JACQUES TITS

Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 482, p. 174-190

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__174_0>

Séminaire BOURBAKI
28e année, 1975/76, n° 482

Février 1976

TRAVAUX DE MARGULIS

SUR LES SOUS-GROUPES DISCRETS DE GROUPES DE LIE

par Jacques TITS

Tous les résultats exposés sont - sauf erreurs introduites par le conférencier - dus à G.A. Margulis (cf. notamment [11] pour les théorèmes 1 et 2 et leurs conséquences). Les démonstrations sont encore inédites et la nature de l'information dont on dispose ne permet pas toujours de s'en faire une idée précise. Cette réserve vaut d'ailleurs surtout pour ce qui concerne les sous-groupes de covolume fini non cocompacts et, à la substitution de "covolume fini" à "cocompact" près, le conférencier s'est efforcé, quitte au besoin à restreindre un peu la généralité de certaines assertions, de ne donner que des énoncés dont il croit connaître la démonstration. D'autre part, il faut rappeler ici que pour les sous-groupes non cocompacts de groupes de Lie réels, Margulis avait déjà donné précédemment une autre démonstration, publiée celle-là [10], du théorème d'arithméticité (théorème 1 de l'exposé, avec $K_i = \mathbf{R}$ pour tout i).

1. Notations

1.1. Dans tout l'exposé, on désignera par I un ensemble fini d'indices, K_i $(i \in I)$ un corps localement compact non discret, $\underline{G}_i$ un groupe algébrique presque simple simplement connexe (hypothèse de commodité) défini sur K_i, G_i le groupe localement compact $\underline{G}_i(K_i)$, G le produit $\prod_I G_i$, pr_i la i-ième projection et Γ un sous-groupe discret de G de covolume fini (c'est-à-dire tel que le volume total de G/Γ pour toute mesure invariante par G est fini), tel que la projection de Γ dans le plus grand facteur direct compact G_c de G soit dense dans un sous-groupe ouvert de G_c. [N.B. On ne perdrait pas grand chose à supposer, comme on le fait généralement, que $G_c = \{1\}$: seul le théorème 1 s'en trouverait légèrement affaibli.] Pour

---

Texte remanié en Avril 1976

$J \subset I$, on pose $G_J = \prod_J G_i$ et $pr_J = \prod_J pr_i$.

Le groupe Γ est dit <u>irréductible</u> s'il n'est pas possible de décomposer I en deux parties disjointes non vides I_1 et I_2 telles que, pour $j = 1, 2$, le groupe $\Gamma_j = \Gamma \cap G_{I_j}$ soit de covolume fini dans G_{I_j} (c'est-à-dire tel que $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ soit d'indice fini dans Γ) et que la projection de Γ_j dans $G_{I_j} \cap G_c$ soit dense dans un ouvert. Les questions qu'on va étudier se décomposent naturellement selon les "composantes irréductibles" de Γ , de sorte que ce n'est pas une restriction essentielle de supposer Γ irréductible. En fait, nous supposerons dorénavant que Γ satisfait à la condition suivante qui implique évidemment l'irréductibilité, et qui lui est équivalente si car $K_i = 0$ pour tout i , comme il résulte facilement du théorème de densité de A. Borel [1] et S.P. Wang [23] :

(IR) <u>pour</u> $J \subsetneq I$, <u>le groupe</u> $\Gamma \cap G_J$ <u>est fini</u>

(donc central, en vertu du même théorème de densité).

1.2. On sait que tout groupe algébrique presque simple et simplement connexe $\underline{G}$ sur un corps k est obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe absolument presque simple $\underline{G}'$ sur une extension finie séparable k' de k , et que $\underline{G}(k)$ s'identifie à $\underline{G}'(k')$. On pourra donc, sans inconvénient, supposer, lorsque ce sera commode, que les $\underline{G}_i$ sont absolument presque simples. Inversement, si car $K_i = 0$ pour tout i et si K_i^o désigne l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans K_i , on a $G_i = (R_{K_i/K_i^o}\, \underline{G}_i)(K_i^o)$, de sorte qu'il sera aussi loisible, dans ce cas, de supposer $K_i = \mathbb{Q}_{p_i}$ où p_i est un nombre premier ordinaire ou ∞ (on pose $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$).

1.3. Rappelons que deux sous-groupes d'un groupe sont dits <u>commensurables</u> si leur intersection est d'indice fini dans chacun d'eux.

2. Arithméticité

2.1. Les groupes S-arithmétiques, dont on va rappeler la définition, fournissent des exemples de groupes Γ du type considéré en 1.1.

Soient k une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_q[t]$, S un ensemble non vide de places de k , S_∞ l'ensemble des places archimédiennes ou l'ensemble vide selon que car $k =$ ou $\neq 0$, $\sigma(S)$ l'anneau des éléments de k qui sont entiers aux places n'appartenant pas à $S \cup S_\infty$ (c'est-à-dire l'intersection des anneaux de valuation de ces places) et $\underline{G}$ un groupe algébrique absolument presque simple défini sur k et anisotrope en toutes les places archimédiennes n'appartenant pas à S . Un sous-groupe X de $\underline{G}(k)$ est dit S-<u>arithmétique</u> (ou, plus communément, $S \cup S_\infty$-arithmétique) s'il est commensurable à $\underline{G}(\sigma(S))$; cette dernière notation est relative au choix d'une "$\sigma(S)$-structure" sur $\underline{G}$ (c'est-à-dire d'un $\sigma(S)$-schéma en groupes affine, plat et de type fini ayant $\underline{G}$ pour fibre générique) mais le groupe $\underline{G}(\sigma(S))$ ne dépend pas, à commensurabilité près, de cette structure.

