Séminaire N. Bourbaki

David Ruelle

Formalisme thermodynamique

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 480, p. 154-166
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__154_0>

Séminaire BOURBAKI
28e année, 1975/76, n° 480

FORMALISME THERMODYNAMIQUE

par David RUELLE

Introduction

Le formalisme de la mécanique statistique de l'équilibre, que nous appellerons formalisme thermodynamique, a été développé à partir de G. W. Gibbs pour décrire les propriétés de certains systèmes physiques. Quoique la justification physique de ce formalisme reste fort insuffisante, les résultats obtenus sont remarquablement bons.

Du point de vue mathématique, il s'est avéré que le formalisme thermodynamique recouvre des structures mathématiques intéressantes, permettant de deviner les bons théorèmes et dans une certaine mesure de les démontrer. Que l'étude du monde physique soit une puissante source d'inspiration pour la mathématique est une chose évidente. Que cette inspiration puisse agir de manière aussi détaillée est un fait plus remarquable, et que chacun interprétera suivant sa philosophie personnelle.

Aux §§ 1, 2, nous donnons une description générale (et bien incomplète) du formalisme thermodynamique. Aux §§ 3, 4, nous indiquons des applications. Pour un exposé un peu plus détaillé de ces questions, voir [21], et surtout la monographie de Bowen [5].

§ 1. Formalisme thermodynamique sur un compact métrisable

On suppose donnés un compact métrisable non vide X , un entier $\nu \geq 1$, et un homomorphisme $x \mapsto \tau^x$ du groupe additif Z^ν dans le groupe des homéomorphismes de X . On dit que τ est expansif si, pour une métrique permise d , il existe $\delta > 0$ tel que

$$((\forall\ x) \quad d(\tau^x\xi\, , \tau^x\eta) \leq \delta) \quad \Rightarrow \quad (\xi = \eta) \quad .$$

Définition de la pression

Si $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_j)$ sont des recouvrements de X , le recouvrement $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ est constitué des ensembles $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B}_j$. Cette notation s'étend à une famille quelconque de recouvrements. On dira que $\mathfrak{B}$ est un sous-recouvrement du recouvrement $\mathfrak{A}$ de X , si $\mathfrak{B}$ est une sous-famille de $\mathfrak{A}$, et un recouvrement de X . Nous écrirons

$$\tau^{-x}\mathfrak{A} = (\tau^{-x}\,\mathfrak{A}_i)$$

$$\mathfrak{A}^{\Lambda} = \bigvee_{k \in \Lambda} \tau^{-x}\,\mathfrak{A} \qquad \text{si } \Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$$

$$\operatorname{diam} \mathfrak{A} = \sup_i \operatorname{diam} \mathfrak{A}_i$$

où $\operatorname{diam} \mathfrak{A}_i$ est le diamètre de $\mathfrak{A}_i$ pour une métrique permise d sur X .

Soient $A \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $\mathfrak{A}$ un recouvrement ouvert fini de X , et Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^{\nu}$. Posons

(1) $$Z_{\Lambda}(A, \mathfrak{A}) = \min\{\sum_j \exp[\sup_{\xi \in \mathfrak{B}_j} \sum_{x \in \Lambda} A(\tau^{x}\xi)] : (\mathfrak{B}_j) \text{ est un sous-recouvrement de } \mathfrak{A}^{\Lambda}\} .$$

Si $a^1, \ldots, a^{\nu} \in \mathbb{N}^*$, posons $a = (a^1, \ldots, a^{\nu})$ et

$$\Lambda(a) = \{(x^1, \ldots, x^{\nu}) \in \mathbb{Z}^{\nu} : 0 \leq x^i < a^i \quad \text{pour } i = 1, \ldots, \nu\} .$$

La fonction $a \mapsto \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$ est subadditive, et l'on peut écrire

$$P(A, \mathfrak{A}) = \lim_{a^1, \ldots, a^{\nu} \to \infty} \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda(a)} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$$

$$= \inf_a \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda(a)} \log Z_{\Lambda(a)}(A, \mathfrak{A})$$

$$P(A) = \lim_{\operatorname{diam} \mathfrak{A} \to 0} P(A, \mathfrak{A}) .$$

La fonction $P : \mathcal{C}(X) \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s'appelle pression (topologique) ; $P(A)$ est fini pour tout A si et seulement si $P(0)$ est fini, dans ce cas P est convexe continue (pour la topologie de la convergence uniforme dans $\mathcal{C}(X)$). On appelle $P(0)$ l'entropie topologique [1] ; elle donne une mesure de la vitesse de mélange de l'action τ .

