JEAN-LOUIS KOSZUL

Rigidité forte des espaces riemanniens localement symétriques

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 468, p. 223-237
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__223_0>

Séminaire BOURBAKI 468-01
27e année, 1974/75, n° 468 Juin 1975

RIGIDITÉ FORTE DES ESPACES RIEMANNIENS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

[d'après G. D. MOSTOW]

par Jean-Louis KOSZUL

1. Rigidités

Soient G un groupe de Lie connexe, Δ un groupe discret et $R(\Delta,G)$ l'espace des isomorphismes de Δ sur des sous-groupes discrets co-compacts de G (un sous-groupe L de G est dit co-compact si G/L est compact). Le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ opère dans $R(\Delta,G)$. Si les trajectoires de $\mathrm{Aut}(G)$ dans $R(\Delta,G)$ sont ouvertes, on dit qu'il y a rigidité ; si $\mathrm{Aut}(G)$ est transitif dans $R(\Delta,G)$, il y a rigidité forte. On sait (A. Selberg [12], A. Weil [14]) qu'il y a rigidité notamment lorsque G vérifie la condition :

(*) G est semi-simple, de centre trivial, sans composante simple compacte et sans composante simple isomorphe à $PSL(2,\mathbf{R})$.

En 1967, Mostow a démontré qu'il y a rigidité forte lorsque $G = PSO(n,1)$ (cf. [5]). Sa démonstration contenait déjà l'essentiel des idées qui l'ont conduit au résultat faisant l'objet de cet exposé : la rigidité forte lorsque G vérifie la condition (*) ([7], [8]).

En 1949, Malcev avait montré qu'il y a rigidité forte lorsque G est un groupe nilpotent simplement connexe ; il avait de plus prouvé que si $R(\Delta,G) \neq \emptyset$, le groupe nilpotent G est déterminé par Δ. La même circonstance se produit dans le cas des groupes vérifiant la condition (*). Le résultat de Mostow s'énonce alors :

THÉORÈME R. F. (Mostow [8]).– *Soient G et G' deux groupes de Lie semi-simples connexes de centres triviaux, sans composantes simples compactes et sans composantes simples isomorphes à $PSL(2,\mathbf{R})$. Soient Γ un sous-groupe discret co-compact de G et θ un isomorphisme de Γ sur un sous-groupe discret co-compact Γ' de G'. Alors θ est la restriction à Γ d'un isomorphisme de G sur G'.*

Au lieu de supposer qu'il n'existe pas de composante simple isomorphe à $PSL(2,\mathbf{R})$, on peut se contenter de supposer qu'il n'existe pas de telle composante qui soit fermée modulo Γ (cf. n° 6).

A côté de $R(\Delta,G)$, on peut envisager l'ensemble $L(\Delta,G)$ des isomorphismes de Δ sur des sous-groupes discrets L de G tels que G/L soit de mesure invariante finie. Cet ensemble contient les isomorphismes de Δ sur un sous-groupe arithmétique de G . A. Borel et M. S. Raghunathan ont montré que si G vérifie la condition (*) et si λ est un isomorphisme de Δ sur un sous-groupe arithmétique de G , la trajectoire de λ est un ouvert de $L(\Delta,G)$. En fait, le Théorème R. F. reste vrai si l'on suppose seulement G/Γ et G'/Γ' de mesure finie. Si G et G' sont de $\mathbf{R}$-rang 1 (cf. n° 2), la démonstration est essentiellement la même que dans le cas de sous-groupes co-compacts (G. Prasad [10]). Pour des groupes de $\mathbf{R}$-rang > 1 , les méthodes sont différentes (G. A. Margulis [2] et M. S. Raghunathan). On trouvera dans [9] un exposé détaillé de l'état de la question.

Si G est un groupe de Lie semi-simple n'ayant pas de sous-groupe distingué compact non trivial et si K est un sous-groupe compact maximal de G , l'espace homogène $X = G/K$ admet une métrique riemannienne invariante canonique et G s'identifie à la composante connexe neutre du groupe des isométries de X . L'espace X est riemannien symétrique, de courbure négative, sans composante euclidienne. Il est homéomorphe à un espace numérique.

Soit Γ un sous-groupe discret co-compact de G . Si Γ est sans torsion, Γ opère librement dans X . L'espace $\Gamma\backslash X$ est une variété riemannienne compacte localement symétrique, de courbure négative et sans composante locale euclidienne. Toutes les variétés riemanniennes compactes localement symétriques ayant ces propriétés s'obtiennent ainsi. En envisageant les choses sous cet angle, la rigidité concerne la structure d'espace localement symétrique et le Théorème R. F. se traduit comme suit :

COROLLAIRE ([8]).- <u>Soient</u> M <u>et</u> M' <u>deux espaces riemanniens compacts localement symétriques de courbure négative</u>, <u>sans composante locale de dimension</u> ≤ 2 . <u>Si les groupes fondamentaux de</u> M <u>et de</u> M' <u>sont isomorphes</u>, <u>il existe un difféomorphisme de</u> M <u>sur</u> M' <u>compatible avec les symétries locales</u>.