Supposons S fini et $\underline{G}(k_v)$ compact pour $v \in S_\infty - S$ (où k_v est le complété de k en v). L'image d'un groupe S-arithmétique dans $\prod_{v \in S} \underline{G}(k_v)$ par l'application diagonale est discrète et, d'après [2] et [9], de covolume fini. Nous dirons que Γ est S-<u>arithmétique</u> s'il existe k , $\underline{G}$, S comme ci-dessus, une bijection $\iota : S \to I$, des isomorphismes $k_v \to K_{\iota(v)}$ et, après identification des K_i aux k_v par ces isomorphismes, des K_i-isomorphismes $\varphi_i : \underline{G} \to \underline{G}_i$ tels que Γ soit commensurable à l'image par $\prod_I \varphi_i$ d'un sous-groupe S-arithmétique de $\underline{G}(k)$. Lorsque $S \subset S_\infty$, G est un groupe de Lie ordinaire et un sous-groupe S-arithmétique est simplement dit <u>arithmétique</u>. Plus généralement, soit $\hat{G}$ un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini ; alors, $\hat{G}$ est un revêtement fini du groupe adjoint $\mathrm{Ad}\, G$ d'un groupe G du type considéré plus haut, et on appelle alors <u>sous-groupe arithmétique</u> de $\hat{G}$ tout sous-groupe dont l'image dans $\mathrm{Ad}\, G$ est aussi l'image d'un sous-groupe arithmétique de G (les $\underline{G}_i$ étant supposés absolument presque simples ; cf. 1.2). Cette définition est légitimée par la "théorie de la réduction" ([2], [9]).

2.2. Si M est une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 , son groupe fondamental se plonge dans le groupe des automorphismes du revêtement universel de M , c'est-à-dire dans $PSL_2(\mathbb{R})$, et il est facile de voir que le sous-groupe discret cocompact de $PSL_2(\mathbb{R})$ ainsi obtenu n'est "presque jamais" arithmétique. Il est beaucoup plus difficile d'exhiber des sous-groupes de covolume fini non arithmétiques dans d'autres groupes de Lie simples. Des exemples de tels sous-groupes ont été construits par V. S. Makarov et È. B. Vinberg [22] dans les groupes de déplacements des espaces de Lobatchevski à 3 et 4 dimensions. Le fait que tous les groupes de Lie intervenant dans ces exemples sont de rang réel 1 corroborait la conjecture de Selberg-Pyateckiĭ-Šapiro (cf. notamment [15], [16], [19], [20]) selon laquelle, dans un groupe de Lie semi-simple de rang réel ≥ 2 , de centre fini et sans quotient compact non trivial, tout sous-groupe discret irréductible (en un sens évident, vu 1.1) est arithmétique. Cette assertion est un cas particulier du théorème 1 ci-dessous, conjecturé aussi - du moins pour l'essentiel - par Pyateckiĭ-Šapiro.

2.3. Dans toute la suite de l'exposé, on supposera satisfaite la condition suivante :

(RG) $\mathrm{pr}_i \Gamma$ est dense dans G_i pour tout i tel que $\mathrm{rg}_{K_i} \underline{G}_i = 1$.

Si $\mathrm{car}\, K_i = 0$ pour tout i , cela signifie simplement, vu (IR) et la simple connexité des $\underline{G}_i$, que $\sum_I \mathrm{rg}_{K_i} G_i \geq 2$.

THÉORÈME 1.- Supposons $\underline{G}_i$ absolument presque simple (cf. 1.2) et $\mathrm{car}\, K_i = 0$ pour tout i . Alors, Γ est S-arithmétique.

Un cas particulier de ce résultat (cas où G est un groupe de Lie ordinaire et Γ est non cocompact) avait été obtenu précédemment par Margulis [10] (cf. aussi M. S. Raghunathan [17]) par des méthodes très différentes de celles qu'il utilise pour démontrer le théorème 1 (voir § 6).

3. "Superrigidité". Homomorphismes

3.1. Le théorème 1 se déduit facilement du suivant (voir § 5) que l'on comparera aux théorèmes de "rigidité" d'A. Weil [24] et de G.D. Mostow [13].

THÉORÈME 2.- Supposons que, pour tout i, $K_i = \mathbb{Q}_{p_i}$, où p_i est un nombre premier ou ∞. Soient L un corps localement compact non discret, $\underline{H}$ un L-groupe algébrique simple sur L et $\alpha : \Gamma \to \underline{H}(L)$ un homomorphisme à image dense pour la topologie de Zariski et non relativement compacte pour la topologie ordinaire. Alors, il existe $i \in I$, un monomorphisme continu $K_i \to L$ et, moyennant identification de K_i à son image dans L, un L-morphisme de groupes algébriques $\varphi : \underline{G}_i \to \underline{H}$ tel que $\alpha = \varphi \circ pr_i$.