Entropie d'une mesure invariante

Cette notion d'entropie provient de la mécanique statistique par l'intermédiaire de la théorie de l'information, et a été formalisée par Kolmogorov et Sinai (voir [3], [10]). Si σ est une mesure de probabilité et $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_i)$ un recouvrement fini de X par des ensembles σ-mesurables disjoints, on pose

$$H(\sigma , \mathfrak{A}) = \sum_i \eta(\sigma(\mathfrak{A}_i))$$

avec

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ -t \log t & \text{si } t > 0 . \end{cases}$$

Soit maintenant I l'ensemble des mesures de probabilité sur X invariantes par τ , i.e. telles que $\sigma(A) = \sigma(A \circ \tau^x)$. Si $\mathfrak{A}$ est une partition borélienne finie, on peut écrire

$$h(\sigma , \mathfrak{A}) = \lim_{a^1,\dots,a^\nu \to \infty} \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda(a)} H(\sigma , \mathfrak{A}^\Lambda)$$

$$= \inf_a \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda(a)} H(\sigma , \mathfrak{A}^\Lambda)$$

$$h(\sigma) = \lim_{\operatorname{diam} \mathfrak{A} \to 0} h(\sigma, \mathfrak{A}) .$$

La fonction $h : I \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ est affine et positive ; elle s'appelle <u>entropie</u> (moyenne). Si τ est expansif, h est finie et semi-continue supérieurement sur I muni de la topologie vague.

Principe variationnel

THÉORÈME 1 (Walters [25]).- <u>Pour tout</u> $A \in \mathcal{C}(X)$,

$$P(A) = \sup_{\sigma \in I} [h(\sigma) + \sigma(A)] .$$

Ce théorème étend un résultat connu en mécanique statistique (voir [17]) et aussi pour A = 0 (Dinaburg, Goodwyn, Goodman, voir [25] pour les références) ; il en existe maintenant des démonstrations assez simples (voir [11], [16]).

Supposons que P est finie. L'ensemble I_A des <u>états d'équilibre</u> pour $A \in \mathfrak{C}(X)$ est défini par

$$I_A = \{\sigma \in I : h(\sigma) + \sigma(A) = P(A)\}$$

I_A peut être vide.

THÉORÈME 2.- *Notons* $\mathfrak{C}(X)^*$ *le dual de* $\mathfrak{C}(X)$, i.e. *l'espace des mesures réelles sur* X . *Supposons* h *finie semi-continue supérieurement sur* $I \subset \mathfrak{C}(X)^*$ (*muni de la topologie vague*).

(a) $I_A = \{\sigma \in \mathfrak{C}(X)^* : P(A + B) \geq P(A) + \sigma(B)$ *pour tout* $B \in \mathfrak{C}(X)\}$.

Cet ensemble est non vide ; *il est convexe, compact* ; *c'est un simplexe de Choquet et une face de* I .

(b) *Le complémentaire de*

$$D = \{A \in \mathfrak{C}(X) : \text{card } I_A = 1\}$$

est rare dans $\mathfrak{C}(X)$.

(c) *Pour tout* $\sigma \in I$,

$$h(\sigma) = \inf_{A \in \mathfrak{C}(X)} [P(A) - \sigma(A)] .$$

Ce théorème résulte du précédent par des arguments généraux de convexité. Pour les notions de simplexe et de face, voir [9].

Le fait que I_A soit un simplexe (métrisable) implique que chaque $\sigma \in I_A$ a une représentation intégrale unique comme barycentre d'une mesure portée par les points extrémaux de I_A . On sait d'ailleurs que I est aussi un simplexe. Le fait que I_A soit une face de I implique que les points extrémaux de I_A sont aussi des points extrémaux de I , c'est-à-dire des mesures τ-ergodiques.

§ 2. Mécanique statistique sur un réseau

Les résultats ci-dessus étendent des résultats connus pour certains systèmes de la mécanique statistique (systèmes classiques de spins sur un réseau). Par exemple, si F est un ensemble fini $\neq \emptyset$ (avec la topologie discrète), on peut prendre $X = F^{Z^\nu}$ avec la topologie produit, et τ^x défini de manière évidente. Nous prendrons plus généralement pour X un sous-ensemble fermé non vide invariant par les τ^x. Pour l'interprétation physique, notons que X est l'espace des configurations d'un système de spins sur un "réseau cristallin" Z^ν, F est l'ensemble des valeurs possibles du spin en un point du réseau.

