline{e}^{w(\rho)-\rho} .$$

c) Soit E un $\bar{\mathfrak{g}}$-module standard de plus grand poids λ ; alors son caractère $ch(E)$ est défini et on a

$$(22)\qquad ch(E) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, \underline{e}^{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w)\, \underline{e}^{w(\rho)}} .$$

Montrons comment (21) implique (19). Prenons pour matrice (a_{ij}) la matrice de Cartan du système de racines affines considéré. Alors d'après a) le second membre de (21) est le second membre de (19). Le premier membre se décompose en

$$\prod_{\substack{\alpha \text{ complémentaire} \\ \alpha > 0}} (1 - \underline{e}^{-\alpha})^{\dim \bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}} \cdot \prod_{\substack{\alpha \text{ principale} \\ \alpha > 0}} (1 - e^{-\alpha}) ,$$

et il n'y a plus qu'à identifier le facteur correctif

$$Q = \prod_{\substack{\alpha \text{ complémentaire} \\ \alpha > 0}} (1 - \underline{e}^{-\alpha})^{\dim \bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}} ,$$

comme dans [6].

Quant à la formule (22) et à ses conséquences notamment la formule des partitions à la KOSTANT, cela nous entraînerait trop loin de notre sujet, renvoyons le lecteur à [2].

7. EULER : La somme de l'ensemble vide

La théorie de KAČ explique bien la nature des formules du genre (19), et éventuellement de leurs traductions (10) et (11). L'intervention de la fonction η de Dedekind reste cependant totalement mystérieuse. Considérons par exemple l'identité classique d'Euler

$$(23)\qquad \prod_{m \geq 1} (1 - X^m) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n X^{(3n^2+n)/2}$$

(on peut l'obtenir en prenant $Z = X^{1/3}$ dans (13)), que l'on peut écrire aussi

(24) $$\eta(X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n X^{\frac{3}{2}\left(n + \frac{1}{6}\right)^2} .$$

Cette formule entre parfaitement dans le cadre (15) : prenons pour groupe $G = \mathbb{U}(1)$; ses représentations irréductibles V_λ sont toutes de dimension 1 , paramétrées par $\lambda \in \mathbb{Z}$, l'élément $a = -1 \in G$ est ce qu'on peut appeler principal : il est non nul et d'ordre minimum et (24) se traduit en

(25) $$\eta(X) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \chi_\lambda(a).\dim V_\lambda . X^{\frac{3}{2}\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)^2} ,$$

en conformité totale avec (15). On en tire cependant deux constatations :

(26) la forme canonique sur $\mathbb{Z} = \hat{G}$ est $n \mapsto \frac{3}{2} n^2$

(27) <u>la demi-somme de l'ensemble vide de racines est</u> $1/6$.

Si (26) est tolérable, (27) semble avoir des conséquences inattendues (en particulier pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles maternelles).

-=-=-=-

<u>Ajouté sur épreuves</u> : je viens de recevoir un "preprint" de LOOIJENGA intitulé : "root systems and elliptic curves", où il donne une démonstration de (19), donc de (10), dans un esprit voisin de la démonstration de (3) donnée par VAN ASCH (cf. [7]).

BIBLIOGRAPHIE

Aux articles cités dans le texte, on a ajouté [1] et [8] dont la lecture s'impose. La réunion de [2], [4] et [5] couvre l'ensemble de la question.

[1] F. J. DYSON - Missed opportunities, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), 635-652.

[2] H. GARLAND, J. LEPOWSKY - Lie algebra homology and the Macdonald-Kač formulas, Preprint.

[3] V. G. KAČ - Infinite dimensional Lie algebras and Dedekind's η function (Traduction anglaise), Functional Analysis and its Applications, 8 (1974), 68-70.

[4] B. KOSTANT - On Macdonald's η-function formula, the laplacian, and generalized exponents, Preprint.

[5] I. G. MACDONALD - Affine root systems and Dedekind's η function, Inventiones Math., 15 (1972), 91-143.

[6] R. V. MOODY - Macdonald identities and euclidean Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 48 (1975), 43-52.

[7] B. VAN ASCH - Des identités pour certaines puissances de η , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (5 déc. 1973), p. 1087-1090.

[8] D. N. VERMA - Revue de [5], Math. Reviews, Vol. 50, n° 5, Revue 9996, nov. 1975.