3.2. De ce théorème, on déduit non seulement la S-arithméticité de Γ mais encore des renseignements sur les homomorphismes de Γ dans des groupes algébriques simples sur des corps quelconques :

COROLLAIRE 1.- Il existe un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique presque simple simplement connexe $\underline{G}$ et un homomorphisme $\rho : \Gamma \to \underline{G}(\mathbb{Q})$ tels que si ℓ désigne un corps, $\underline{H}$ un groupe simple sur ℓ et $\alpha : \Gamma \to \underline{H}(\ell)$ un homomorphisme à image dense pour la topologie de Zariski, alors car $\ell = 0$ et il existe un ℓ-épimorphisme unique $\varphi : \underline{G} \to \underline{H}$ pour lequel $\alpha = \varphi \circ \rho$. La paire $(\underline{G}, \rho)$ est unique à isomorphisme unique près.

En fait, cette paire s'obtient comme ceci. Soit $i \in I$ choisi arbitrairement. Posons $\underline{G}_i = R_{K'/K_i} \underline{G}'$ avec $\underline{G}'$ absolument presque simple (cf. 1.2), de sorte que $\underline{G}'(K') = \underline{G}_i(K_i)$. Soit k' le sous-corps de K' engendré par les traces des $Ad_{\underline{G}'}\, pr_i\, \gamma$, pour $\gamma \in \Gamma$. Alors, il est facile de voir que $\underline{G}'$ "peut être défini sur k'" de telle façon que $pr_i\, \Gamma \subset \underline{G}'(k')$, et, utilisant le théorème 2, que k' est un corps de nombres. Cela étant, on peut prendre $\underline{G} = R_{k'/\mathbb{Q}} \underline{G}'$ et $\rho = pr_i$ (moyennant les identifications évidentes).

3.3. COROLLAIRE 2.- Soient k une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$, $\underline{G}$ un k-groupe semi-simple, S un ensemble (non nécessairement fini) de places de k contenant les places archimédiennes et tel que $\sum_{v \in S} \mathrm{rg}_{k_v} \underline{G} \geq 2$, Δ un sous-groupe de $\underline{G}(k)$ commensurable à $\underline{G}(\sigma(S))$ (cf. 2.1), ℓ un corps de caractéristique nulle et $\underline{H}$ un groupe absolument simple défini sur ℓ . Alors, tout homomorphisme $\Delta \rightarrow \underline{H}(\ell)$ à image dense pour la topologie de Zariski se prolonge de manière unique en un ℓ-morphisme $\underline{G} \rightarrow \underline{H}$, après identification, unique elle aussi, de k avec un sous-corps de ℓ .

Notons que les hypothèses de cet énoncé sont satisfaites lorsque S est l'ensemble de toutes les places de k , auquel cas $\sigma(S) = k$.

Il semble que Margulis puisse en fait démontrer des résultats nettement plus forts et notamment :

dans le corollaire 1, admettre n'importe quel groupe $\underline{H}$ de dimension strictement positive, à condition, bien entendu, d'affirmer seulement que α et $\varphi \circ \rho$ coïncident sur un sous-groupe d'indice fini de Γ ;

dans le corollaire 2, se débarrasser de l'hypothèse car $\ell = 0$.

4. Sous-groupes distingués

4.1. THÉORÈME 3.- Supposons remplie l'une des conditions suivantes :

(i) car $K_i = 0$ pour tout i ;

(ii) si $I' = \{i \mid \mathrm{rg}_{K_i} G_i = 1\}$, le groupe $\mathrm{pr}_{I'} \Gamma$ est dense dans $G_{I'}$;

(iii) Γ est cocompact et I peut se décomposer en deux parties disjointes I_1 et I_2 telles que $\mathrm{pr}_{I_j} \Gamma$ soit dense dans G_{I_j} pour $j = 1 , 2$.

Alors tout sous-groupe distingué non central de Γ est d'indice fini dans Γ .

On note que pour Γ cocompact, (i) entraîne (ii) ou (iii).

4.2. Rappelons qu'un groupe localement compact X est dit moyennable s'il existe une moyenne (i.e. une fonctionnelle linéaire m telle que $m(1) = 1$ et $m(f) \geq 0$ lorsque $f \geq 0$) invariante à gauche dans l'espace des fonctions $X \to \mathbf{C}$ continues et bornées (cf. par ex. [6], [8]). La propriété d'être moyennable est très restrictive ; ainsi, on peut montrer qu'un groupe de matrices de type fini, à coefficients dans un corps quelconque, muni de la topologie discrète, n'est moyennable que s'il possède un sous-groupe résoluble d'indice fini.

Une étape essentielle de la démonstration du théorème 3 consiste à prouver le résultat suivant, indépendant des conditions (i) à (iii) :

PROPOSITION 1.- Le quotient de Γ par tout sous-groupe distingué non central est moyennable.

-:-:-:-

Il est exclu de donner ici fût-ce un aperçu des démonstrations de Margulis qui sont longues, difficiles et extraordinaires d'ingéniosité. Les quelques indications heuristiques qui suivent ont pour seul but de donner une idée, nécessairement très superficielle, du genre de méthodes et d'outils utilisés.