Si $x = (x^i) \in Z^\nu$, nous écrivons $|x| = \max_i |x^i|$. Soit $0 < \lambda < 1$; si $\xi, \eta \in X$ avec $\xi = (\xi_x)_{x \in Z^\nu}$, $\eta = (\eta_x)_{x \in Z^\nu}$, nous définissons

$$d(\xi,\eta) = \lambda^k \qquad \text{avec} \quad k = \inf\{|x| : \xi_x \neq \eta_x\}$$

d est une distance compatible avec la topologie de X. On vérifie avec cette définition que τ est expansif, donc le théorème 2 s'applique.

Soit $0 < \alpha \leq 1$, nous notons $\mathcal{H}^\alpha(X)$ l'espace de Banach des fonctions réelles Hölder continues d'exposant α sur Ω muni de la métrique d.

Nous supposerons désormais qu'il existe un sous-ensemble fini Δ de Z^ν et un sous-ensemble G de F^Δ tels que

(2) $$X = \{\xi \in F^{Z^\nu} : (\forall\, x)\ \tau^x \xi|_\Delta \in G\}.$$

Si $\Lambda \subset Z^\nu$, nous noterons pr_Λ, pr'_Λ les projections de F^{Z^ν} sur F^Λ, $F^{Z^\nu \setminus \Lambda}$ respectivement. Nous noterons ε_Λ la mesure sur $pr_\Lambda X$ qui donne à chaque point de cet ensemble la masse 1.

PROPOSITION.- <u>Soit</u> $A \in \mathcal{H}^\alpha(X)$. <u>Pour tout sous-ensemble fini</u> Λ <u>de</u> Z^ν, <u>il existe une fonction continue</u> $f_\Lambda : pr_\Lambda X \times pr'_\Lambda X \mapsto R$ <u>telle que pour toute</u> $\sigma \in I_A$,

$$\sigma = f_\Lambda \cdot (\varepsilon_\Lambda \otimes pr'_\Lambda \sigma)$$

(on a encore noté σ l'image de cette mesure par l'application canonique $X \mapsto pr_\Lambda X \times pr'_\Lambda X$).

On peut encore formuler ce résultat en disant que la probabilité conditionnelle que ξ soit réalisé dans Λ , sachant que η est réalisé dans $Z^\nu \setminus \Lambda$, est $f_\Lambda(\xi,\eta)$ (pour $\xi \in pr_\Lambda X$, $\eta \in pr'_\Lambda X$). En général on appellera <u>état de Gibbs</u> (associé à A) toute mesure de probabilité telle que les probabilités conditionnelles ci-dessus soient données par les f_Λ . Les états de Gibbs sont donc les mesures de probabilité qui ont les mêmes probabilités conditionnelles que les états d'équilibre, mais ne sont pas nécessairement invariantes par τ (voir Dobrushin [12], [13], Lanford-Ruelle [15]).

THÉORÈME 3.- <u>L'ensemble des états de Gibbs pour</u> $A \in \mathcal{H}^\alpha(X)$ <u>est un simplexe de Choquet</u>.

On a donc une représentation intégrale unique de tout état de Gibbs en termes d'états de Gibbs extrémaux ou "purs".

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> $A \in \mathcal{H}^\alpha(X)$.

(a) <u>Tout état d'équilibre est un état de Gibbs invariant par</u> τ .

(b) <u>Si</u> $X = F^{Z^\nu}$, <u>tout état de Gibbs invariant par</u> τ <u>est un état d'équilibre</u>.

(a) n'est autre que la Proposition plus haut. (b) reste vrai sous des conditions plus générales (mais un peu plus compliquées) que la condition $X = F^{Z^\nu}$. L'hypothèse $A \in \mathcal{H}^\alpha(X)$ peut aussi être considérablement affaiblie. Pour la clarté et la simplicité, nous avons fait une description inhabituelle de la mécanique statistique, utilisant des fonctions (Hölder) continues sur X plutôt que les "interactions" qui sont plus appropriées à une étude fine.