L'interprétation de G comme composante connexe neutre du groupe des isométries de l'espace riemannien symétrique X joue un rôle essentiel dans la méthode de Mostow.

2. Sous-groupes abéliens libres de Γ et $\mathbf{R}$-rang de G

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial et $\mathfrak{g}$ désigne son algèbre de Lie. On identifiera G au sous-groupe $Ad(G)$ de $GL(\mathfrak{g})$ et on notera $\underline{G}$ le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(\mathfrak{g})$ contenant $Ad(G)$. Le groupe G est alors identifié à la composante connexe neutre de $\underline{G}_{\mathbf{R}}$. Un élément $s \in G$ est dit polaire si $ad(s)$ est diagonalisable et n'a que des valeurs propres > 0 . Un sous-groupe $A \subset G$ est dit polaire s'il est abélien, connexe, et si tous ses éléments sont polaires. Les sous-groupes polaires sont les sous-groupes de la forme $\exp(\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ formée d'éléments a tels que $ad(a)$ soit diagonalisable. On sait que les sous-groupes polaires maximaux sont conjugués dans G . Leur dimension est le $\mathbf{R}$-rang de G . Les sous-groupes polaires maximaux sont les composantes connexes neutres des $\underline{T}_{\mathbf{R}}$ où $\underline{T}$ est un tore déployé sur $\mathbf{R}$ maximal de $\underline{G}$. Pour toute partie $S \subset G$, on note $N(S)$ le normalisateur de S dans G . Si A est un sous-groupe polaire maximal, $N(A)$ est produit direct de A et de son sous-groupe compact maximal. Rappelons enfin que le centralisateur $Z(A)$ de A est d'indice fini dans $N(A)$.

Une première étape dans la démonstration du Théorème R. F. consiste à prouver que θ définit un homéomorphisme de l'espace des sous-groupes polaires maximaux de G sur l'espace des sous-groupes polaires maximaux de G' . Pour cela on met en correspondance certains sous-groupes polaires maximaux de G avec des sous-groupes abéliens libres de Γ .

2.1 Lemme.- *Soient Γ un sous-groupe discret de G et A un sous-groupe polaire maximal de G tel que $N(A)/N(A) \cap \Gamma$ soit compact. Alors $N(A) \cap \Gamma$ contient des sous-groupes abéliens libres d'indice fini, de rang égal au $\mathbf{R}$-rang de G .*

En effet, la projection $N(A) \to A$ a un noyau compact et applique donc $N(A) \cap \Gamma$ sur un sous-groupe discret co-compact de A .

2.2 Lemme.- *Soient r le $\mathbf{R}$-rang de G et Δ un sous-groupe discret abé-*

lien libre de rang ℓ dans G dont tous les éléments sont semi-simples. On a $\ell \leq r$. Si $\ell = r$, il existe un sous-groupe polaire maximal A et un seul tel que $\Delta \subset N(A)$; le quotient $N(A)/\Delta$ est compact.

Soit en effet $\underline{D}$ le plus petit sous-groupe algébrique de $\underline{G}$ contenant Δ . Tous les éléments de $\underline{D}$ sont semi-simples. Son intersection avec G est donc produit direct d'un sous-groupe polaire A et d'un sous-groupe abélien compact. On a $\ell \leq \dim A \leq r$. Si $\ell = r$, alors A est un sous-groupe polaire maximal et $\Delta \subset N(A)$. Si A' est un sous-groupe polaire maximal tel que $\Delta \subset N(A')$, alors $A \subset N(A')$, ce qui entraîne $A = A'$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G . Dans l'espace homogène $\mathfrak{A}(G)$ formé par les sous-groupes polaires maximaux de G , soit $\mathfrak{A}_\Gamma(G)$ l'ensemble des sous-groupes A tels que $N(A)/N(A) \cap \Gamma$ soit compact.

2.3 THÉORÈME ([8]).- Si Γ est co-compact, $\mathfrak{A}_\Gamma(G)$ est dense dans $\mathfrak{A}(G)$.

La démonstration repose sur l'existence d'éléments R-réguliers dans Γ . Rappelons qu'un élément $s \in G$ est R-régulier si, quel que soit $h \in G$, la multiplicité de 1 comme valeur propre de $\mathrm{ad}(s)$ est au plus égale à la multiplicité de 1 comme valeur propre de $\mathrm{ad}(h)$. Si s est R-régulier, $Z(s)$ contient un seul sous-groupe polaire maximal A et $Z(s)$ est produit direct de A et d'un sous-groupe compact. On a $Z(s) \subset Z(A)$ et $Z(A)/Z(s)$ est compact. Puisque Γ est co-compact, si $s \in \Gamma$, alors $Z(s)/Z(s) \cap \Gamma$ est compact (Selberg [12]). Il en résulte que $Z(A)/Z(A) \cap \Gamma$ est compact, donc que $N(A)/N(A) \cap \Gamma$ est compact. Pour montrer que $\mathfrak{A}_\Gamma(G)$ est dense dans $\mathfrak{A}(G)$, on est ainsi conduit à prouver que, si $A \in \mathfrak{A}(G)$ et si W est un voisinage de l'élément neutre $e \in G$, il existe un $w \in W$ tel que $wZ(A)w^{-1} \cap \Gamma$ contienne un élément R-régulier. Puisque G/Γ est de mesure finie, pour tout voisinage U de e et tout $s \in G$, il existe un entier $n > 0$ tel que $Us^nU \cap \Gamma \neq \emptyset$ (Selberg [12]). On en déduit qu'il existe un élément R-régulier $a \in A$ tel que $UaU \cap \Gamma \neq \emptyset$. Un Lemme de Mostow permet de montrer que l'on peut choisir U et $a \in A$ de sorte que tous les éléments de UaU soient réguliers et de la forme whw^{-1} , avec $h \in Z(A)$ et $w \in W$ (cf. [6] et [11]).