5. Esquisse de démonstration du théorème 1 à partir du théorème 2

Choisissons un élément i de I. On a déjà utilisé plus haut (cf. 3.2) le fait que $\underline{G}_i$ "peut être défini" sur le sous-corps k de K_i engendré par les traces des $\mathrm{Ad}\, \mathrm{pr}_i\gamma$ pour $\gamma \in \Gamma$, de telle façon que, désignant par $\underline{G}$ le k-groupe ainsi obtenu à partir de $\underline{G}_i$ par descente du corps de base, on ait $\mathrm{pr}_i\, \Gamma \subset \underline{G}(k)$. Tout plongement σ de k dans $\mathbf{C}$ fournit, par composition avec pr_i, un homomorphisme de Γ dans un groupe algébrique complexe ${}^{\sigma}\underline{G}(\mathbf{C})$, et il est facile de voir que si l'image de cet homomorphisme est relativement compacte, on a $\sigma(k) \subset \mathbf{R}$. Il résulte alors de la "superrigidité" de Γ (théorème 2) que si $\sigma(k) \not\subset \mathbf{R}$, l'homomorphisme σ ne peut varier continûment, ce qui implique que k est une extension algébrique de $\mathbf{Q}$. Cette extension est finie car on peut montrer que Γ est de type fini (voir notamment [4] et [18], 13.15, pour le cas où G est un groupe de Lie ordinaire, le cas général s'y ramenant facilement). Soit S l'ensemble des places v de k telles qu'il existe $j \in I$, un isomorphisme $K_j \to k_v$ et, moyennant identification de ces deux corps, un K_j-isomorphisme $\varphi : \underline{G} \to \underline{G}_j$ satisfaisant à la relation $\varphi \circ pr_i = pr_j$. Si v' est une place de k n'appartenant pas à S, il résulte à nouveau de la superrigidité que $pr_i\,\Gamma$ est relativement compact dans $\underline{G}(k_{v'})$, et par conséquent, compte tenu de la génération finie de Γ, que $pr_i\,\Gamma$ est commensurable à $\underline{G}(\sigma(S))$. La suite est facile.

6. Quelques indications sur la démonstration du théorème 2

6.1. On se bornera ici à envisager le cas où $I = \{1\}$ et Γ est cocompact. Nous supposerons aussi que $\mathbb{Q}$ est dense dans L, ce qui ne restreint pas la généralité. Posons $\underline{G}_1 = \underline{G}$ et $K_1 = K$.

Composant l'homomorphisme α avec une représentation linéaire rationnelle absolument irréductible non triviale de $\underline{H}$, on obtient une représentation linéaire absolument irréductible $\psi : \Gamma \to GL(V)$ où V est un espace vectoriel sur L.

Soient s un élément non central de $G = \underline{G}(K)$ appartenant à un tore déployé, et $\underline{P}$ le K-sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ "contracté" par s, c'est-à-dire dont les points rationnels sont les éléments g de G tels que $\{s^n g s^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit relativement compact.

Supposons un instant le théorème démontré. Alors, $K \subset L$ et ψ se prolonge en une représentation linéaire rationnelle $\tilde{\psi} : \underline{G} \to \underline{GL}(V)$, définie sur L. Pour $g \in G$, soit $Y_s(g)$ le sous-espace de V "strictement contracté" par gsg^{-1}, qu'il sera commode, pour la suite, de définir à l'aide d'une norme $\| \ \|$ choisie dans V, par la relation

$$Y_s(g) = \{v \in V \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\|\tilde{\psi}(gs^n g^{-1})(v)\| < 0\} .$$

Il est immédiat que $Y_s(gp) = Y_s(g)$ pour tout $p \in \underline{P}(K)$, donc Y_s est en fait une application de $(\underline{G}/\underline{P})(K)$ dans une grassmannienne de V , application compatible avec les opérations de G sur $(\underline{G}/\underline{P})(K)$ et sur la grassmannienne en question (par l'intermédiaire de $\tilde{\psi}$). Il est facile de voir que pour établir le théorème, il suffit de montrer que $K \subset L$ et qu'il existe une application rationnelle définie sur L de $\underline{G}/\underline{P}$ dans une grassmannienne de V compatible avec les opérations de Γ sur ces deux variétés (Γ opérant sur V par ψ).

6.2. L'idée essentielle de la démonstration réside alors dans l'observation que $Y_s(g)$ peut être défini sans référence à $\tilde{\psi}$: on a, en effet, pour toute suite (γ_n) d'éléments de Γ telle que l'ensemble $\{gs^n g^{-1} . \gamma_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit relativement compact (une telle suite existe parce qu'on a supposé Γ cocompact),

$$Y_s(g) = \{v \in V \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\psi(\gamma_n)(v)\| < 0\} .$$

Cette relation peut s'écrire de façon un peu plus intrinsèque en considérant l'espace $E = (G \times V)/\Gamma$, où Γ opère sur $G \times V$ par

$\gamma : (g,v) \longmapsto (g\gamma^{-1} , \psi(\gamma)(v))$. C'est un fibré vectoriel de base G/Γ sur lequel G opère de façon évidente. Soit $\pi : E \to G/\Gamma$ la projection canonique, identifions V à $\pi^{-1}(\{\Gamma\})$ et munissons les fibres $\pi^{-1}(x)$ de normes (de type standard) variant continûment avec x . Alors

$$(1) \qquad Y_s(g) = \{v \in V \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|s^n g^{-1} v\| < 0\} .$$