<u>Interprétation physique</u>

Les états d'équilibre extrémaux sont des mesures τ-ergodiques. On interprète ces états d'équilibre extrémaux comme <u>phases thermodynamiques pures</u>. Comme les états d'équilibre correspondent aux plans tangents au graphe de P (Théorème 2(a)), les discontinuités de la dérivée de P correspondent aux <u>changements de phases</u>. On aimerait donc bien savoir par exemple si P est analytique par morceau (dans un sens convenable) sur $\mathcal{H}^\alpha(X)$. Si σ est un état d'équilibre extrémal, il se peut qu'il ait une décomposition non triviale en états de Gibbs extrémaux (non invariants par τ à cause du théorème 4 (b)) ; cela s'appelle une brisure de symétrie (la symétrie brisée étant l'invariance par τ).

L'objectif principal de la mécanique statistique de l'équilibre est d'étudier les propriétés de différentiabilité (et d'analyticité) de la fonction P , et la structure des états d'équilibre et états de Gibbs. Des résultats détaillés, d'un grand intérêt pour la physique, sont connus dans des cas particuliers. Ils sont obtenus par des méthodes fort jolies, mais qui paraissent assez particulières si l'on se place du point de vue général adopté ici. L'une de ces méthodes, celle des inégalités de corrélations a été discutée à ce séminaire par P. Cartier [7]. Parmi les autres méthodes [17], citons la méthode des équations intégrales, le théorème de Lee et Yang, et l'argument de Peierls.

Pour les "systèmes à une dimension", c'est-à-dire quand $\nu = 1$, on a des résultats assez complets qui se résument en disant qu'il n'y a pas de changement de phases. Soit donc $\nu = 1$ et supposons que

$$X = \{\xi = (\xi_x)_{x \in \mathbf{Z}} \in F^{\mathbf{Z}} : (\forall\ x)\ t_{\xi_x \xi_{x+1}} = 1\}$$

où (t_{uv}) est une matrice dont les éléments sont 0 ou 1 . On suppose en outre qu'il existe un entier $N > 0$ tel que tous les éléments de la matrice t^N soient strictement positifs.

THÉORÈME 5.- Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, $P : \mathcal{H}^{\alpha}(X) \mapsto \mathbf{R}$ est analytique réelle. En outre pour toute $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(X)$, il y a un seul état de Gibbs qui est aussi le seul état d'équilibre.

Toutes ces propriétés sont fausses pour $\nu > 1$.

Généralisations

Du point de vue physique, la théorie des systèmes classiques de spins sur un réseau est un cas très particulier. On s'attend donc à ce que les résultats ci-dessus se généralisent. En particulier, le remplacement de systèmes classiques par des systèmes quantiques consiste à remplacer des mesures de probabilité sur un compact par des états sur une algèbre stellaire. Cela conduit à des conjectures naturelles pour des analogues non commutatifs de la théorie du § 1 (*).

§ 3. Application aux difféomorphismes vérifiant l'axiome A de Smale

La théorie esquissée au § 2 (mécanique statistique sur un réseau) est bien plus riche que celle décrite au § 1 (formalisme thermodynamique sur un compact métrisable). Ceci est dû à la structure produit de X (ou tout au moins à la condition (2)) qui permet la définition des états de Gibbs. C'est Sinai [23] qui s'est, le premier, rendu compte de ce que la "structure produit locale" d'une variété sur laquelle agit un difféomorphisme d'Anosov permet d'utiliser la notion d'état de Gibbs. Cette utilisation dépend de l'existence de partitions de Markov, prouvée par Sinai [22]. Au lieu des difféomorphismes d'Anosov on peut plus généralement considérer ceux qui satisfont à l'axiome A de Smale.

Nous allons ici rappeler quelques définitions et formuler un théorème. Pour plus de détails nous renvoyons à la monographie de Bowen [5], et aux articles originaux ([23], [18], [6]).

L'axiome A de Smale

Soient M une variété compacte de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^r de M .

Soit X un sous-ensemble compact de M , invariant pour f (i.e. $fX = X$) . On dit que X est <u>hyperbolique</u> s'il existe une décomposition continue du fibré tangent à M restreint à X :

$$T_X M = E^s + E^u$$

invariante par Tf , et des constantes $c > 0$, $\lambda \in (0,1)$ telles que

$$\|(Tf^n)v\| \leq c\lambda^n \|v\| \qquad \text{pour } v \in E^s , n \geq 0 ,$$

$$\|(Tf^{-n})v\| \leq c\lambda^n \|v\| \qquad \text{pour } v \in E^u , n \geq 0 ,$$

pour une métrique riemannienne sur M .

