Y. COLIN DE VERDIÈRE

Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 439, p. 58-68

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__58_0>

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 439

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR SUR UNE VARIÉTÉ COMPACTE

[d'après P. GILKEY]

par Y. COLIN DE VERDIÈRE

Soient M une variété riemannienne compacte sans bord, C^∞ et de dimension d, Δ le laplacien sur les fonctions $M \to \mathbb{R}$ qui est un opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0 (par rapport à l'élément de volume riemannien v_M). Δ admet des valeurs propres $\lambda_o = 0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ (chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité). Minakshisundaram et Pleijel [MP] ont montré l'existence d'un développement asymptotique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t) \underset{t \to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-d/2} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell t^\ell\right) \qquad \text{avec} \quad a_o = \mathrm{vol}(M) .$$

La démonstration consiste à étudier l'équation de la chaleur

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 \\ u\restriction_{t=0} = f . \end{cases}$$

Si $e(t,x,y)$ désigne la solution fondamentale de (H), i.e. $u(t,x) = \int_M e(t,x,y) f(y) v_M(y)$, on construit des paramétrix $p_k(t,x,y)$ qui vérifient $|e(t,x,y) - p_k(t,x,y)| \leq C t^{k+1}$, avec p_k de la forme :

$$p_k(t,x,y) = (4\pi t)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right) . (U_o(x,y) + \ldots + t^k U_k(x,y)).$$

Il n'est pas difficile de voir que si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base orthonormée de fonctions propres, on a : $e(t,x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n)\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, on en déduit le développement asymptotique cherché sous la forme :

$$\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n) - (4\pi t)^{-d/2} \cdot \Big(\sum_{\ell=0}^{k} t^{\ell} \int_M U_\ell(x,x) v_M(x)\Big| \leq C t^{k+1} .$$

Mac-Kean et Singer [MS] ont repris cette question et calculé les coefficients a_1 et a_2 en utilisant des considérations algébriques a priori et en identifiant les coefficients à l'aide de cas particuliers. Ils montrent que les a_ℓ sont de la forme $a_\ell = \int_M P_\ell(R) v_M$, où P_ℓ sont des polynômes universels de la courbure et de ses dérivées covariantes. En coordonnées locales les P_ℓ peuvent donc s'écrire : $P_\ell(R)v_M = |\text{dét } g^{ij}|^{-\frac{1}{2}} . Q_\ell((\text{dét } g^{ij})^{-1}, D^\alpha g^{ij})|dx|$, où les Q_ℓ sont des polynômes universels. Notamment, on a :

$$P_1(R) = \frac{1}{6}\tau \quad ; \quad P_2(R) = \frac{1}{360}(2|R|^2 - 2|\rho|^2 + 5\tau^2) .$$

[Pour des démonstrations détaillées voir [BGM].]

Ces développements asymptotiques existent pour les opérateurs elliptiques auto-adjoints ≥ 0 , A opérant sur les sections d'un fibré hermitien. Cela résulte essentiellement des travaux de Seeley [S_1] et [S_2] et se fait à l'aide de techniques d'opérateurs pseudo-différentiels qui permettent de construire dans ce cas général des paramétrix jouant le rôle des p_k . Nous résumons ici la présentation que donne Gilkey [G] de cette démonstration, ainsi que certaines propriétés générales des coefficients.

I. Exposé des résultats et exemples

Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes de dimension p sur une variété compacte M de dimension d (tout est C^∞). Un (E,F)-opérateur différentiel A d'ordre m s'écrit au moyen de trivialisation de E et F au-dessus d'une carte U de M : $Af(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) D^\alpha f(x)$, $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^p)$;