Sans plus supposer <u>a priori</u> l'existence de $\tilde{\psi}$, définissons le sous-espace $Y_s(g)$ de V par (1) (en interprétant la relation " lim ... < 0 " comme " la limite existe et est strictement négative "). Ainsi, Y_s est une application de G dans la réunion Λ des grassmanniennes de V . Il est immédiat que cette application se factorise à travers $(\underline{G}/\underline{P})(K)$ et est compatible avec les opérations de Γ sur G et V . Pour prouver le théorème, on montre successivement que :

(i) Y_s est une fonction mesurable ; de plus, il existe un entier r tel que $\dim Y_s(g) = r$ pour presque tout g ;

(ii) on peut choisir s de telle façon que $0 < r < \dim V$;

(iii) toute application mesurable $Y : G \to \Lambda$ se factorisant à travers $(\underline{G}/\underline{P})(K)$ et compatible avec les opérations de Γ sur G et Λ est presque partout constante sauf peut-être si $K \subset L$, auquel cas Y coïncide presque partout avec une application rationnelle.

6.3. L'assertion (i) est conséquence immédiate du "théorème ergodique multiplicatif" de V. I. Oseledec [14], compte tenu du fait que s opère ergodiquement sur G/Γ (la démonstration de [12], Lemma 4, s'étend immédiatement au cas considéré ici).

6.4. Pour $x \in G/\Gamma$ et $g \in G$, soit $g_x : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(gx)$ la restriction de g à la fibre $\pi^{-1}(x)$ de E . Posons

$$\alpha(g) = \int_{G/\Gamma} \log \|g_x\| \, dx$$

et munissons G d'une "norme" sous-multiplicative $N : G \to \mathbf{R}_+^*$ telle que l'image réciproque par N d'un compact de $\mathbf{R}_+^*$ soit compacte et que la restriction de N à un tore déployé maximal de G soit multiplicative. Toujours à l'aide du théorème ergodique multiplicatif, on ramène assez aisément (ii) à l'inégalité

$$\limsup_{N(g) \to \infty} \frac{\alpha(g)}{\log N(g)} > 0 \ . \tag{2}$$

Pour établir celle-ci, on majore $e^{-\alpha(g)}$ par une expression de la forme $C.\beta(g)^d$, où C , d sont des constantes réelles strictement positives et où β est un "coefficient diagonal" réel et strictement positif d'une représentation unitaire ρ de G convenablement choisie (i.e. il existe un vecteur u de norme 1 dans l'espace de la représentation, tel que $\beta(g) = (\rho(g)u,u) \in \mathbf{R}_+^*$). Ensuite, utilisant le fait que $\psi(\Gamma)$ possède un sous-groupe discret libre non-abélien - ce qui résulte du corollaire 1 de [21], un peu renforcé - , on montre que la représentation unité de G n'est pas adhérente à la représentation ρ en question (pour la topologie sur $\widetilde{G}$ définie dans [4], § 1). Cette propriété entraîne, par un calcul facile, l'inégalité

$$\liminf_{N(g) \to \infty} \frac{\log \beta(g)}{\log N(g)} < 0 ,$$

d'où (2).

6.5. Enfin, pour donner un aperçu de la preuve de (iii), considérons un élément non central t de G appartenant à un tore déployé et tel que le groupe dérivé du centralisateur connexe $\underline{Z} = \underline{Z}(t)^{o}$ de t ne soit pas anisotrope ; un tel élément existe parce qu'on a supposé $rg_K\, \underline{G} \geq 2$. Posons $\underline{Z}(K) = Z$ et soient $\widetilde{M}$ l'espace des applications mesurables $Z \to \Lambda$ muni de la topologie de la convergence en mesure (comme d'habitude, on identifie deux telles applications lorsqu'elles coïncident presque partout) et $M = GL(V)\backslash\widetilde{M}$ l'espace des orbites de $GL(V)$ dans $\widetilde{M}$. Pour tout $g \in G$ tel que l'application $z \mapsto Y(gz)$ soit mesurable, notons $\mu(g)$ l'image de cette application dans M . On montre que l'espace topologique M est T_o , à base dénombrable, et que l'image réciproque par μ d'un ouvert de M est une partie mesurable de G , manifestement stable à gauche par Γ et à droite par t . Utilisant l'ergodicité de t dans G/Γ , on en déduit facilement que μ coïncide presque partout avec une application constante. Il s'ensuit que, pour presque tout g , on a une "action presque partout" de Z sur $Y(gZ)$ donnée par $z.Y(gz') = Y(gzz')$ et qui définit un homomorphisme η , mesurable donc continu, de Z dans le quotient du stabilisateur par le fixateur de $Y(gZ)$ dans $GL(V)$. Il est alors facile de voir, utilisant la méthode de [3], § 7, que si la restriction de η à un sous-groupe unipotent maximal U de Z n'est pas triviale, alors $K \subset L$ et $\eta|_U$ est rationnelle. Dans ce dernier cas, qui se présente pour au moins un choix de t si Y n'est pas constante presque partout, l'application $U \to \Lambda$ donnée par $u \mapsto Y(gu)$ coïncide presque partout avec une application rationnelle pour presque tout g . Faisant varier t et "recollant" les applications rationnelles en question, on obtient le résultat voulu.