2.4 COROLLAIRE.- Si Γ est co-compact, le R-rang de G est la borne supérieure des rangs des sous-groupes abéliens libres de Γ .

L'existence de sous-groupes abéliens libres de rang égal au R-rang de G résulte de 2.1. On sait d'autre part que si Γ est co-compact, tous les éléments de Γ sont semi-simples (Selberg [12]). D'après le Lemme 2.2, tout sous-groupe abélien libre de Γ est donc de rang au plus égal au R-rang de G .

Ce corollaire montre que deux groupes de Lie semi-simples connexes ayant des centres finis et contenant des sous-groupes discrets co-compacts isomorphes ont même R-rang (J. A. Wolf).

Si l'on suppose seulement que G/Γ est de mesure finie, l'ensemble $\mathcal{A}_\Gamma(G)$ est encore dense dans $\mathcal{A}(G)$ (Mostow [8]). Pour le voir, on travaille non plus avec des éléments R-réguliers, mais avec des éléments hyper-R-réguliers étudiés par G. Prasad et M. S. Raghunathan ([11]). L'élément $s \in G$ est dit hyper-R-régulier si s appartient à l'ouvert des éléments $h \in G$ pour lesquels la multiplicité de 1 comme valeur propre de $\Lambda\, \mathrm{ad}(h)$ est minimale et si $\Lambda\, \mathrm{ad}(s) + 1$ est inversible. Si $s \in G$ est hyper-R-régulier, alors $Z(s)/Z(s) \cap \Gamma$ est compact ; on en déduit que le R-rang de G est la borne supérieure des rangs des sous-groupes abéliens libres de Γ formés d'éléments semi-simples. Mais Γ contient en général des sous-groupes abéliens libres de rang supérieur au R-rang. Prasad et Raghunathan ont montré comment le R-rang de G pouvait encore se lire sur le groupe "abstrait" Γ ([11]).

3. Pseudo-isométries

On suppose dans la suite que G est un groupe semi-simple connexe de centre trivial, sans composante simple compacte. On note r le R-rang de G . On suppose que G est la composante connexe neutre du groupe des isométries d'un espace riemannien symétrique X . Les sous-groupes compacts maximaux de G sont les stabilisateurs des points de X . Pour tout $x \in X$, soit σ_x la symétrie par rapport à x . Les éléments polaires de G sont les transvections, c'est-à-dire les produits de deux symétries. Soit B un sous-groupe polaire de G . L'ensemble des points $x \in X$ tels que $\sigma_x s \sigma_x = s^{-1}$ pour tout $s \in B$ est un sous-ensemble non vide $X_B \subset X$. Pour tout $x \in X_B$, Bx est un <u>sous-espace plat</u> de X , c'est-à-dire une sous-variété totalement géodésique de X sur laquelle la métrique induite est euclidienne. Si A est un sous-groupe polaire maximal de G , A est simplement transitif sur X_A qui est donc un sous-espace plat de dimension r canoniquement associé à A . Le stabilisateur de X_A est

$N(A)$. Les sous-espaces plats associés aux sous-groupes polaires maximaux sont les éléments maximaux de l'ensemble des sous-espaces plats ordonné par inclusion. Le groupe G opère donc transitivement dans l'ensemble des sous-espaces plats maximaux.

Soit Γ un sous-groupe discret de G et soit A un sous-groupe polaire maximal de G . On posera $\Gamma_A = N(A) \cap \Gamma$. Dire que $N(A)/\Gamma_A$ est compact signifie que $\Gamma_A \backslash X_A$ est compact.

Soit G' un second groupe de Lie semi-simple connexe, de centre trivial, sans composante simple compacte. On supposera que G' est la composante connexe neutre du groupe des isométries d'un espace riemannien symétrique X' . Soient Γ (resp. Γ') un sous-groupe discret co-compact sans torsion de G (resp. G') et θ un isomorphisme de Γ sur Γ' . L'espace X (resp. X') est un fibré principal universel de groupe Γ (resp. Γ'). Il existe donc une application continue $\varphi : X \to X'$ qui est <u>θ-équivariante</u> en ce sens que $\varphi(\gamma x) = \theta(\gamma)\varphi(x)$ quels que soient $\gamma \in \Gamma$ et $x \in X$. On peut choisir des structures de complexes simpliciaux finis sur $\Gamma\backslash X$ et $\Gamma'\backslash X'$, et choisir une application φ qui se projette suivant une application simpliciale. Il en résulte qu'il existe une application θ-équivariante $\varphi : X \to X'$ ayant la propriété suivante : si d désigne les distances riemanniennes sur X et sur X' il existe des nombres réels $k > 0$ et $b > 0$ tels que, quels que soient $x , y \in X$,

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq k\, d(x,y)$$
$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \geq k^{-1} d(x,y) \qquad \text{lorsque } d(x,y) \geq b .$$

C'est ce que Mostow appelle une <u>pseudo-isométrie</u> de X dans X' . Le prolongement de φ à des frontières convenables de X et de X' joue un rôle essentiel dans sa méthode.