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_d})^{\alpha_d}$ et $A_\alpha(x) \in L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$. Le symbole d'ordre k de A dans ces cartes est défini par $\sigma_k(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x)\xi^\alpha$ $(\xi \in \mathbb{R}^d)$. Le symbole principal σ_m a une interprétation intrinsèque à l'aide du fibré cotangent : $\sigma_m(x,\xi)$ s'interprète comme un élément de $L(E_x, F_x)$ que l'on peut décrire de la manière suivante si $g \in C^\infty(E)$, avec $g(x_0) = e$ et $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ avec $df(x_0) = \xi_0$, on a

$$\lim_{t\to\infty} (t^{-m} \cdot e^{-itf(x_0)} \cdot A(e^{itf(x)} g(x))(x_0) = \sigma_m(x_0, \xi_0)(e) .$$

<u>Exemple</u>.- Pour le laplacien Δ , on a $\sigma_2(\Delta)(x,\xi) = \|\xi\|^2$.

L'opérateur A est dit elliptique si $\forall (x,\xi) \in T^*(X) \setminus 0$, $\sigma_m(x,\xi) \in GL(E_x, F_x)$. On supposera ici E et F muni de structures hermitiennes $\langle\ ,\ \rangle_{E_x}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{F_x}$, et M d'une densité $v(x)$. On a alors des produits scalaires globaux pour les sections de E : $(f,g)_E = \int_M \langle f(x), g(x)\rangle_{E_x} v(x)$ et de même pour F . Soit A un (E,E)-opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0 (i.e. $(Af,g)_E = (f,Ag)_E$ et $(Af,f)_E \geq 0$), il admet une résolution spectrale $(\lambda_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ et φ_n un système orthonormé complet de sections propres (i.e. $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$). La solution f de l'équation de la chaleur (H_A) associée à A :

$$(H_A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + Af = 0 \\ f\restriction_{t=0} = g \end{cases} \qquad \text{(i.e. } f = \exp(-tA).g \text{)}$$

peut s'écrire $f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n)(g,\varphi_n)_E\varphi_n(x)$, ou encore

$$f(t,x) = \int_M E_A(t,x,y)g(y)v(y)$$

avec $E_A(t,x,y)\eta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t).(\eta,\varphi_n(y))_{E_y}.\varphi_n(x) \quad (\eta \in E_y)$ et donc :

$$Tr_x(E_A(t,x,x)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)\|\varphi_n(x)\|^2 .$$

Notre but est de montrer comment on peut trouver le comportement asymptotique quand $t \to 0^+$ de la mesure $Tr_x(E_A(t,x,x)).v(x)$ et par suite de sa masse totale $h_A(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-\lambda_n t)$.

Exemple 1.- E est le fibré $\Lambda^k(T^*M)$ sur M , A est le laplacien sur les k-formes. Le développement asymptotique a été trouvé par Gaffney [GA] et précisé par MacKean et Singer [MS], puis par Patodi [P] qui a montré que les relations faciles :

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_\ell^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \frac{d}{2} \\ (4\pi)^{d/2} \chi(M) & \text{si } \ell = \frac{d}{2} \end{cases}$$

proviennent de relations locales déjà vérifiées par les $U_i^k(x,x)$; ce qui donne une expression de $\chi(M)$ sous forme d'une intégrale qui généralise la formule de Gauss-Bonnet en dimension 2 .

Exemple 2.- D un (E,F)-opérateur elliptique, $A_1 = D^*D$, $A_2 = DD^*$ sont des opérateurs elliptiques auto-adjoints ≥ 0 sur E et F respectivement. Posant $\Gamma_\lambda(A_i) = \{f | A_i f = \lambda f\}$; pour $\lambda \neq 0$, D est un isomorphisme de $\Gamma_\lambda(A_1)$ sur $\Gamma_\lambda(A_2)$, pour $\lambda = 0$, on a $\Gamma_0(A_1) = \mathrm{Ker}(D)$, $\Gamma_0(A_2) = \mathrm{Ker}(D^*)$. On a donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{Indice}(D) = \dim(\Gamma_0(A_1)) - \dim(\Gamma_0(A_2))$ et $h_{A_1}(t) - h_{A_2}(t) = \mathrm{Indice}(D)$.
Le comportement asymptotique des h_{A_i} permet donc théoriquement un calcul de l'indice de D . L'idée de Gilkey a été de trouver des propriétés algébriques de ces coefficients pour pouvoir ensuite les calculer dans le cas d'opérateurs géométriques.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THÉORÈME.- Sous les hypothèses précédentes (A un (E,E)-opérateur elliptique auto-adjoint ≥ 0) :