7. Quelques étapes et ingrédients de la démonstration de la proposition 1

7.1. On conserve l'hypothèse card $I = 1$ et les notations $K_1 = K$, $G_1 = G$ du n° 6. Dorénavant, les groupes algébriques considérés seront tous des K-groupes et ils seront désignés par la même lettre que leurs groupes de points rationnels sur K .

Si H , H' sont des sous-groupes de G fermés pour la topologie ordinaire et tels que $H \subset H'$, on désigne par $\underline{B}(G/H)$ l'"algèbre" des classes de parties boréliennes de G/H modulo les parties négligeables (i.e. dont l'image réciproque dans G est négligeable), et par $\underline{B}(G/H, H')$ l'image réciproque de $\underline{B}(G/H')$ dans $\underline{B}(G/H)$ par l'application canonique $G/H \to G/H'$. On se permettra généralement l'abus de langage (qui serait dangereux dans un exposé plus formel) consistant à confondre un élément de $\underline{B}(G/H)$ et les parties de G/H qui le représentent. Par "sous-algèbre" de $\underline{B}(G/H)$, on entend une partie de $\underline{B}(G/H)$ fermée pour les réunions dénombrables et le passage au complémentaire.

Soient P un sous-groupe parabolique minimal de G et N un sous-groupe distingué de Γ tel que Γ/N ne soit pas moyennable. Il s'agit de montrer que N est central dans G .

7.2. Soit X un espace compact métrisable sur lequel $\Gamma_1 = \Gamma/N$ opère de telle façon que l'opération induite de Γ_1 sur l'espace $\underline{M}(X)$ des mesures de probabilité sur X soit sans point fixe. (La compactification de Cech $\check{\Gamma}_1$ de Γ_1 possède cette dernière propriété - comme me l'a fait observer A. Connes - mais n'est pas métrisable si Γ_1 est infini. Pour construire X on peut procéder comme suit. Pour $f \in C(\check{\Gamma}_1)$, posons $L_f = \{\mu \in \underline{M}(X) \mid (\gamma\mu)(f) = \mu(f)$ pour tout $\gamma \in \Gamma\}$. L'intersection de tous les L_f est vide, donc il existe une partie finie F de $C(\check{\Gamma}_1)$ telle que $\bigcap_{f \in F} L_f = \emptyset$, et on prend pour X l'espace des idéaux maximaux de la C^*-algèbre à unité engendrée par $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F$.)
Une variante d'un théorème de H. Furstenberg ([7], Theorem 15.1) assure l'exis-

tence d'une application mesurable de G dans $\underline{M}(X)$ se factorisant à travers une application $\varphi : G/P \to \underline{M}(X)$ et compatible avec les opérations de Γ sur G et $\underline{M}(X)$. Soit $\underline{Q}$ la "sous-algèbre" de $\underline{B}(G/P)$ formée des images réciproques par φ des parties boréliennes de $\underline{M}(X)$. Du fait que cet espace a une base d'ouverts dénombrables et que Γ y opère sans point fixe, on déduit aussitôt que $\underline{Q} \neq \{\emptyset , G/P\}$; de plus, il est clair que

(3) $\gamma \underline{Q} = \underline{Q}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,

(4) N fixe $\underline{Q}$.

Le lemme-clef de la démonstration est le

LEMME 1.- <u>Toute "sous-algèbre" $\underline{Q}$ de $\underline{B}(G/P)$ satisfaisant à (3) est de la forme $\underline{B}(G/P , P')$, où P' est un sous-groupe de G contenant P</u> .

La proposition 1 en résulte aussitôt. En effet, si $\underline{Q} = \underline{B}(G/P , P')$, on a $P' \neq G$ (car $\underline{B}(G/P , G) = \{\emptyset , G/P\}$) , et (4) implique manifestement que N opère trivialement sur G/P' , donc est central dans G .

7.3. Choisissons un tore déployé maximal S dans le radical de P et notons Δ la base correspondant à P dans le système de racines de G relatif à S . Pour toute partie θ de Δ , soient P_θ le sous-groupe parabolique standard qui lui correspond (e.g. $P = P_\emptyset$, $G = P_\Delta$), U_θ le sous-groupe unipotent "opposé à P_θ " (i.e. U_θ est normalisé par S , $U_\theta \cap P_\theta = \{1\}$ et $U_\theta . P_\theta$ est ouvert dans G) et D_θ l'ensemble des $s \in S$ tels que $\alpha(s) = 1$ pour $\alpha \in \theta$ et $|\alpha(s)| < 1$ pour $\alpha \in \Delta - \theta$. Posons $U_\emptyset = U$, $V_\theta = P_\theta \cap U$ (de sorte que $U = U_\theta \rtimes V_\theta$) et, pour $C \subset U$, $\psi_\theta(C) = U_\theta . (C \cap V_\theta)$. L'application canonique $G \to G/P$ envoie U homéomorphiquement sur un ouvert dense de G/P . Du point de vue des "propriétés presque partout", on peut donc "identifier" G/P à U et $\underline{Q}$ à une "algèbre" de classes de parties boréliennes de U modulo les parties négligeables. L' " opération presque partout " de G sur U sera notée $(g,u) \mapsto g.u$.