4. <u>Correspondance entre sous-groupes polaires maximaux de</u> G <u>et de</u> G'

Les hypothèses sont celles du n° 3 ; on suppose choisie une pseudo-isométrie θ-équivariante $\varphi : X \to X'$.

4.1 <u>Lemme</u>.- <u>Quel que soit</u> $A \in \mathfrak{A}_\Gamma(G)$, <u>il existe un sous-groupe</u> $A' \in \mathfrak{A}(G')$ <u>et un seul tel que</u> $\theta(\Gamma_A) \subset N(A')$. <u>On a</u> $A' \in \mathfrak{A}_{\Gamma'}(G')$ <u>et</u> $\theta(\Gamma_A) = \Gamma'_{A'}$.

Puisque $A \in \mathcal{A}_\Gamma(G)$, $N(A)/\Gamma_A$ est compact, donc Γ_A contient un sous-groupe abélien libre Δ de rang $r = \mathbf{R}$-rang de G (2.1). Puisque Γ' est co-compact, tous ses éléments sont semi-simples, donc il existe un sous-groupe polaire maximal $A' \in \mathcal{A}(G')$ et un seul tel que $\theta(\Delta) \subset N(A')$ (2.2). On peut supposer Δ distingué dans Γ_A . Quels que soient $s \in \Gamma_A$ et $h \in \Delta$, on a alors $\theta(h)\theta(s)A'\theta(s^{-1})\theta(h^{-1}) = \theta(s)A'\theta(s^{-1})$, donc $\theta(\Delta) \subset N(\theta(s)A'\theta(s^{-1}))$, ce qui entraîne $\theta(s) \in N(A')$, d'où $\theta(\Gamma_A) \subset \Gamma'_{A'}$. Puisque G et G' ont même $\mathbf{R}$-rang (2.4), on a $A' \subset \mathcal{A}_{\Gamma'}(G')$ d'après 2.2. On montre que $\theta(\Gamma_A) = \Gamma_{A'}$ en appliquant ce qui précède à θ^{-1} .

On notera χ_θ l'application de $\mathcal{A}_\Gamma(G)$ dans $\mathcal{A}_{\Gamma'}(G')$ telle que $A' = \chi_\theta(A)$. Il est évident que χ_θ est θ-équivariante : $\chi_\theta(\gamma A \gamma^{-1}) = \theta(\gamma)\chi_\theta(A)\theta(\gamma)^{-1}$ quels que soient $\gamma \in \Gamma$ et $A \in \mathcal{A}_\Gamma(G)$. On va prolonger χ_θ par continuité à $\mathcal{A}(G)$ et pour cela interpréter géométriquement cette application. Soient X_A (resp. $X'_{A'}$) les sous-espaces plats associés à $A \in \mathcal{A}_\Gamma(G)$ (resp. $A' = \chi_\theta(A)$). Si K est un compact de X_A tel que $\Gamma_A K = X_A$, on a $\varphi(X_A) = \Gamma'_{A'}\varphi(K)$. La distance sur $\mathfrak{X}''$ étant invariante par Γ' , il en résulte que la distance de Hausdorff $hd(\varphi(X_A),X'_{A'})$ est finie. On montre par ailleurs (cf. n° 5) que deux sous-espaces plats maximaux dont la distance de Hausdorff est finie coïncident. La relation $hd(\varphi(X_A),X'_{A'}) < \infty$ détermine donc A' en fonction de A . Mostow montre qu'il existe une constante $v > 0$ telle que $hd(\varphi(X_A),X'_{A'}) < v$ quel que soit $A \in \mathcal{A}_\Gamma(G)$. Un argument de compacité utilisant cette inégalité conduit alors au Lemme suivant :

4.2 <u>Lemme</u>.- <u>Il existe une application continue</u> $\chi_\theta : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G')$ <u>et une seule telle que</u>, <u>si</u> $A \in \mathcal{A}(G)$ <u>et si</u> $A' = \chi_\theta(A)$,

$$hd(\varphi(X_A),X'_{A'}) \leq v \ .$$

En échangeant les rôles de G et de G' on voit que χ_θ est un <u>homéomorphisme</u>.