(i) La série $h_A(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-t\lambda_n)$ converge pour $t \in R_+^*$ et admet quand $t \to 0^+$ un développement asymptotique qui s'écrit

$$h_A(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{\frac{k-d}{m}} . U_k(A) .$$

(ii) $U_k(A) = \int_M \mu_k(A)$ où la mesure $\mu_k(A)$ ne dépend que localement de A .

(iii) Si $m = 2$ et que $\sigma_2(A)(x,\xi) = a(x,\xi).\mathbb{1}_{E_x}$, où $a : T^*(M) \setminus 0 \to R_+^*$ est une fonction polynome homogène de degré 2 , on peut écrire $\mu_k(A)$ dans une carte locale $U \times R^p$:

$$\mu_k(A)(x) = |\text{dét}(a)|^{-\frac{1}{2}} P_{p,d,k}(A , (\text{dét}(a))^{-1})|dx| ,$$

où $P_{p,d,k}$ est un polynôme universel par rapport aux coefficients de A , à leurs dérivées partielles et à $(\text{dét } a)^{-1}$ avec $\text{dét}(a) = |a^{ij}|$ où $a(x,\xi) = \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$. De plus $\mu_k(A)$ est nulle pour k impair.

Remarques.- 1) On peut en déduire le comportement asymptotique des valeurs propres par un théorème taubérien : $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} C_{m,d} . \left(\frac{n}{U_o(A)}\right)^{\frac{m}{d}}$.

2) Au lieu d'étudier la fonction $h_A(t)$, on peut étudier après s'être ramené à un opérateur injectif la série $\zeta_A(s) = \Sigma (\lambda_n)^{-s}$. On montre à l'aide du développement asymptotique de $h_A(t)$ que cette fonction qui n'est définie *a priori* que pour $\text{Re}(s)$ assez grand se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et que la fonction $\Gamma(s)\zeta_A(s)$ a des pôles simples aux points $-\frac{k}{m}$ $(k \geq -d)$ avec

$\text{Rés}(\Gamma(s)\zeta_A(s))\Big|_{-\frac{k}{m}} = U_{\frac{k+d}{m}}(A)$ et en particulier $\zeta_A(0) = U_{\frac{d}{m}}(A)$.

II. Principe de la démonstration

Nous supposons connue l'unicité (évidente) et l'existence de la solution de l'équation de la chaleur (H_A) . Nous nous intéressons à un procédé de calcul du développement asymptotique.

On utilise le calcul fonctionnel pour l'opérateur A , i.e. on écrit $\exp(-tA) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{-t\lambda}(A - \lambda I)^{-1}\,d\lambda$ où γ est un chemin qui entoure $\mathbb{R}^+$ et donc le spectre de A . Plus précisément $\varepsilon > 0$ étant donné, on pose $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \varepsilon$ et $|\text{Im}(z)| > \varepsilon\,\text{Re}(z)\}$ et $\gamma = \gamma_\varepsilon = b\Omega_\varepsilon$. Dans la suite, on pose $\Omega = \Omega_{\varepsilon/2}$. On va approcher $(A - \lambda I)^{-1}$ dans Ω en utilisant un calcul des opérateurs pseudo-différentiels dépendant du paramètre complexe λ qui donne une approximation d'autant meilleure que $|\lambda|$ est grand.

1. Les symboles S^k_Ω et les opérateurs Ψ^k_Ω

a) Cas d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$

On pose $S^k_\Omega(U) = \{a(x,\xi,\lambda) : U \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to L(\mathbb{C}^p)$, C^∞ en x et ξ , analytique en λ , et tels que, pour $x \in K \subset\subset U$, on ait :

$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a(x,\xi,\lambda)| \le C^{\alpha,\beta}_K(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{k-|\alpha|}\}$.