7.4. LEMME 2.- <u>Si $s \in D_\theta$ et si C est une partie mesurable de U , alors, pour presque tout $u \in U$, l'ensemble $s^n u C s^{-n}$ tend en mesure vers $\psi_\theta(uC)$ lorsque n tend vers l'infini</u>.

Soient μ une mesure de Haar dans U_θ et Y un voisinage ouvert relativement compact et symétrique (i.e. $Y = Y^{-1}$) de l'élément neutre dans U_θ . L'assertion à établir se ramène aisément à la suivante :

(*) <u>pour presque tout</u> $u \in C^{-1}$ (<u>resp.</u> $u \notin C^{-1}$), <u>on a</u>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(Y \cap s^n u C s^{-n})}{\mu(Y)} = 1 \qquad (\underline{\text{resp.}} = 0).$$

Quitte à aggrandir Y , on peut supposer que $s^{-1}Ys \subset Y$. Soit N un entier tel que $s^{-n}YYs^n \subset Y$ pour tout $n \geq N$. La "distance" $d : U_\theta \times U_\theta \to R_+$ définie par

$$\log_b d(x,y) = -\frac{1}{N}\cdot \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid y^{-1}x \in s^{-n}Ys^n\} \qquad (x,y \in U_\theta) ,$$

où b désigne un nombre réel > 1 arbitrairement choisi, possède les propriétés suivantes qu'on résumera en disant que c'est une b-<u>métrique</u> : $d(x,y) \geq 0$ et $= 0$ si et seulement si $x = y$; $d(x,y) = d(y,x)$; $d(x,z) \leq b.(d(x,y) + d(y,z))$. Pour $x \in U_\theta$ et $\varepsilon \in R_+$, soit $S(x,\varepsilon) = \{y \in U_\theta \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$ la "boule de centre x et de rayon ε ". L'assertion (*) est une conséquence facile du "théorème de densité" suivant, qui s'établit à l'aide d'un "théorème de Vitali" (cf. [5], III.12.2) pour les b-métriques :

<u>si</u> C' <u>est une partie mesurable de</u> U_θ , <u>on a pour presque tout</u> $x \in C'$ (<u>au sens de la mesure</u>)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(C' \cap S(x,\varepsilon))}{(S(x,\varepsilon))} = 1 .$$

7.5. Le lemme suivant se déduit sans grande peine du lemme 2 et de l'ergodicité de s dans G/Γ pour $s \in D_\theta$ et $\theta \neq \Delta$ (cf. 6.3) :

LEMME 3.- <u>Soit</u> $\underline{Q}$ <u>une "sous-algèbre" de</u> $\underline{B}(G/P)$ <u>satisfaisant à</u> (3), <u>et soient</u> $C \in \underline{Q}$ <u>et</u> $\theta \subsetneq \Delta$. <u>Alors on a, pour presque tout</u> $u \in U$ <u>et quel que soit</u> $g \in G$,

$$g\cdot\psi_\theta(uC) \in \underline{Q} .$$

7.6. LEMME 4.- <u>Toute "sous-algèbre" de</u> $\underline{B}(G/P)$ <u>stable par</u> G <u>est de la forme</u> $\underline{B}(G/P , P')$ <u>où</u> P' <u>est un sous-groupe de</u> G <u>contenant</u> P .

Plus généralement, toute "sous-algèbre" de $\underline{B}(G)$ stable (à gauche) par G est de la forme $\underline{B}(G,H)$. Pour le voir, on considère l'algèbre L des fonctions numériques f sur G telles que $f^{-1}((a,b))$ appartienne à la "sous-algèbre" en question pour $-\infty < a < b < +\infty$, algèbre que l'on munit de la topologie de la convergence en mesure. On montre de la façon habituelle (convolution avec des fonctions continues à support compact tendant vers δ_1) que la sous-algèbre L_c des fonctions continues appartenant à L est dense dans L . Enfin, on vérifie que le groupe $H = \{h \in G \mid f(h) = f(1)$ pour tout $f \in L_c\}$ possède la propriété voulue.

7.7. Venons-en, pour finir, à la démonstration du lemme 1. Vu le lemme 4, il existe une plus petite partie θ' de Δ telle que $\underline{B}(G/P_{\theta'}) \subset \underline{Q}$. Supposons cette inclusion stricte et soit $C \in \underline{Q} - \underline{B}(G/P_{\theta'})$. On montre aisément qu'il existe $\alpha \in \theta'$ et $v \in V_{\{\alpha\}}$ tels que $vC \neq C$, d'où l'on déduit que les $u \in U$ tels que l'ensemble $uC \cap V_{\{\alpha\}}$ et son complémentaire dans $V_{\{\alpha\}}$ soient tous deux non négligeables forment une partie non négligeable de U . Utilisant le lemme 3, pour $\theta = \{\alpha\}$ (l'hypothèse $\mathrm{rg}_K\, G \geq 2$ intervient ici), et le lemme 4, on déduit de là qu'il existe une partie θ'' de Δ ne contenant pas α et telle que $\underline{B}(G/P_{\theta''}) \subset \underline{Q}$, en contradiction avec la définition de θ' . Cette contradiction résulte de ce qu'on a supposé $\underline{Q} \neq \underline{B}(G/P_{\theta'})$.