5. <u>Correspondance entre sous-groupes paraboliques de</u> G <u>et de</u> G'

Les hypothèses et notations sont celles du n° 4. Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie d'un sous-groupe polaire maximal $A \subset G$. On a dans $\mathfrak{a}^*$ un système de racines qui définit dans $\mathfrak{a}$ des chambres et plus généralement des facettes. On appellera facette de A un demi-groupe de la forme $\exp(f)$ où f est une facette de $\mathfrak{a}$. Pour toute facette F de A , on note $P(F)$ le sous-groupe de G formé par les éléments $s \in G$ ayant la propriété suivante : il existe un compact $K \subset G$ tel que $u^{-1}su \in K$ pour tout $u \in F$. C'est l'intersection avec G du $\mathbb{R}$-sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ défini par F . Dans la suite on appelle sous-groupe parabolique de G un sous-groupe de la forme $P(F)$, où F est une facette dans un sous-groupe polaire maximal de G . On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G et $\mathcal{P}_o(G)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques minimaux. Ces derniers sont de la forme $P(F)$ où F est une chambre. Par conjugaison, G opère transitivement dans $\mathcal{P}_o(G)$. L'espace homogène $\mathcal{P}_o(G)$ s'identifie à la trajectoire compacte de G dans une compactification de Satake de X .

Soient A et B deux sous-groupes polaires maximaux de G , E une facette de A et F une facette de B . Soient $x , y \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes : 1) Ex est à distance finie de Fy ;
2) $P(F) \subset P(E)$.

Par suite $P(F) = P(E)$ si et seulement si $dh(Ex,Fy) < \infty$.

5.1 Lemme.- *Soit A un sous-groupe polaire maximal de G et soit F une facette de A . Il existe une facette F' de $\chi_\theta(A)$ et une seule telle que, pour $x \in X$ et $x' \in X'$, $dh(\varphi(Fx),F'x') < \infty$.*

L'unicité est facile. L'existence de F' est sensiblement plus délicate. L'idée est de choisir un sous-groupe polaire maximal B tel que les sous-groupes paraboliques contenant $A \cup B$ soient les sous-groupes paraboliques contenant $P(F)$. On montre ensuite que les sous-groupes paraboliques de G' contenant $\chi_\theta(A) \cup \chi_\theta(B)$ sont les sous-groupes contenant un parabolique $P(F')$ où F' est une facette de A .

On voit facilement que $P(F')$ ne dépend que de $P(F)$. Le Lemme 5.1 permet donc de définir une application $\eta : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G')$ qui a les propriétés suivantes :

$(\eta,1)$ si $P \supset A$, alors $\eta(P) \supset \chi_\theta(A)$,

$(\eta,2)$ si $P , Q \in \mathcal{P}(G)$ et si $P \subset Q$, alors $\eta(P) \subset \eta(Q)$.

En échangeant les rôles de G et de G' , on constate que

$(\eta,3)$ η est bijective.

Ainsi η est un isomorphisme de l'appartement associé à G sur l'appartement associé à G' . Puisque φ est θ-équivariante,

$(\eta,4)$ $\eta(\gamma P\gamma^{-1}) = \theta(\gamma)\eta(P)\theta(\gamma)^{-1}$ quels que soient $P \in \mathcal{A}(G)$ et $\gamma \in \Gamma$.

Les voisinages d'un parabolique minimal $P(F^{o})$ s'obtiennent en prenant les paraboliques $P(F)$, où F est une chambre voisine de F^{o} . Par suite

$(\eta,5)$ η induit un homéomorphisme de $\mathcal{P}_o(G)$ sur $\mathcal{P}_o(G')$.

Notons τ (resp. τ') l'action de G (resp. G') sur $\mathcal{P}_o(G)$ (resp. $\mathcal{P}_o(G')$). Puisque G et G' n'ont pas de sous-groupe compact distingué non trivial, τ et τ' sont fidèles.

5.2 Lemme.- *Si G et G' n'ont pas de composante simple de $\mathbf{R}$-rang 1 , il existe un isomorphisme Θ de G sur G' et un seul tel que $\eta \circ \tau(s) \circ \eta^{-1} = \tau'(\Theta(s))$ pour tout $s \in G$. L'isomorphisme Θ prolonge θ .*

L'existence de Θ est donnée par un Théorème de J. Tits sur les immeubles (cf. [13], p. 81 ; il faut à vrai dire passer du cas absolument simple traité par Tits au cas semi-simple qui est ici en un jeu, cf. [8]). L'unicité est évidente. D'après $(\eta,4)$, on a $\Theta(\gamma) = \theta(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. La continuité de Θ résulte de $(\eta,5)$.