On dira que $A(\lambda) \in \Psi^k_\Omega(U)$ si $A(\lambda)$ peut s'écrire :

$$A(\lambda)f(x) = \int e^{i\langle\xi,x-y\rangle}\,.\,a(x,\xi,\lambda)f(y)\,dy\,đ\xi$$

avec $a \in S^k_\Omega(U)$, $đ\xi = (2\pi)^{-d}\,d\xi$ et l'intégrale est prise au sens des intégrales oscillantes. On note $a = \sigma(A)$.

On a les propriétés suivantes :

(i) $A(\lambda) \in \Psi^k_\Omega$ et de symbole à support x-compact, alors pour $k < k(n,s,s')$, on a : $\|A(\lambda)u\|_s \leq C.(1 + |\lambda|)^{-n}\|u\|_{s'}$, où $\|u\|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$.

(ii) Si $A \in \Psi_\Omega^k$, $B \in \Psi_\Omega^{k'}$, $AB \in \Psi_\Omega^{k+k'}$ et $\sigma(AB) \sim \sum_\alpha D_\xi^\alpha a D_x^\alpha . b/\alpha!$ ($a = \sigma(A)$ et $b = \sigma(B)$). [$a \sim \sum_m a_m$, $a_m \in S_\Omega^{-k_m}$, $k_m \nearrow$, signifie $\forall N$, pour M assez grand $a - \sum_1^M a_m \in S_\Omega^{-N}$.]

(iii) La classe $\Psi_\Omega^k(U)$ est invariante par difféomorphisme.

b) Cas d'une variété compacte M

A cause de (iii), on peut définir $\Psi_\Omega^k(M)$ comme la classe d'opérateurs qui peuvent s'écrire dans un atlas fini $(U_i)_{i \in I}$, $Af = \sum_i \psi_i P_i \varphi_i f_i$ avec f_i = expression de f dans la carte locale U_i , φ_i et $\psi_i \in \mathcal{D}(U_i)$, $P_i \in \Psi_\Omega^k(U_i)$.

2. Approximation de $(A - \lambda I)^{-1}$ et de $\exp(-tA)$

On cherche à construire des $A_k(\lambda) \in \Psi_\Omega^{-m}(M)$ tels que :

(2.1) $\quad A_k(\lambda) \circ (A - \lambda I) - I \in \Psi_\Omega^{-k-1}(M)$.

Il suffit de faire la construction dans des cartes locales U . En effet, si on a : $A_k^U(\lambda) \circ (A - \lambda I) - I \in \Psi_\Omega^{-k-1}(U)$, on prendra : $A_k(\lambda) = \sum \psi_U A_k^U(\lambda)\varphi_U$ où ψ_U et $\varphi_U \in \mathcal{D}(U)$, $\sum_U \psi_U = 1$ et $\varphi_U = 1$ dans un voisinage du support de φ_U . En construisant de manière analogue une paramétrix à droite, on montrerait l'unicité de $A_k(\lambda)$ mod. $\Psi_\Omega^{-k-1-m}(M)$. On va construire par récurrence le symbole de A_k^U sous la forme $d_o + \ldots + d_k$ avec $d_j \in S_\Omega^{-j-m}(U)$. En utilisant la formule de composition des symboles, on obtient les équations :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} d_o(\sigma_m - \lambda I) = I \\ \displaystyle\sum_{j=r+|\alpha|+m-i} D_\xi^\alpha d_r D_x^\alpha \sigma_i' / \alpha! = 0 \ , \qquad j > 0 \ , \end{cases}$$

où $\sigma_i' = \sigma_i$ pour $i < m$ et $\sigma_m' = \sigma_m - \lambda I$.