8. Démonstration du théorème 3 à partir de la proposition 1 (card I = 1)

On conserve les notations et conventions du § 7, à ceci près que N désigne à présent un sous-groupe distingué de Γ tel que $\Gamma_1 = \Gamma/N$ soit moyennable. Cela implique ([8], 3.5.2) que la représentation unité de Γ_1 est adhérente à la représentation régulière (pour la topologie déjà utilisée en 6.4). Soit ρ la représentation unitaire de G induite par la représentation régulière de Γ_1 , considérée comme une représentation de Γ . D'après ce qu'on vient de voir, la représentation unité de G est adhérente à ρ et, comme $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}\, G \geq 2$, elle doit y être contenue, en vertu du théorème 6 de [4]. Par conséquent, la représentation régulière de Γ_1 contient la représentation unité, et Γ_1 est fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Density properties of certain subgroups of semi-simple groups, Ann. of Math., 72 (1960), 179-188.

[2] A. BOREL - Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math. I.H.E.S., 16 (1963), 101-126.

[3] A. BOREL et J. TITS - Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples, Ann. of Math., 97 (1973), 499-571.

[4] C. DELAROCHE et A. KIRILLOV - Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, Sém. Bourbaki, Juin 1968, exposé 343, W.A. Benjamin/Addison-Wesley Pub. Cy, Inc.

[5] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ - Linear operators I, Interscience, New York, 1958.

[6] P. EYMARD - Initiation à la théorie des groupes moyennables, dans Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie, Séminaire Nancy-Strasbourg, 1973/75, Lecture Notes Math., vol. 497, 1975, 89-108, Springer Verlag, Berlin.

[7] H. FURSTENBERG - Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, Proc. Symp. Pure Math., vol. 26 (Harmonic Analysis on Homogeneous spaces, Williamstown, Mass., 1972), 1973, 193-229.

[8] F.P. GREENLEAF - Invariant means on topological groups and their applications, Van Nostrand Math. Studies, n° 16, New York, 1969.

[9] G. HARDER - Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörper, Inventiones Math., 7 (1969), 33-54.

[10] G.A. MARGULIS - Arifmetičeskie svoistva diskretnyh podgrupp (Propriétés arithmétiques de sous-groupes discrets), Uspehi Mat. Naŭk, 29 (1974), 49-98.

[11] G.A. MARGULIS - Diskretnye gruppy dviženii mnogoobpazii nepoložitel'noi krivizny (Groupes discrets de mouvements de variétés à courbure non positive), Proc. Intern. Congress Math., Vancouver, 1974, vol. 2, 21-34 (1975).

[12] G.D. MOSTOW - Intersection of discrete subgroups with Cartan subgroups, Journ. Indian Math. Soc., 34 (1970), 203-214.

[13] G.D. MOSTOW - Strong rigidity of locally symmetric spaces, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1973.

[14] V.I. OSELEDEC - Mul'tiplikativnaya èrgodičeskaya teorema. Harakterističeskie pokazateli Lyapunova dinamičeskih sistem (Théorème ergodique multiplicatif. Exposants caractéristiques de Lyapunov des systèmes dynamiques), Trudy Mosk. Mat. Obšč., 19 (1969), 179-210.

[15] I.I. PYATECKII-ŠAPIRO - Avtomorfnye formy i arifmetičeskie gruppy, (Formes automorphes et groupes arithmétiques), Travaux du Congrès Intern. Math. Moscou, 1968, 232-247.

[16] I.I. PYATECKII-ŠAPIRO - Diskretnye podgruppy grupp Li (Sous-groupes discrets de groupes de Lie), Trudy Mosk. Mat. Obšč., 18 (1968), 3-18.

[17] M.S. RAGHUNATHAN - Discrete groups and $\mathbb{Q}$-structures on semi-simple Lie groups, Proc. Intern. Coll. on Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli, Bombay, Jan. 1973, 225-321.

[18] M.S. RAGHUNATHAN - Discrete subgroups of Lie groups, Ergebnisse der Math. Bd. 68, Springer, Berlin, 1972.

[19] A. SELBERG - On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory, Bombay, Tata Inst., 1960, 147-164.

[20] A. SELBERG - Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces, Proc. 15 th Scand. Congress, Oslo 1968, Lecture Notes in Math., vol. 118 (1970), 99-120, Springer Verlag, Berlin.

[21] J. TITS - Free subgroups in linear groups, J. of Algebra, 20 (1972), 250-270.

[22] È.B. VINBERG - Diskretnye gruppy, porojdennye otrajeniyami v prostranstvah Lobačeskogo (Groupes discrets engendrés par des réflexions dans les espaces de Lobacevskii), Mat. Sbornik, 72 (1967), 471-488.

[23] S.P. WANG - On density properties of S-subgroups of locally compact groups, Ann. of Math., 94 (1971), 325-329.

[24] A. WEIL - On discret subgroups of Lie groups II, Ann. of Math., 75 (1962), 578-602.