5.3 *Démonstration du Théorème R. F. dans le cas où G et G' n'ont pas de composante simple de $\mathbf{R}$-rang 1 .*

Le cas où Γ est sans torsion est couvert par le Lemme 5.2. Le cas général s'en déduit par l'argument classique suivant (valable sans hypothèse sur les rangs). D'après Selberg, Γ étant de type fini et linéaire, il existe un sous-groupe sans torsion Γ_1 , distingué et d'indice fini dans Γ (cf. [12]). Soit Θ l'isomorphisme de G sur G' ayant même restriction que θ à Γ_1 . Quels que soient $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma_1 \in \Gamma_1$, on a

$\Theta(\gamma)\theta(\gamma_1)\Theta(\gamma)^{-1} = \Theta(\gamma\gamma_1\gamma^{-1}) = \theta(\gamma\gamma_1\gamma^{-1}) = \theta(\gamma)\theta(\gamma_1)\theta(\gamma)^{-1}$. Par suite $\theta(\gamma)^{-1}\Theta(\gamma)$ centralise $\theta(\Gamma_1)$. Puisque G'/Γ' est de mesure finie, $\theta(\Gamma_1)$ est dense dans G' pour la topologie de Zariski (Borel [1]). Par conséquent

$\theta(\gamma)^{-1}\Theta(\gamma)$ appartient au centre de G' qui est supposé trivial. Ceci prouve que Θ prolonge θ .

6. Réduction au cas des groupes simples

Les hypothèses sont celles du n° 4. Soit $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ la décomposition de G en produits de groupes simples. On déduit des propriétés de la bijection $\eta : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G')$ qu'il existe une décomposition de G' en produits de groupes simples $G'_1, \ldots, G'_n$ et, pour tout i , un homéomorphisme η_i de $\mathcal{P}_o(G_i)$ sur $\mathcal{P}_o(G'_i)$ tel que $\eta(pr_i^{-1}P) = pr_i^{-1}(\eta_i(P))$ pour tout $P \in \mathcal{P}_o(G_i)$. Soient $\Gamma_i = pr_i(\Gamma)$ et $\Gamma'_i = pr_i(\Gamma')$. Comme η est θ-équivariant, $pr_i \circ \theta$ se factorise en $\theta_i \circ pr_i$ où θ_i est un isomorphisme de Γ_i sur Γ'_i . Deux cas peuvent se produire :

1) Γ_i est dense dans G_i . Dans ce cas, on montre que θ_i se prolonge par continuité en un isomorphisme de G_i sur G'_i .

2) Γ_i n'est pas dense dans G_i . On montre que Γ_i et Γ'_i sont alors des sous-groupes co-compacts discrets (cf. [8]).

Le problème du prolongement de θ est ainsi ramené au cas où G et G' sont simples. Compte tenu de 2.4 et de 5.3, il reste donc à traiter le cas où G et G' sont simples de $\mathbf{R}$-rang 1 .

7. Cas des groupes simples de $\mathbf{R}$-rang 1

En plus des hypothèses du n° 4, on suppose que G et G' sont de $\mathbf{R}$-rang 1 . Dans une première étape, on prouve que si $G = G'$ et si l'homéomorphisme $\eta : \mathcal{P}_o(G) \to \mathcal{P}_o(G)$ a certaines propriétés de différentiabilité, alors $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ est la restriction à Γ d'un automorphisme de G .

Soient A un sous-groupe polaire maximal de G , $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie et $\{\alpha\}$ une base du système de racines $\mathcal{R} \subset \mathfrak{a}^*$. On a $\mathcal{R} = \{-\alpha, \alpha\}$ ou $\mathcal{R} = \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\}$. Notons C la chambre de A correspondant à $\alpha > 0$. On pose $p_\infty = P(C)$ et $p = P(-C)$. Soit $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{2\alpha}$) le sous-espace propre relatif à la racine α (resp. 2α). Si L est une droite vectorielle de $\mathfrak{g}_\alpha$, $\overline{\exp(L)p} = \exp(L)p \cup p_\infty$. Les courbes $\overline{\exp(L)p}$ ainsi que celles qui s'en déduisent par l'action de G sont appelées les <u>cercles</u> de $\mathcal{P}_o(G)$. Si $G = PSL(2,\mathbf{R})$, $\mathcal{P}_o(G)$ se réduit à un cercle. Dans les autres cas, $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$.

Pour tout cercle S de $\mathcal{P}_o = \mathcal{P}_o(G)$, on note S^+ l'ensemble des points de S en lesquels la restriction de η à S est dérivable et a une dérivée non nulle. Dans la suite, on suppose vérifiée la condition :

(7.1) Pour presque tout couple q , $q' \in \mathcal{P}_o$, S^+ est de mesure > 0 pour presque tout cercle S passant par q et q' .

Comme G/Γ est de mesure finie, on sait que pour presque tout $s \in G$, $sCs^{-1}\Gamma$ est dense dans G (cf. Mautner [3]). Il en résulte que l'on peut choisir A de sorte que, pour presque toute droite vectorielle $L \subset \mathfrak{g}_\alpha$:

(i) $\eta \circ \exp|L$ est dérivable et a une dérivée $\neq 0$ sur un ensemble de mesure > 0 ,

(ii) $\exp(a)\, C \exp(-a)\Gamma$ est dense dans G pour presque tout $a \in L$.

Le groupe G opère de manière doublement transitive dans $\mathcal{P}_o$. Par suite, quitte à composer θ avec un automorphisme intérieur de G , on peut de plus supposer que A a été choisi en sorte que $\eta(p) = p$ et $\eta(p_\infty) = p_\infty$. L'application $a \mapsto \exp(a)p$ est un homéomorphisme de $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ sur $\mathcal{P}_o - p$. Soit Ψ l'homéomorphisme de $\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{n}$ défini par $\exp(\Psi(a))p = \eta(\exp(a)p)$. Puisque $\eta(p) = p$, on a $\Psi(0) = 0$.