Les équations se résolvent et donnent dans le cas plus facile où $\sigma_m(x,\xi) = a(x,\xi).\mathbb{1}_{E_x}$

$$(2.3)\qquad d_j(x,\xi,\lambda) = \sum_{s=1}^{k_j} d_{j,s}(x,\xi) d_o^s(x,\xi,\lambda) \ ,$$

où $d_{j,s}$ est homogène de degré $ms - j - m$ en ξ et est un polynôme par rapport aux coefficients de A et à leurs dérivées.

Remarque.- A elliptique auto-adjoint ≥ 0 implique que $\sigma_m(x,\xi)$ est hermitien > 0 , cela permet de montrer que $d_o \in S_\Omega^{-m}$.

En multipliant (2.1) par $(A - \lambda I)^{-1}$ à droite qui vérifie $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{s,s} \leq C.|\lambda|^{-1}$, on obtient, pour $k < k(n,s,s')$,

$$\|A_k(\lambda) - (A - \lambda I)^{-1}\|_{s,s'} \leq C.(1 + |\lambda|)^{-n} \ .$$

On pose $E_{t,k} = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma e^{-t\lambda}.A_k(\lambda)d\lambda$, on a alors $\|E_{t,k} - \exp(-tA)\|_{s,s'} \leq C.t^{n-1}$. (En effet, $\int_\gamma e^{-t\lambda}(A_k(\lambda) - (A - \lambda I)^{-1})d\lambda = \int_\gamma e^{-\lambda}.(A_k(\frac{\lambda}{t}) - (A - \frac{\lambda}{t})^{-1})d\lambda$, car A_k analytique en λ .) A l'aide des lemmes de Sobolev, on a donc des estimations analogues pour les noyaux.

Pour $k > k(n)$, et $0 < t \leq 1$, $\|E_{t,k}(x,x) - E_A(t,x,x)\|_{L(E_x)} \leq C.t^n$.

3. Calcul du développement asymptotique

Nous voulons maintenant évaluer $Tr_x(E_{t,k}(x,x))v(x)$. Soit U une carte locale en x et $\psi_U = 1$ dans un voisinage de x , pour f à support contenu dans celui de ψ_U , on a :

$$E_{t,k}\, f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} e^{-t\lambda}\{\int_{U\times\mathbb{R}^p} e^{i\langle\xi,x-y\rangle}.\sum_{j=0}^{k} d_j(x,\xi,\lambda)\, f(y)\, dy\, d\!\!\!{}^-\xi\}\, d\lambda \ .$$

Soit en posant, pour $u \in L(E)$, $\underline{u}(x) = \mathrm{Tr}_x u$:

$$\mathrm{Tr}_x(E_{t,k}(x,x))v(x) = (\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} e^{-t\lambda}\int_{\mathbb{R}^p}\sum_{j=0}^{k}\underline{d}_j(x,\xi,\lambda)\, d\!\!\!{}^-\xi\, .\, d\lambda\,)\,|dx| \ .$$

On est donc amené à évaluer les intégrales :

$$I_{j,s}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} e^{-t\lambda}\,.\int_{\mathbb{R}^p}\underline{d}_{j,s}(x,\xi)(a(x,\xi)-\lambda)^{-s}\, d\!\!\!{}^-\xi . d\lambda \ .$$

Un passage en coordonnées polaires ($\xi = r\xi_o$, $|\xi_o| = 1$) donne :

$$I_{j,s}(t) = C(j,s,m,d,p).t^{\frac{j-d}{m}}\,.\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{1-s+(j-d)/m}.\underline{d}_{j,s}(x,\xi_o)d\xi_o \ .$$

En particulier pour $j = 0$ (alors $s = 1$) :

$$I_{0,1}(t) = C(m,d,p).t^{-\frac{d}{m}}\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{-d/m}.d\xi_o \ .$$

L'expression de $I_{j,s}(t)$ donne le développement cherché avec :

$$(3.1)\quad \mu_k(A)(x) = \left[\sum_{s=1}^{N_k} C(k,s,m,d,p).\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{1-s+(k-d)/m}.\underline{d}_{k,s}(x,\xi_o)d\xi_o\right]|dx| .$$

On en déduit les (i) et (ii) du théorème énoncé en I.