(*) Je remercie A. Connes pour des discussions sur ce sujet.

Si M est hyperbolique, on dit que f est un difféomorphisme d'Anosov.

Un point $x \in M$ est errant s'il possède un voisinage U tel que $U \cap f^n U = \emptyset$ pour tout $n > 0$. Soit Ω l'ensemble des points non errants. L'axiome A est constitué des deux conditions suivantes sur f :

(Aa) L'ensemble Ω est hyperbolique ;

(Ab) Les points f-périodiques sont denses dans Ω.

On montre qu'un difféomorphisme d'Anosov satisfait nécessairement à l'axiome A et l'on conjecture que $\Omega = M$ dans ce cas. La référence de base sur l'axiome A reste l'article de Smale [24].

Nous supposerons désormais l'axiome A vérifié. Smale a alors démontré un "théorème de décomposition spectrale" pour l'ensemble non errant Ω. Il s'agit du fait que Ω peut s'écrire comme réunion finie d'ensembles compacts disjoints Ω_i invariants par f et tels que f restreint à Ω_i soit topologiquement transitif. Cela veut dire qu'il existe $x \in \Omega_i$ tel que l'ensemble $\{f^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ soit dense dans Ω_i. La "décomposition spectrale" est unique. Les ensembles Ω_i sont appelés ensembles basiques. Un attracteur est un ensemble basique X ayant un voisinage U tel que $\bigcap_{n \geq 0} f^n U = X$.

THÉORÈME 6.- Soit f un difféomorphisme C^2 de M, satisfaisant à l'axiome A. Pour presque tout $x \in M$, par rapport à la mesure de Lebesgue dans les cartes locales, on a

(a) $f^n x$ tend vers un attracteur X quand $n \to \infty$,

(b) pour toute fonction continue sur M

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(f^n x) = \int \rho(dx)\, A(x) . \tag{3}$$

La mesure ρ sur l'attracteur X ne dépend que de X. C'est une mesure d'équilibre au sens du § 1. Plus précisément, ρ est l'unique mesure qui rend maximum l'expression

$$h(\rho) + \rho(A)$$

<u>où</u> $A = -\log J$ <u>et</u> J <u>est le jacobien de la restriction de</u> Tf <u>au "fibré instable"</u> E^u .

Ce théorème [18], [6] généralise un théorème de Sinai [23] pour les difféomorphismes d'Anosov. Dans le cas général (contrairement au cas particulier traité par Sinai), les points x apparaissant au membre de gauche sont hors du support de ρ . La situation est donc très différente de celle du théorème ergodique ordinaire. Le théorème ci-dessus s'étend aux flots.

QUESTION.- <u>L'existence de "moyennes ergodiques" du type</u> (3) <u>pour presque tout</u> x <u>(par rapport à la mesure de Lebesgue dans les cartes locales) est-elle une propriété générique des difféomorphismes</u> ?

Cette question, et surtout la question analogue pour les flots est d'un grand intérêt pour la physique, où l'on aimerait décrire le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles par des mesures de probabilité appropriées.

§ 4. <u>Application aux fonctions zêta</u>

Si l'on se réfère aux définitions du § 1, on voit que la détermination de l'entropie topologique résulte d'un comptage (de sous-ensembles formant un recouvrement de X). Dans la définition de la pression topologique, le comptage simple est remplacé par un comptage avec des poids (voir (1)). Dans le cas particulier d'un difféomorphisme satisfaisant à l'axiome A de Smale, on a les formules

$$P(0) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{card} \operatorname{Fix} f^n \ ,$$

$$P(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \operatorname{Fix} f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x) \ .$$

Rappelons que la fonction zêta d'Artin-Mazur [2] d'un difféomorphisme f est donnée par la série formelle

$$\zeta(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{card} \operatorname{Fix} f^n \ .$$

Il est donc naturel d'introduire une fonction zêta modifiée

$$\zeta_A(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x) .$$

Celle-ci peut s'interpréter comme fonction zêta d'un flot : le flot spécial construit sur la transformation f de X avec la fonction $-A - \log z$ (supposée > 0) . La mécanique statistique fournit une technique d'évaluation des quantités

$$Z_n = \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x)$$

comme traces de puissances d'un opérateur appelé "matrice de transfert". On peut ainsi relier les propriétés d'analyticité de ζ_A aux propriétés spectrales de la matrice de transfert (voir [19], [20], [8], [14]).