7.2 <u>Lemme</u>.- <u>Si</u> $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$,

a) Ψ <u>est un automorphisme de l'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{n}$ <u>laissant stable</u> $\mathfrak{g}_\alpha$,

b) <u>quel que soit</u> $s \in Z(A)$, <u>il existe un</u> $s' \in Z(A)$ <u>tel que</u> $\mathrm{ad}(s') = \Psi \circ \mathrm{ad}(s) \circ \Psi^{-1}$ <u>sur</u> $\mathfrak{n}$.

La démonstration est longue et délicate. Le point crucial consiste à prouver que Ψ est linéaire sur toute droite vectorielle $L \subset \mathfrak{g}_\alpha$. Puisque $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$, il suffit de traiter le cas où L satisfait aux conditions (i) et (ii). On commence par montrer que si C_o est une chambre de G telle que $\overline{C_o\Gamma} = G$ et si C'_o est la chambre déduite de C_o par (5.1), il existe un élément m' dans le sous-groupe compact maximal du centralisateur de C'_o

et des suites $s_n \in C_o$, $s'_n \in C'_o$ tendant vers l'infini telles que

$$(7.3) \qquad \eta(x) = m' \lim_{n\to\infty} s'_n \, \eta(s_n^{-1}x) ,$$

pour tout $x \in \mathcal{P}_o$. On choisit alors un élément $a \in L$, $a \neq 0$, tel que $\exp(a)\, C \exp(-a)\Gamma$ soit dense dans G et on applique cette formule à $C_o = \exp(a)\, C \exp(-a)$. Pour passer de (7.3) à une relation portant sur Ψ , il est commode de transporter sur $\mathfrak{n}$ la loi de groupe de $\exp(\mathfrak{n})$. Si $x , y \in \mathfrak{n}$, on a $\exp(x)\exp(y) = \exp(x.y)$ où $x.y = x + y + \frac{1}{2}[x,y]$. On pose $\Psi(a.y) = \Psi(a).(\Psi^a_\alpha(y) + \Psi^a_{2\alpha}(y))$, où Ψ^a_α (resp. $\Psi^a_{2\alpha}$) est une application de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{2\alpha}$). Cela étant, (7.3) se traduit comme suit :

Il existe un élément m dans le sous-groupe compact maximal du centralisateur de C et des suites t_n , t'_n de nombres réels > 0 tendant vers 0 tels que

$$\Psi(a+y) = \Psi(a.y) = \Psi(a).(\mathrm{ad}(m) \lim_{n\to\infty} (t_n'^{-1}\Psi^a_\alpha(t_n y) + t_n'^{-2}\Psi^a_{2\alpha}(t_n y)))$$

pour tout $y \in \mathbf{R}a$. Si l'on a supposé a choisi en sorte que $\Psi(ta)$ soit dérivable et ait une dérivée $\neq 0$ en $t = 1$, alors $\Psi^a_\alpha(ty)$ et $\Psi^a_{2\alpha}(ty)$ sont dérivables en $t = 0$ et on déduit facilement de la relation précédente que Ψ est linéaire sur $\mathbf{R}a = L$.

7.4 THÉORÈME ([8]).- Si la condition (7.1) est vérifiée, θ se prolonge en un automorphisme de G .

D'après 7.3, quels que soient $x , y \in \mathfrak{n}$, on a

$$\eta(\exp(x)\exp(y)p) = \exp(\Psi(x.y))p = \exp(\Psi(x).\Psi(y))p = \exp(\Psi(x))\exp(\Psi(y))p = \exp(\Psi(x))\eta \exp(y)p \ .$$

Il en résulte que $\eta(\exp(x)q) = \exp(\Psi(x))\eta(q)$ pour tout $q \in \mathcal{P}_o$. Notant τ l'action de G dans $\mathcal{P}_o$, on a donc $\eta \circ \tau(\exp(\mathfrak{n})) \circ \eta^{-1} = \tau(\exp(\mathfrak{n}))$. D'après 7.3 b), $\eta \circ \tau(Z(A)) \circ \eta^{-1} = \tau(Z(A))$. Or $P(C) = Z(A)\exp(\mathfrak{n})$. Par conséquent $\eta \circ \tau(P(C)) \circ \eta^{-1} = \tau(P(C))$. Puisque η est θ-équivariante, on a de même $\eta \circ \tau(\Gamma) \circ \tau^{-1} = \tau(\Gamma')$. D'après le résultat de Mautner cité plus haut (cf. [3]) , $P(C)\Gamma$ est dense dans G . On voit donc que $\eta \circ \tau(G) \circ \eta^{-1} = \tau(G)$, ce qui prouve que θ se prolonge en un automorphisme Θ de G tel que $\eta \circ \tau(s) \circ \eta^{-1} = \tau(\Theta(s))$ pour tout $s \in G$.

Dès 1966, Mostow avait démontré, sans restriction sur les rangs, que si η est différentiable, θ se prolonge en un automorphisme de G (cf. [4]).