Dans le cas où $m = 2$, on trouve des intégrales du genre :

$$(3.2)\qquad \left(\int_{|\xi_o|=1} a(x,\xi_o)^{-\ell/2}.\underline{d}_{j,s}(x,\xi_o)d\xi_o\right)|dx| \ ,$$

avec $\underline{d}_{j,s}$ polynôme homogène de degré $\ell - d$ ($\equiv j \pmod 2$) en ξ_o . De plus, $\underline{d}_{j,s}$ est un polynôme par rapport aux coefficients de A et à leurs dérivées partielles. L'intégrale (3.2) n'a aucune raison <u>a priori</u> d'être de la forme indiquée dans le (iii) du théorème de I. Un argument dû à [ABP] permet cependant de rendre cette intégrale rationnelle. La nullité pour k impair se voit facilement par symétrie. Soient p un polynôme homogène de degré $\ell - d$ en ξ et a une forme quadratique > 0 ; posons $P(a,\xi) = p(\xi)a(\xi)^{-\ell/2}\,\omega(\xi)$, avec $\omega(\xi) = i(\xi)\, d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_d$ et $f(a) = \int_{|\xi_0|=1} P(a,\xi)$. Il suffit de montrer que $f(a) = |\text{dét}\ a|^{-\frac{1}{2}}.\text{polynôme}(a^{ij}, (\text{dét}\ a)^{-1})$. Soit $\pi : GL(d, R) \to Q$ défini par $\pi(g) = {}^t g.g$ et considérons $\hat{f}(g) = f(\pi(g))$.

$$\hat{f}(g) = \int_{|\xi_0|=1} p(\xi).\langle g\xi\,,\,g\xi\rangle^{-\ell/2}\,\omega(\xi)\ .$$

$P(a,\xi)$ est une forme fermée dans $R^d \setminus 0$, donc :

$$\hat{f}(g) = \int_{\langle g\xi, g\xi\rangle=1} p(\xi)\omega(\xi) = |\text{dét}\ g|^{-1}.\int_{S^{d-1}} p(g^{-1}\xi)\omega(\xi)\ .$$

Or $\int_{S^{d-1}} p(g^{-1}\xi)d\xi = (\text{dét}\ g)^{-2(\ell-d)}.\text{Polynôme}(g^{ij})$.

On a $\hat{f}(\omega g) = \hat{f}(g)$ pour tout $\omega \in O(d)$, donc ce dernier polynôme des g^{ij} est invariant par l'action de $O(d)$, il résulte alors d'un théorème classique de la théorie des invariants que c'est un polynôme par rapport aux coefficients de $a = {}^t g.g$. Le résultat en découle en remarquant que $(\text{dét}\ g)^2 = \text{dét}\ a$.

BIBLIOGRAPHIE

[ABP] M. ATIYAH, R. BOTT et V. K. PATODI - Inventiones Math., 19 (1973), 279-330.

[BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET - Lecture notes in Math., 194 (1971), Springer-Verlag.

[G] P. GILKEY - A paraître dans Advances in Mathematics.

[GA] M. P. GAFFNEY - Comm. Pure and Applied Math., XI (1958), p. 535-545.

[MS] H. P. McKEAN et I. M. SINGER - Journal of differential geometry, 1 (1967), p. 43-69.

[MP] S. MINAKSHISUNDARAM et A. PLEIJEL - Canad. J. Math., 1 (1949), p. 242-256.

[P] V. K. PATODI - J. of differential geometry, 5 (1971), p. 233-249.

[S_1] R. T. SEELEY - Proc. of Symp. in pure math., X (1967), p. 288-307.

[S_2] R. T. SEELEY - Amer. J. of Math., 91 (1969), p. 963-983.