Mentionnons comme application le flot géodésique sur une variété compacte à courbure constante négative (qui est un flot d'Anosov). Grâce aux résultats de Bowen [4], on peut étudier la fonction zêta

$$s \mapsto \prod_{\gamma} (1 - e^{-s\ell(\gamma)})^{-1}$$

où le produit s'étend aux orbites périodiques du flot (i.e. aux géodésiques fermées) et où $\ell(\gamma)$ est la période (i.e. la longueur d'une géodésique fermée). On montre que cette fonction zêta est méromorphe dans tout le plan complexe, généralisant un résultat de Selberg pour les surfaces à courbure constante négative.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. L. ADLER, A. G. KONHEIM and M. H. McANDREW - Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 114, 309-319 (1965).

[2] M. ARTIN and B. MAZUR - On periodic points, Ann. of Math., (2) 81, 82-99 (1965).

[3] P. BILLINGSLEY - Ergodic theory and information, John Wiley, New York, 1965.

[4] R. BOWEN - Symbolic dynamics for hyperbolic flows, Amer. J. Math., 95, 429-460 (1973).

[5] R. BOWEN - Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture notes in Math. n° 470, Springer, New York, 1975.

[6] R. BOWEN and D. RUELLE - Ergodic theory for axiom A flows, Inventiones math., 29, 181-202 (1975).

[7] P. CARTIER - Mécanique statistique et inégalités de corrélation, Sém. Bourbaki (juin 1973), exposé 431, Lecture Notes in Math. n° 383, Springer, 1974.

[8] P. CARTIER -
A paraître.

[9] G. CHOQUET et P.-A. MEYER - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, 13, 139-154 (1963).

[10] J.-P. CONZE - Entropie d'un groupe abélien de transformations, Zeitschr. Wahrscheinlichkeitstheorie, 25, 11-30 (1972).

[11] M. DENKER - Remarques sur la pression pour les transformations continues, C.R.Acad. Sc. Paris, 279 A, 967-970 (1974).

[12] R. L. DOBRUSHIN - Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions, Funkts. Analiz i ego Pril., 2 n°4, 31-43 (1968) [Traduction anglaise : Functional Anal. Appl. 2, 292-301 (1968)].

[13] R. L. DOBRUSHIN - The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions, Funkts. Analiz i ego Pril., 2 n° 4, 44-57 (1968) [Traduction anglaise : Functional Anal. Appl., 2, 302-312 (1968)].

[14] G. GALLAVOTTI - Zeta functions and basic sets, Preprint 1975.

[15] O.E. LANFORD and D. RUELLE - Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, Commun. math. Phys. 13, 194-215 (1969).

[16] M. MISIUREWICZ - A short proof of the variational principle for a Z_+^N action on a compact space, Preprint 1975.

[17] D. RUELLE - Statistical mechanics. Rigorous results, Benjamin, New York, 1969.

[18] D. RUELLE - A measure associated with axiom A attractors, Amer. J. Math., A paraître.

[19] D. RUELLE - Generalized zeta functions for axiom A basic sets, Bull. Amer. Math. Soc., A paraître.

[20] D. RUELLE - Zeta functions for expanding maps and Anosov flows, A paraître.

[21] D. RUELLE - Formalisme thermodynamique en théorie ergodique, Exposés faits à la rencontre du 22 au 24 mai 1975 de la R. C. P. n° 25 à Strasbourg.

[22] Ia.G. SINAI - Construction of Markov Partitions, Funkts. Analiz Pril., 2 n° 1, 64-89 (1968) [Traduction anglaise : Functional Anal. Appl., 2, 245-283 (1968)].

[23] Ia.G. SINAI - Gibbsian measures in ergodic theory, Uspekhi Mat. Nauk, 27 n° 4, 21-64 (1972) [Traduction anglaise : Russian Math. Surveys, 27 21-69 (1972)].

[24] S. SMALE - Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 747-817 (1967).

[25] P. WALTERS - A variational principle for the pressure of continuous transformations, Amer. J. Math., A paraître.