Pour achever la démonstration du Théorème R. F., il reste à prouver que si G et G' sont de $\mathbf{R}$-rang 1 et non isomorphes à $PSL(2,\mathbf{R})$, alors G est isomorphe à G' et $\eta : \mathcal{P}_o(G) \to \mathcal{P}_o(G')$ vérifie 7.1. Si G est de $\mathbf{R}$-rang 1 , X est un espace hyperbolique H^n_K où $K = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ ou $\mathbf{O}$, n étant égal à 2 si K est l'algèbre $\mathbf{O}$ des octonions. On peut réaliser H^n_K comme boule unité de K^n munie d'une métrique riemannienne convenable. L'espace $\mathcal{P}_o(G)$ s'identifie alors à la sphère frontière de X . Les boules de centre $x \in X$ pour la métrique hyperbolique sont des ellipsoïdes de K^n . Lorsque x tend vers un point frontière x^o , ces ellipsoïdes s'aplatissent dans les directions μx^o où μ est un élément imaginaire de K (pour $K \neq \mathbf{R}$). Mostow construit sur $\bar{X}^2$ une fonction continue qui, au voisinage de la diagonale de X^2 , est proche de la métrique hyperbolique et dont la restriction à la frontière $\mathcal{P}_o(G)$ est une "pseudo-distance" qui pour $K \neq \mathbf{R}$ n'est pas une distance. Cependant, sa restriction aux cercles de $\mathcal{P}_o(G)$ est une distance. Mostow montre que vis à vis des pseudo-distances sur $\mathcal{P}_o(G)$ et $\mathcal{P}_o(G')$, l'application η a des propriétés de quasi-conformité venant du caractère pseudo-isométrique de $\varphi : X \to X'$. Ces propriétés permettent de prouver que η est absolument continue sur presque tout cercle de $\mathcal{P}_o(G)$ et par suite que la condition 7.1 est vérifiée si $G \neq PSL(2,\mathbf{R})$. En utilisant encore les propriétés de η vis à vis des pseudo-distances, on montre que si $X = H^n_K$ et $X' = H^{n'}_{K'}$, alors $\dim_{\mathbf{R}} K = \dim_{\mathbf{R}} K'$, donc $K = K'$. Puisque

$$n(\dim_{\mathbf{R}} K - 1) = \dim \mathcal{P}_o(G) = \dim \mathcal{P}_o(G') = n'(\dim_{\mathbf{R}} K - 1) ,$$

on a donc $n = n'$, ce qui prouve que G est isomorphe à G' .

Tout l'argument s'applique dans le cas où G/Γ et G'/Γ' sont seulement supposés de mesure finie à condition de savoir qu'il existe des pseudo-isométries $\varphi : X \to X'$ et $\varphi' : X' \to X$ respectivement θ et θ^{-1}-équivariantes. G. Prasad a prouvé l'existence de telles applications lorsque G et G' sont de $\mathbb{R}$-rang 1 (cf. [10]). Il y a cependant de sérieuses difficultés supplémentaires dans la démonstration du Lemme 4.1 où l'on doit prouver a priori que l'image par θ d'un élément semi-simple de Γ est un élément semi-simple de Γ' (cf. [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, Ann. of Math., 72 (1960), 179-188.

[2] G.A. MARGULIS - Non uniform lattices in semi-simple algebraic groups, Proc. Soviet Summer School 1970 (Budapest).

[3] F.I. MAUTNER - Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, Ann. of Math., 65 (1967), 416-431.

[4] G.D. MOSTOW - On the conjugacy of subgroups of semi-simple groups, Proc. of Symposia in Pure Math., 9 (1966), 413-419.

[5] G.D. MOSTOW - Quasi-conformal mappings in n-space and rigidity of hyperbolic space forms, Publ. I.H.E.S., 34 (1967), 53-104.

[6] G.D. MOSTOW - Intersection of discrete sub-groups with Cartan subgroups, J. of the Indian Math. Soc., 34 (1970), 203-214.

[7] G.D. MOSTOW - The rigidity of locally symmetric spaces, Proc. International Congress of Math. 1970, vol. 2, 187-197.

[8] G.D. MOSTOW - Strong rigidity of locally symmetric spaces, Ann. of Math. Studies, 78 (1973).

[9] G.D. MOSTOW - Discrete subgroups of Lie groups, Adv. in Math., 15 (1975), 112-123.

[10] G. PRASAD - Strong rigidity of $\mathbb{Q}$-rank 1 lattices, Inventiones Math., 21 (1973), 255-286.

[11] G. PRASAD - M. S. RAGHUNATHAN - Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups, Ann. of Math., 96 (1972), 296-317.

[12] A. SELBERG - On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Int. Coll. on Function Theory, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1960, 147-164.

[13] J. TITS - Lectures on buildings of spherical type and finite B.N.pairs, Lecture Notes in Math. n° 386, 1974, Springer.

[14] A. WEIL - On discrete subgroups of Lie groups, Ann. of Math., 72 (1960), 364-384, et 75 (1962), 578-602.